2020 北京西城区高三一模

数　　学

2020. 4

本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分，第Ⅰ卷 1 至 2 页，第Ⅱ卷 3 至 6 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷(选择题　共 40 分)

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 设集合 $A=\{x|x<3\}$,$B=\{x|x<0,$或 $x>2\}$,则 $A\cap B=$

(A) $(-\infty,0)$ (B) $(2,3)$ (C) $(-\infty,0)\cup(2,3)$ (D) $(-\infty,3)$

2. 若复数 $z=(3-i)(1+i)$，则$|z|=$

(A) $2\sqrt{2}$　　(B) $2\sqrt{5}$　　(C) $\sqrt{10}$　　(D) 20

3. 下列函数中，值域为 R 且为奇函数的是

(A) $y=x+2$　　(B) $y=sinx$　　(C) $y=x-x^3$　　(D) $y=2^x$

4. 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，若$a_3=2$,$a_1+a_4=5$，则$S_6=$

(A) 10　　(B) 9　　(C) 8　　(D) 7

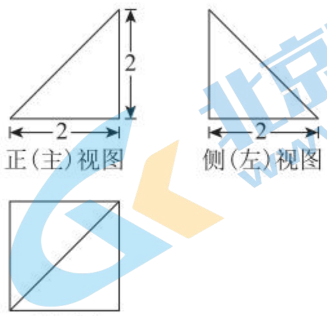
5. 设 $A(2,-1)$,$B(4,1)$,则以线段 AB 为直径的圆的方程是

(A) $(x-3)^2+y^2=2$　　(B)) $(x-3)^2+y^2=8$

(C) $(x+3)^2+y^2=2$　　(D) $(x+3)^2+y^2=8$

6. 设 a,b,c 为非零实数，且 $a>c$,$b>c$，则

(A) $a+b>c$　　(B) $ab>c^2$　　(C) $\frac{a+b}{2}>c$　　(D) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>$



$\frac{2}{c}$

7. 某四棱锥的三视图如图所示，记 S 为此棱锥所有棱的长度的集合，则

(A) $2\sqrt{2} \notin S$,且 $2\sqrt{3} \notin S$

(B) $2\sqrt{2} \notin S$,且 $2\sqrt{3} \in S$

(C) $2\sqrt{2} \in S$,且 $2\sqrt{3} \notin S$

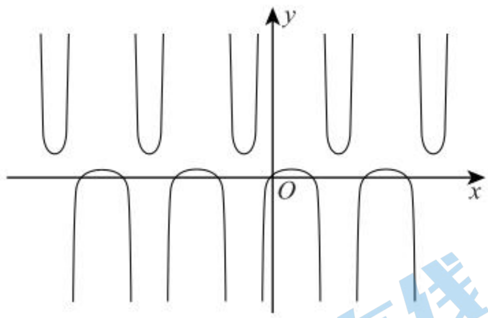
(D) $2\sqrt{2} \in S$,且 $2\sqrt{3} \in S$

8. 设 a,b 为非零向量，则“$|a+b|=|a|+|b|$”是“a 与 b 共线”的

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

9. 已知函数 $f(x)=\frac{\sin x}{1+2\sin x}$ 的部分图象如图所示，将此图象分别作以下变换，那么变换后的图象可以与原图象重合的变换方式有



①绕着 x 轴上一点旋转 180°;

②沿 x 轴正方向平移;

③以 x 轴为轴作轴对称;

④以 x 轴的某一条垂线为轴作轴对称.

(A) ①③　　(B) ③④　　(C) ②③　　(D) ②④

10. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+10x+1, & x\le 0\\ |\lg x|, & x>0\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=a(a\in R)$ 有四个实数解 $x_i(i=1,2,3,4)$，其中 $x_1<x_2<x_3<x_4$，则 $(x_1+x_2)(x_3-x_4)$ 的取值范围是

(A) $(0,101]$　　(B) $(0,99]$　　(C) $(0,100]$　　(D) $(0,+\infty)$

第 II 卷（非选择题共 110 分）

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 在 $(x+\frac{1}{x})^6$ 的展开式中，常数项为__________.（用数字作答）

12. 若向量 $a=(x^2,2)$,$b=(1,x)$ 满足 $a\cdot b<3$，则实数 x 的取值范围是________________.

13. 设双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，则该双曲线的离心率为________________.

14. 函数 $f(x)=sin(2x+\frac{\pi}{4})$的最小正周期为__________;若函数 $f(x)$在区间$(0,\alpha)$上单调递增,则α的最大值为__________.

15. 在一次体育水平测试中,甲、乙两校均有 100 名学生参加,其中:甲校男生成绩的优秀率为 70%,女生成绩的优秀率为 50%;乙校男生成绩的优秀率为 60%,女生成绩的优秀率为 40%.对于此次测试,给出下列三个结论:

①甲校学生成绩的优秀率大于乙校学生成绩的优秀率;

②甲、乙两校所有男生成绩的优秀率大于甲、乙两校所有女生成绩的优秀率;

③甲校学生成绩的优秀率与甲、乙两校所有学生成绩的优秀率的大小关系不确定.其中,所有正确结论的序号是____________________.

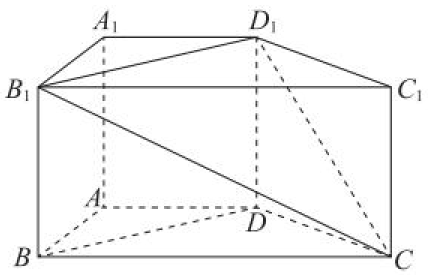
三、解答题:本大题共 6 小题,共 85 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

16.(本小题满分 14 分)

如图,在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,$AA_1\perp$平面 $ABCD$,底面 ABCD 满足 $AD \parallel BC$,且 $AB=AD=AA_1=2$,$BD=DC=2\sqrt{2}$.

(Ⅰ)求证:$AB\perp$平面 ADD_1A_1;

(Ⅱ)求直线 AB 与平面B_1CD_1所成角的正弦值.



17.(本小题满分 14 分)

已知△ABC 满足__________,且 $b=\sqrt{6}$,$A=\frac{2\pi}{3}$,求 $sinC$ 的值及△ABC 的面积.

从①$B=\frac{\pi}{4}$,②$a=\sqrt{3}$,③$a=3\sqrt{2}sinB$ 这三个条件中选一个,补充到上面问题中,并完成解答.

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

18.(本小题满分 14 分)

2019 年底,北京 2022 年冬奥组委会启动志愿者全球招募,仅一个月内报名人数便突破 60 万,其中青年学生约有 50 万人.现从这 50 万青年学生志愿者中,按男女分层抽样随机选取 20 人进行英语水平测试,所得成绩(单位:分)统计结果用茎叶图记录如下:

男		女
6	4	7
3	5	7 9
0 3 8	6	5 6
1 4	7	1 3 5 6 8
5	8	1 8

(Ⅰ)试估计在这 50 万青年学生志愿者中,英语测试成绩在 80 分以上的女生人数;

(Ⅱ)从选出的 8 名男生中随机抽取 2 人,记其中测试成绩在 70 分以上的人数为 X,求 X 的分布列和数学期望;

(Ⅲ)为便于联络,现将所有的青年学生志愿者随机分成若干组(每组人数不少于 5000),并在每组中随机选取 m 个人作为联络员,要求每组的联络员中至少有 1 人的英语测试成绩在 70 分以上的概率大于 90%.根据图表中数据,以频率作为概率,给出 m 的最小值.(结论不要求证明)

19.(本小题满分 14 分)

设函数 $f(x) = alnx + x^2 - (a+2)x$,其中 $a \in R$.

(Ⅰ)若曲线 $y = f(x)$在点$(2,f(2))$处切线的倾斜角为$\frac{\pi}{4}$,求 a 的值;

(Ⅱ)已知导函数 $f'(x)$在区间$(1,e)$上存在零点,证明:当 $x \in (1,e)$时,$f(x) >- e^2$.

20.(本小题满分 15 分)

设椭圆 $E:\frac{x^2}{2}+y^2=1$, 直线l_1经过点 $M(m,0)$, 直线l_2经过点 $N(n,0)$, 直线$l_1 \parallel$直线l_2, 且直线l_1, l_2分别与椭圆 E 相交于 A,B 两点和 C,D 两点.

(Ⅰ)若 M,N 分别为椭圆 E 的左、右焦点, 且直线$l_1 \perp x$ 轴, 求四边形 $ABCD$ 的面积;

(Ⅱ)若直线l_1的斜率存在且不为 0, 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 求证: $m+n=0$;

(Ⅲ)在(Ⅱ)的条件下, 判断四边形 $ABCD$ 能否为矩形, 说明理由.

21.(本小题满分 14 分)

对于正整数 n, 如果 $k(k\in N^*)$个整数$a_1,a_2,\dots,a_k$满足 $1\le a_1\le a_2\le\dots\le a_k\le n$,

且$a_1+a_2+\dots+a_k=n$, 则称数组$(a_1,a_2,\dots,a_k)$为 n 的一个“正整数分拆”. 记$a_1,a_2,\dots,a_k$均为偶数的“正整数分拆”的个数为f_n,$a_1,a_2,\dots,a_k$均为奇数的“正整数分拆”的个数为g_n.

(Ⅰ)写出整数 4 的所有“正整数分拆”;

(Ⅱ)对于给定的整数 $n(n\ge 4)$, 设$(a_1,a_2,\dots,a_k)$是 n 的一个“正整数分拆”,

且$a_1=2$, 求 k 的最大值;

(Ⅲ)对所有的正整数 n, 证明: $f_n\le g_n$; 并求出使得等号成立的 n 的值.

(注: 对于 n 的两个“正整数分拆”$(a_1,a_2,\dots,a_k)$与$(b_1,b_2,\dots,b_m)$, 当且仅当 $k=m$ 且$a_1=b_1,a_2=b_2,\dots,a_k=b_m$时, 称这两个“正整数分拆”是相同的.)

西城区高三统一测试

数学答案

2020.4.5

一、选择题：（本题满分 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	C	B	A	C	D	A	D	B

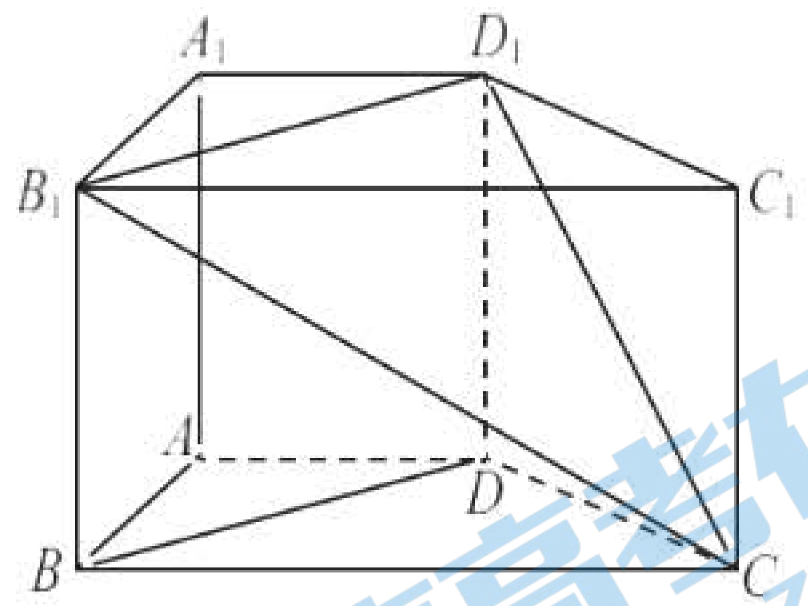
二、填空题：（本题满分 25 分）

题号	11	12	13	14		15
答案	20	$(-3,1)$	$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	π	$\dfrac{\pi}{8}$	②③

三、解答题：（本题满分 80 分）

16. （本小题满分 14 分）

(1) 证明：



在ΔABD中，$AB = AD = 2, BD = 2\sqrt{2}$

由勾股定理得，$\angle BAD=90^\circ$

$\therefore AB \perp AD$

$\because AA_1 \perp$ 平面$ABCD, AB \subseteq$ 平面$ABCD$,

$\therefore AA_1 \perp AB$

又$\because AA_1 \cap AD = A$

$\therefore AB \perp$ 平面ADD_1A_1

(2) 解：由(1)知，AB, AD, AA_1 两两垂直，

分别以 AB, AD, AA_1 为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，

则A(0, 0, 0), B(2, 0, 0), C(2, 4, 0), $B_1(2,0,2)$, $D_1(0,2,2)$

$\therefore \overrightarrow{AB} = (2,0,0)$, $\overrightarrow{B_1C} = (0,4,-2)$, $\overrightarrow{B_1D_1} = (-2,2,0)$

设平面B_1CD_1的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$

$\therefore\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1C}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1D_1}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}4y-2z=0\\ -2x+2y=0\end{cases}$

令 $x=1$,，则 $y=1$，$z=2$

$\therefore\vec{n}=(1,1,2)$

设直线 AB 与平面 B_1CD_1 所成角为 θ，

$$\therefore\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AB},\vec{n}\right\rangle\right|=\left|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}\right|=\left|\frac{2}{2\times\sqrt{6}}\right|=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

17. (本小题满分 14 分)

当选择条件①时:

$\because B=\frac{\pi}{4},A=\frac{2\pi}{3}$，

$$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

由正弦定理得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即 $\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ 得，$a=3$

$$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{9-3\sqrt{3}}{4}$$

当选择条件②时:

已知$a=\sqrt{3},b=\sqrt{6},A=\frac{2\pi}{3}$ $\because a<b$，$A<B$,且A为钝角，所以无解。

当选择条件③时:

$\because a=3\sqrt{2}\sin B,b=\sqrt{6},A=\frac{2\pi}{3}$ $\therefore B$为锐角

由正弦定理得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即 $\frac{3\sqrt{2}\sin B}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sin B}$ 得，$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

由正弦定理得，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，即 $\dfrac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ 得，$a=3$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{9-3\sqrt{3}}{4}$

18.(本小题满分 14 分)

解：(1) 在茎叶图中，女生一共有 12 人，其中英语成绩在 80 分以上者共有 2 人，所以在这个抽样的 12 人中，英语成绩在 80 分以上者比例为 $\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$。因为 20 人中女生的占比为 $\dfrac{12}{20}=\dfrac{3}{5}$，由此得到 50 万青年志愿者中女生的人数为 $50\times\dfrac{3}{5}=30$ 万，如果以抽取的 20 人中的女生中成绩在 80 分以上的比例作为 30 万女青年志愿者的英语成绩在 80 分以上的比例估计，则有 30 万女青年志愿者中英语成绩在 80 分以上的人数为 $30\times\dfrac{1}{6}=5$ 万人。

(2) 因为从 8 名男生中抽取 2 人，其中英语成绩在 70 分以上者共有 3 人，所以 X 的取值范围为 0，1，2。所以有 $P(X=0)=\dfrac{C_5^2}{C_8^2},P(X=1)\dfrac{C_5^1C_3^1}{C_8^2},P(X=2)=\dfrac{C_3^2}{C_8^2}$。于是可得随机变量 X 的分布列如下：

X	0	1	2
P	$\dfrac{C_5^2}{C_8^2}$	$\dfrac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}$	$\dfrac{C_3^2}{C_8^2}$

所以 X 的数学期望为 $E(X)=0\times\dfrac{C_5^2}{C_8^2}+1\times\dfrac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}+2\times\dfrac{C_3^2}{C_8^2}=\dfrac{2\times3}{8}=\dfrac{3}{4}$。

(3) m 的最小值为 4

解析：在抽取的 20 人中，英语成绩在 70 分以上者共计 10 人，所以在这 20 人中随机抽取一人，其英语成绩在 70 分以上的概率为 $\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$。在超过 5000 人的青年志愿者中抽取 m 人，其英语成绩在 70 分以上至少一人为事件 A，则 $P(\overline{A})=C_m^m\left(\dfrac{1}{2}\right)^m<0.1=\dfrac{1}{10}$，由此得到 $m>3$，所以 m 的最小值为 4.

19. (本小题满分 14 分)

解（1）$\because f'(x)=\frac{a}{x}+2x-(a+2)$，由题可知 $f'(2)=\tan\frac{\pi}{4}=1$，

即 $f'(2)=\frac{a}{2}+4-a-2=1$，得 $a=2$。

（2）$\because f'(x)=\frac{a}{x}+2x-(a+2)=\frac{2x^2-(a+2)x+a}{x}$

$\because x>0$, 可设 $h(x)=2x^2-(a+2)x+a=(x-1)(2x-a)$

令 $h(x)=0$ 得 $x=1$或$x=\frac{a}{2}$,

$\because f'(x)$在$(1,e)$上存在零点, $\therefore 1<\frac{a}{2}<e$,即$2<a<2e$

由此可知

x	$(1,\frac{a}{2})$	$\frac{a}{2}$	$(\frac{a}{2},e)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	减	极小	增

$\therefore f(x)$在$(1,\frac{a}{2})$ 单调递减；$(\frac{a}{2},e)$ 单调递增。

$\therefore f(x)_{\min}=f(\frac{a}{2})=a\ln\frac{a}{2}+(\frac{a}{2})^2-(a+2)\frac{a}{2}$

$=a\ln\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}-a$

设 $g(a)=a\ln\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}-a\ (2<a<2e)$

$g'(a)=\ln\frac{a}{2}-\frac{a}{2}$，$\because 1<\frac{a}{2}<e, \therefore \ln\frac{a}{2}<1, \therefore g'(a)<0$

$\therefore g(a)$在$(2,2e)$单调递减，$\therefore g(a)>g(2e)=2e\ln e-\frac{4e^2}{4}-2e=-e^2$

$\therefore$ 当$x\in(1,e)$时，$f(x)>-e^2$。

20. (本小题满分 15 分)

（I）由题意可得：$|AB|=\sqrt{2}, |MN|=2c=2,$

所以 $S_{四边形ABCD}=|AB|\times|CD|=2\sqrt{2}$；

（II）由题意可设 $l_1: x=ty+m(t\in R)$， $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}x=ty+m\\x^2+2y^2=2\end{cases}$ 得 $(t^2+2)y^2+2mty+m^2-2=0$

所以 $y_1+y_2=\dfrac{-2mt}{t^2+2},y_1\cdot y_2=\dfrac{m^2-2}{t^2+2}$

且 $\Delta=4m^2t^2-4(m^2-2)(t^2+2)>0$，即 $t^2-m^2+2>0$

$$\begin{aligned}|AB|&=\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}\\&=\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{2mt}{t^2+2}\right)^2-4\frac{m^2-2}{t^2+2}}\\&=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2+2}\cdot\sqrt{t^2-m^2+2}\end{aligned}$$

同理可得 $|\mathrm{CD}|=\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t^2+2}\cdot\sqrt{t^2-n^2+2}$

因为四边形 ABCD 为平行四边形，所以 $|AB|=|CD|$

即 $m^2=n^2$，因为 $m\neq n$，所以 $m=-n$,即 $m+n=0$

（III）不能为矩形。理由如下：

点 O 到直线 l_1，直线 l_2 的距离分别为 $\dfrac{|m|}{\sqrt{1+t^2}},\dfrac{|n|}{\sqrt{1+t^2}}$，由（II）知 $m=-n$

所以点 O 到直线 l_1，直线 l_2 的距离相等。根据椭圆的对称性，故而原点 O 是平行四边形 ABCD 的对称中心。

假设平行四边形是矩形，则 $|OA|=|OB|$，

那么 $\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$，则 $x_1^2+1-\dfrac{x_1^2}{2}=x_2^2+1-\dfrac{x_2^2}{2}$

所以 $x_1=x_2$。这时直线 $l_1\perp x$ 轴。

这与直线 l_1 的斜率存在相矛盾。所以假设不成立。

即平行四边形 ABCD 不能为矩形。

21. (本小题满分 14 分)

解：

（1）（4），（1，3），（2，2），（1，1，2），（1，1，1，1）

（2）欲使 k 最大，只须 a_i 最小

当 n 为偶数时 $a_1 = a_2 = ... = a_k = 2, k = \frac{n}{2}$

当 n 为奇数时 $a_1 = a_2 = ... = a_{k-1} = 2, a_k = 3, k = \frac{n-1}{2}$

（3）①当 n 为奇数时，不存在 $a_1, a_2, ..., a_k$ 均为偶数的正整数分拆，即 $f_n = 0$，满足 $f_n \le g_n$

②当 n 为偶数时，设 $(a_1, a_2, ..., a_k)$ 为满足 $a_1, a_2, ..., a_k$ 均为偶数的一个确定的“正整数分拆”

则他至少对应了（1，1，……，1）和 $(1,1,...,1,a_1 - 1, a_2 - 1, ..., a_k - 1)$ 这两种各数均为奇数的分拆，所以 $f_n \le g_n$

③当 $n = 2$ 时，a_i 均为偶数的“正整数分拆”只有：(2)

a_i 均为奇数的“正整数分拆”只有：$(1,1)$　　$f_2 = g_2$

当 $n = 4$ 时，a_i 均为偶数的“正整数分拆”只有：$(4),(2,2)$

a_i 均为奇数的“正整数分拆”只有：$(1,1,1,1),(1,3)$　　$f_4 = g_4$

当 $n \ge 6$ 时，对于每一种 a_i 均为偶数的“正整数分拆”，除了各项不全为 1 的奇数分拆之外至少多出一个各项均为 1 的“正整数分拆”$(1,1,\cdots 1)$，故 $f_n < g_n$，

综上，使得 $f_n \le g_n$ 中等号成立的 n 为 $2, 4$

关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。
北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯（ID：bj-gaokao）
扫码关注获取更多