西 城 区 高 三 模 拟 测 试

数　　学(文科)

2017.5

本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分，第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至6页，共150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第Ⅰ卷（选择题　共40分）

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知集合$A=\{x\in\mathbf{R}\mid -1<x<1\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}\mid x\cdot(x-2)<0\}$，那么$A\cap B=$

(A) $\{x\in\mathbf{R}\mid 0<x<1\}$　　(B) $\{x\in\mathbf{R}\mid 0<x<2\}$

(C) $\{x\in\mathbf{R}\mid -1<x<0\}$　　(D) $\{x\in\mathbf{R}\mid -1<x<2\}$

2. 设向量$\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(0,-2)$．则与$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$垂直的向量可以是

(A) $(3,2)$　　(B) $(3,-2)$

(C) $(4,6)$　　(D) $(4,-6)$

3. 下列函数中，值域为$[0,1]$的是

(A) $y=x^2$　　(B) $y=\sin x$

(C) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$　　(D) $y=\sqrt{1-x^2}$

4. 若抛物线$y^2=ax$的焦点到其准线的距离是2，则$a=$

(A) ±1　　(B) ±2　　(C) ±4　　(D) ±8

5. 设 a，$b\neq 0$，则"$a>b$"是"$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$"的

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

6. 在平面直角坐标系中，不等式组 $\begin{cases}\sqrt{3}x-y\leqslant 0,\\ x-\sqrt{3}y+2\geqslant 0,\\ y\geqslant 0\end{cases}$ 表示的平面区域的面积是

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(B) $\sqrt{3}$　　(C) 2　　(D) $2\sqrt{3}$

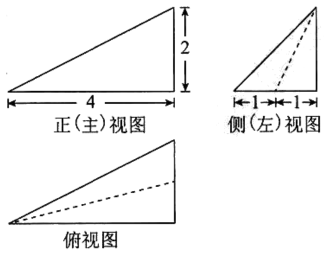
7. 某四面体的三视图如图所示，该四面体的体积为

(A) $\frac{4}{3}$

(B) 2

(C) $\frac{8}{3}$

(D) 4



8. 函数 $f(x)=x|x|$. 若存在 $x\in[1,+\infty)$，使得 $f(x-2k)-k<0$，则 k 的取值范围是

(A) $(2,+\infty)$　　(B) $(1,+\infty)$

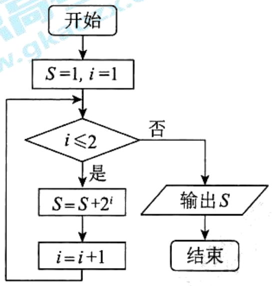
(C) $(\frac{1}{2},+\infty)$　　(D) $(\frac{1}{4},+\infty)$

第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 在复平面内，复数 z 对应的点是 $Z(1,-2)$，则复数 z 的共轭复数 $\bar{z}=$____.

10. 执行如图所示的程序框图，输出的 S 值为____.



11. 在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c.

若 $A=\frac{\pi}{3}$，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，则 $c=$____.

12. 已知圆 $O: x^2+y^2=1$. 圆 O' 与圆 O 关于直线 $x+y-2=0$ 对称，则圆 O' 的方程是____.

13. 函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leqslant 0,\\ \log_2 x, & x>0.\end{cases}$ 则 $f(\frac{1}{4})=$____；方程 $f(-x)=\frac{1}{2}$ 的解是____.

14. 某班开展一次智力竞赛活动，共 a，b，c 三个问题，其中题 a 满分是 20 分，题 b，c 满分都是 25 分. 每道题或者得满分，或者得 0 分. 活动结果显示，全班同学每人至少答对一道题，有 1 名同学答对全部三道题，有 15 名同学答对其中两道题. 答对题 a 与题 b 的人数之和为 29，答对题 a 与题 c 的人数之和为 25，答对题 b 与题 c 的人数之和为 20. 则该班同学中只答对一道题的人数是____；该班的平均成绩是____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\tan(x+\frac{\pi}{4})$.

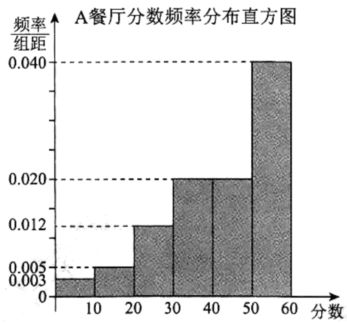
（Ⅰ）求 $f(x)$的定义域；

（Ⅱ）设 β 是锐角，且 $f(\beta)=2\sin(\beta+\frac{\pi}{4})$，求 β 的值.

16.（本小题满分 13 分）

某大学为调研学生在 A，B 两家餐厅用餐的满意度，从在 A，B 两家餐厅都用过餐的学生中随机抽取了 100 人，每人分别对这两家餐厅进行评分，满分均为 60 分.

整理评分数据，将分数以 10 为组距分成 6 组：[0，10)，[10，20)，[20，30)，[30，40)，[40，50)，[50，60]，得到 A 餐厅分数的频率分布直方图，和 B 餐厅分数的频数分布表：



B 餐厅分数频数分布表

分数区间	频数
[0，10)	2
[10，20)	3
[20，30)	5
[30，40)	15
[40，50)	40
[50，60]	35

（Ⅰ）在抽样的 100 人中，求对 A 餐厅评分低于 30 的人数；

（Ⅱ）从对 B 餐厅评分在 [0，20) 范围内的人中随机选出 2 人，求 2 人中恰有 1 人评分在 [0，10) 范围内的概率；

（Ⅲ）如果从 A，B 两家餐厅中选择一家用餐，你会选择哪一家？说明理由.

17.（本小题满分 13 分）

设 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列，$\{b_n\}$ 是首项为 1，公比为 q 的等比数列．记 $c_n=a_n+b_n$，$n=1,2,3,\cdots$．

（Ⅰ）若 $\{c_n\}$ 是等差数列，求 q 的值；

（Ⅱ）求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n．

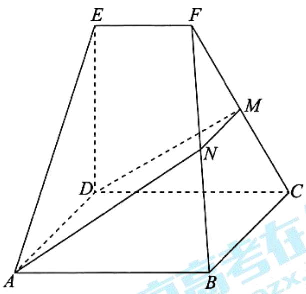
18.（本小题满分 14 分）

如图，在几何体 $ABCDEF$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$EF \parallel CD$，$CD \perp EA$，$CD=2EF=2$，$ED=\sqrt{3}$．M 为棱 FC 上一点，平面 ADM 与棱 FB 交于点 N．

（Ⅰ）求证：$ED \perp CD$；

（Ⅱ）求证：$AD \parallel MN$；

（Ⅲ）若 $AD \perp ED$，试问平面 BCF 是否可能与平面 $ADMN$ 垂直？若能，求出 $\dfrac{FM}{FC}$ 的值；若不能，说明理由．



19.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\frac{a}{x-2}+\ln x$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）给出 a 的一个取值，使得曲线 $y=f(x)$ 存在斜率为 0 的切线，并说明理由；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 存在极小值和极大值，证明：$f(x)$ 的极小值大于极大值.

20.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 $P(\sqrt{2},1)$. 直线 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+m$ 与椭圆 C 相交于 A，B 两点.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）求 $\triangle PAB$ 的面积的最大值；

（Ⅲ）设直线 PA，PB 分别与 y 轴交于点 M，N. 判断 $|PM|$，$|PN|$ 的大小关系，并加以证明.

西城区高三模拟测试

高三数学（文科）参考答案及评分标准

2017.5

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. A	2. A	3. D	4. C
5. D	6. B	7. A	8. D

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. $1+2\mathrm{i}$　　10. 7　　11. 2

12. $(x-2)^2+(y-2)^2=1$　　13. -2；$-\sqrt{2}$ 或1　　14. 4；42

注：第 13、14 题第一空 2 分，第二空 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由 $x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，得 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$． [3 分]

所以 函数 $f(x)$ 的定义域是 $\{x\,|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$． [4 分]

（Ⅱ）依题意，得 $\tan(\beta+\frac{\pi}{4})=2\sin(\beta+\frac{\pi}{4})$． [5 分]

所以 $\dfrac{\sin(\beta+\frac{\pi}{4})}{\cos(\beta+\frac{\pi}{4})}=2\sin(\beta+\frac{\pi}{4})$．　① [7 分]

因为 β 是锐角，所以 $\frac{\pi}{4}<\beta+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$， [8 分]

所以 $\sin(\beta+\frac{\pi}{4})>0$， [9 分]

① 式化简为 $\cos(\beta+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$． [10 分]

所以 $\beta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$， [12 分]

所以 $\beta=\frac{\pi}{12}$． [13 分]

16.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由 A 餐厅分数的频率分布直方图，得

对 A 餐厅评分低于 30 的频率为 $(0.003+0.005+0.012)\times 10=0.2$，　　[2 分]

所以，对 A 餐厅评分低于 30 的人数为 $100\times 0.2=20$．　　[3 分]

（Ⅱ）对 B 餐厅评分在 $[0,10)$ 范围内的有 2 人，设为 M_1,M_2；

对 B 餐厅评分在 $[10,20)$ 范围内的有 3 人，设为 N_1,N_2,N_3．

从这 5 人中随机选出 2 人的选法为：

(M_1,M_2)，(M_1,N_1)，(M_1,N_2)，(M_1,N_3)，(M_2,N_1)，(M_2,N_2)，(M_2,N_3)，

(N_1,N_2)，(N_1,N_3)，(N_2,N_3)，共 10 种．　　[7 分]

其中，恰有 1 人评分在 $[0,10)$ 范围内的选法为：(M_1,N_1)，(M_1,N_2)，(M_1,N_3)，

(M_2,N_1)，(M_2,N_2)，(M_2,N_3)，共 6 种．　　[9 分]

故 2 人中恰有 1 人评分在 $[0,10)$ 范围内的概率为 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$．　　[10 分]

（Ⅲ）从两个餐厅得分低于 30 分的人数所占的比例来看：

由（Ⅰ）得，抽样的 100 人中，A 餐厅评分低于 30 的人数为 20，

所以，A 餐厅得分低于 30 分的人数所占的比例为 20%．

B 餐厅评分低于 30 的人数为 $2+3+5=10$，

所以，B 餐厅得分低于 30 分的人数所占的比例为 10%．

所以会选择 B 餐厅用餐．　　[13 分]

注：本题答案不唯一．只要考生言之合理即可．

17.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列，

所以 $a_n=2n-1$．　　[2 分]

因为 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公比为 q 的等比数列，

所以 $b_n=q^{n-1}$．　　[4 分]

所以 $c_n=a_n+b_n=2n-1+q^{n-1}$．　　[5 分]

因为 $\{c_n\}$ 是等差数列，

所以 $2c_2=c_1+c_3$， [6 分]

即 $2(3+q)=2+5+q^2$，解得 $q=1$． [7 分]

经检验，$q=1$时，$c_n=2n$，所以$\{c_n\}$是等差数列． [8 分]

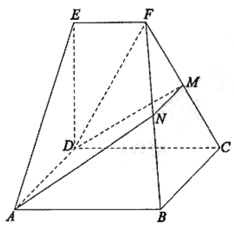
（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $c_n=2n-1+q^{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$．

所以 $S_n=\sum_{k=1}^{n}c_k=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+\sum_{k=1}^{n}q^{k-1}=n^2+\sum_{k=1}^{n}q^{k-1}$． [10 分]

当 $q=1$时，$S_n=n^2+n$． [11 分]

当 $q\neq 1$时，$S_n=n^2+\dfrac{q^n-1}{q-1}$． [13 分]

18．（本小题满分 14 分）



解：（Ⅰ）因为 $ABCD$为矩形，所以 $CD\perp AD$． [1 分]

又因为 $CD\perp EA$， [2 分]

所以 $CD\perp$平面EAD． [3 分]

所以 $ED\perp CD$． [4 分]

（Ⅱ）因为 $ABCD$为矩形， 所以 $AD/\!/BC$， [5 分]

所以 $AD/\!/$平面FBC． [7 分]

又因为 平面$ADMN\cap$平面$FBC=MN$，

所以 $AD/\!/MN$． [8 分]

（Ⅲ）平面$ADMN$与平面BCF可以垂直．证明如下： [9 分]

连接 DF．因为 $AD\perp ED$， $AD\perp CD$ ，

所以 $AD\perp$平面$CDEF$． [10 分]

所以 $AD\perp DM$．

因为 $AD/\!/MN$，所以$DM\perp MN$． [11 分]

因为 平面$ADMN\cap$平面$BCF=MN$，

若使 平面$ADMN\perp$平面BCF，

则 $DM\perp$平面BCF，所以 $DM\perp FC$． [12 分]

在梯形$CDEF$中，因为$EF/\!/CD$， $ED\perp CD$， $CD=2EF=2$， $ED=\sqrt{3}$，

所以 $DF=DC=2$．

所以 若使$DM\perp FC$能成立，则M为FC的中点．

所以 $\dfrac{FM}{FC}=\dfrac{1}{2}$． [14 分]

19.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域是 $D=\{x\,|\,x>0$，且 $x\neq 2\}$，且 $f'(x)=-\dfrac{a}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{x}$．［2 分］

当 $a=1$ 时，曲线 $y=f(x)$ 存在斜率为 0 的切线．证明如下：［3 分］

曲线 $y=f(x)$ 存在斜率为 0 的切线 $\Leftrightarrow$ 方程 $f'(x)=0$ 存在 D 上的解．

令 $-\dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{x}=0$，　整理得 $x^2-5x+4=0$，

解得 $x=1$，或 $x=4$．

所以 当 $a=1$ 时，曲线 $y=f(x)$ 存在斜率为 0 的切线．［5 分］

注：本题答案不唯一，只要 $a>0$ 均符合要求．

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f'(x)=-\dfrac{a}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{x}$．

① 当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，

函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增，无极值，不合题意．［6 分］

② 当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，整理得 $x^2-(a+4)x+4=0$．

由 $\Delta=[-(a+4)]^2-16>0$，

所以，上述方程必有两个不相等的实数解 x_1，x_2，不妨设 $x_1<x_2$．

由 $\begin{cases}x_1+x_2=a+4>4,\\ x_1x_2=4,\end{cases}$ 得 $0<x_1<2<x_2$．［8 分］

$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,x_1)$	x_1	$(x_1,2)$	$(2,x_2)$	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	↘	极小值	↗

所以，$f(x)$ 存在极大值 $f(x_1)$，极小值 $f(x_2)$．［10 分］

$f(x_2)-f(x_1)=(\dfrac{a}{x_2-2}+\ln x_2)-(\dfrac{a}{x_1-2}+\ln x_1)=(\dfrac{a}{x_2-2}-\dfrac{a}{x_1-2})+(\ln x_2-\ln x_1)$．

［11 分］

因为 $0<x_1<2<x_2$，且 $a>0$，

所以 $\dfrac{a}{x_2-2}-\dfrac{a}{x_1-2}>0$，$\ln x_2-\ln x_1>0$，

所以 $f(x_2)>f(x_1)$.

所以 $f(x)$ 的极小值大于极大值. [13 分]

20.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的半焦距为 c.

因为椭圆 C 的离心率是 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=1-\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{2}$， 即 $a^2=2b^2$. [1 分]

由 $\begin{cases} a^2=2b^2, \\ \dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a^2=4, \\ b^2=2. \end{cases}$ [3 分]

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$. [4 分]

（Ⅱ）将 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+m$ 代入 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$，

消去 y 整理得 $x^2+\sqrt{2}mx+m^2-2=0$. [5 分]

令 $\Delta=2m^2-4(m^2-2)>0$，解得 $-2<m<2$.

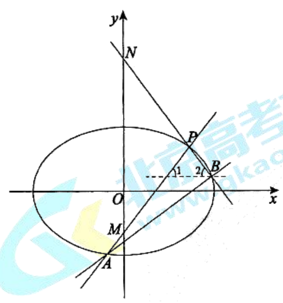
设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

则 $x_1+x_2=-\sqrt{2}m$，$x_1x_2=m^2-2$.

所以 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{1+(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{4-m^2}$. [6 分]



点 $P(\sqrt{2},1)$ 到直线 $x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}m=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2}m|}{\sqrt{1+2}}=\dfrac{\sqrt{2}|m|}{\sqrt{3}}$.

[7 分]

所以 $\triangle PAB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot d$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}|m|\cdot\sqrt{4-m^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{-(m^2-2)^2+4}\leqslant\sqrt{2}\,,$$ [8 分]

当且仅当 $m=\pm\sqrt{2}$ 时，$S=\sqrt{2}$.

所以 $\triangle PAB$ 的面积的最大值是 $\sqrt{2}$. [9 分]

（III）$|PM|=|PN|$. 证明如下： [10 分]

设直线 PA，PB 的斜率分别是 k_1，k_2，

则 $k_1+k_2=\frac{y_1-1}{x_1-\sqrt{2}}+\frac{y_2-1}{x_2-\sqrt{2}}=\frac{(y_1-1)(x_2-\sqrt{2})+(y_2-1)(x_1-\sqrt{2})}{(x_1-\sqrt{2})(x_2-\sqrt{2})}$. [11 分]

由（II）得 $(y_1-1)(x_2-\sqrt{2})+(y_2-1)(x_1-\sqrt{2})$

$$=(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+m-1)(x_2-\sqrt{2})+(\frac{\sqrt{2}}{2}x_2+m-1)(x_1-\sqrt{2})$$

$$=\sqrt{2}x_1x_2+(m-2)(x_1+x_2)-2\sqrt{2}(m-1)$$

$$=\sqrt{2}(m^2-2)+(m-2)(-\sqrt{2}m)-2\sqrt{2}(m-1)$$

$$=0,$$

所以 直线 PA，PB 的倾斜角互补. [13 分]

所以 $\angle 1=\angle 2$，

所以 $\angle PMN=\angle PNM$.

所以 $|PM|=|PN|$. [14 分]