2024 北京陈经纶中学高三 2 月月考

数　　学

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 4 分，满分 40 分）

1．若集合 $A=\{x\,|\,3-2x<5\}$，$B=\{x\,|\,x^2+4x\geq 0\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A．$\{x\,|\,x<-1$ 或 $x\geq 0\}$　　　　B．$\{x\,|\,-1<x\leq 0\}$

C．$\{x\,|\,x\leq -4$ 或 $x>1\}$　　　　D．$\{x\,|\,x\leq -4$ 或 $x>-1\}$

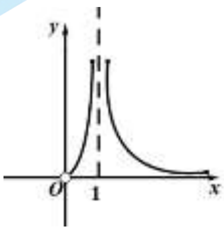
2. 已知复数 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}$（其中 i 为虚数单位），则复数 z 的点的坐标所在象限为（　）

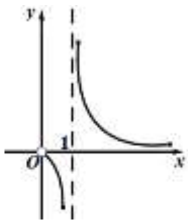
A．一　　　B．二　　　C．三　　　D．四

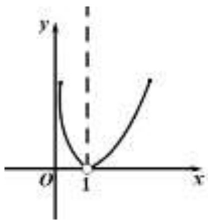
3. 已知 $\vec{a}$ 为单位向量，且 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，则 $|\vec{b}|=$（　）

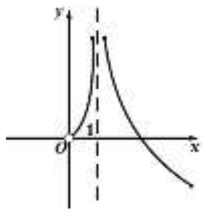
A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. 1　　D. 2

4. 已知函数 $f(x)=\dfrac{-2}{\ln(x+1)-x}$,则函数 $y=f(x-1)$ 的图象大致为（　）

A. 

B. 

C. 

D. 

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F，离心率为 $\sqrt{2}$.若经过 F 和 $P(0,4)$ 两点的直线平行于双曲线的一条渐近线，则双曲线的方程为（　）

A. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$　　C. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{8}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{4}=1$

6．在△ABC 中，$2a\cos A=b\cos C+c\cos B$，则 $\angle A=$（　　）

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　　C．$\dfrac{\pi}{2}$　　　D．$\dfrac{2\pi}{3}$

7．在直角坐标系 xOy 内，圆 $C:(x-2)^2+(y-2)^2=1$，若直线 $l:x+y+m=0$ 绕原点 O 顺时针旋转 90° 后与圆 C 存在公共点，则实数 m 的取值范围是（　）

A．$\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$　　　　B．$\left[-4-\sqrt{2},-4+\sqrt{2}\right]$

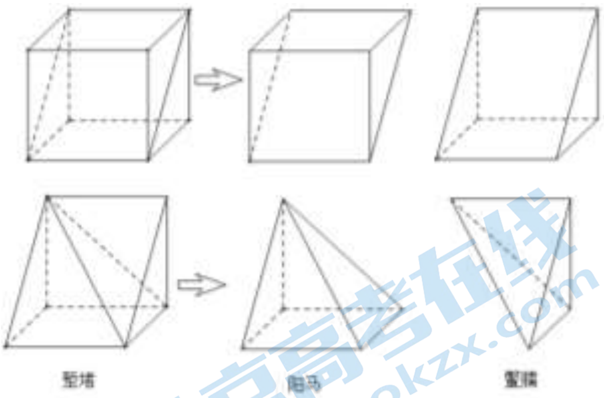
C．$\left[-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}\right]$　　　　D．$\left[-2+\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right]$

8．若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，则“$a_3\geq 1$”是“$a_1+a_5\geq 2$”的（　　）

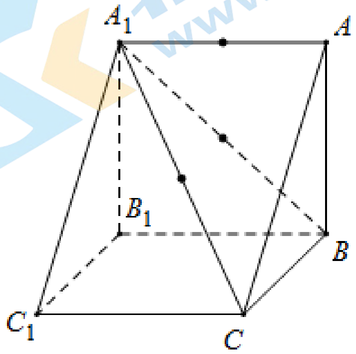
A．充要条件　　　　B．既不充分也不必要条件

C．充分不必要条件　　　　　　　　D．必要不充分条件

9. 刘徽注《九章算术•商功》“斜解立方，得两堑堵.斜解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑.阳马居二，鳖臑居一，不易之率也.合两鳖臑三而一，验之以棊，其形露矣.”如图一解释了由一个长方体得到“堑堵”、“阳马”、“鳖臑”的过程.堑堵是底面为直角三角形的直棱柱；阳马是一条侧棱垂直于底面且底面为矩形的四棱锥；鳖臑是四个面都为直角三角形的四面体.



图一



图二

在如图二所示由正方体得到的堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，当点 P 在下列三个位置：A_1A 中点、A_1B 中点、A_1C 中点时，分别形成的四面体 P - ABC 中，鳖臑有（　）

A．3 个　　　B．2 个　　　C．1 个　　　D．0 个

10. 对于定义域为 R 的函数 $f(x)$，若满足① $f(0)=0$；②当 $x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq0$ 时,都有 $xf'(x)>0$；③当 $x_1\neq x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$ 时，$x_1+x_2<0$，则称 $f(x)$ 为“偏对称函数”．现给出四个函数：

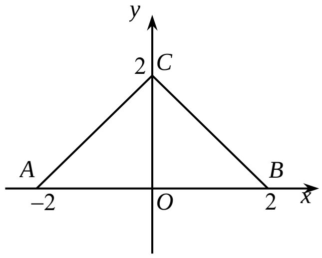
$g(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)x^2\,(x\neq0)\\ 0\,(x=0)\end{cases}$；$h(x)=\begin{cases}\ln(-x+1)\,(x\leq0)\\ 2x(x>0)\end{cases}$；$\phi(x)=-x^3+\dfrac{3}{2}x^2$；$\varphi(x)=e^x-x-1$．则其中是“偏对称函数”的函数个数为（　）　A．4　　B．3　　C．2　　D．1

二、填空题（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）

11. 设一组数据 $X:3,4,5,5,6,7,9,9$，则数据 $2X-1$ 的平均值为__________，30%分位数为________.

12. 函数 $y=\dfrac{1}{x-1}-1+x(x\geq3)$ 的最小值为__________.

13. 如图，函数 $f(x)$ 的图象为折线 ACB，则不等式 $f(x)>\tan\dfrac{\pi}{4}x$ 的解集是__________.



14. 已知 A，B 是抛物线 $y^2=8x$ 上两点，若线段 AB 的中点到抛物线的准线的距离为 5，则直线 AB 的方程可能是____.（写出一个符合题意的方程）

15. 定义平面向量的一种运算 $\vec{a}\odot\vec{b}=|\vec{a}+\vec{b}|\times|\vec{a}-\vec{b}|\times\sin<\vec{a},\vec{b}>$，其中 $<\vec{a},\vec{b}>$ 是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，给出下列命题：①若 $<\vec{a},\vec{b}>=90°$，则 $\vec{a}\odot\vec{b}=\vec{a}^2+\vec{b}^2$；②若 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，则 $(\vec{a}+\vec{b})\odot(\vec{a}-\vec{b})=4\vec{a}\cdot\vec{b}$；③若 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，则 $\vec{a}\odot\vec{b}\leq2|\vec{a}|^2$；④若 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(-2,2)$，则 $(\vec{a}+\vec{b})\odot\vec{b}=\sqrt{10}$．其中真命题的序号是____.

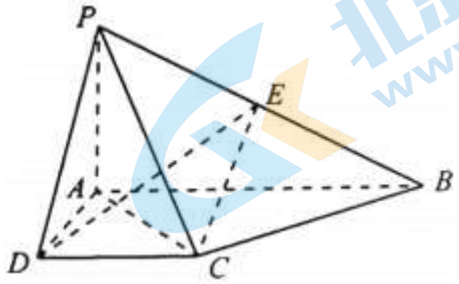
三、解答题（本题共 6 小题，满分 85 分）

16.（本小题满分 13 分）

如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中点，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\parallel CD$，$AB\perp AD$，$AB=4$，$PA=AD=CD=2$，点 E 为 PB 的中点.

（Ⅰ）求证：平面 $PBC\perp$ 平面 PAC；

（Ⅱ）求二面角 $E-CD-A$ 的余弦值.



17.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f\left(x\right)=a\sin\omega x\cos\omega x$（$a>0$，$\omega>0$）. 从下列四个条件中选择两个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在且唯一确定.

（Ⅰ）求 $f\left(x\right)$ 的解析式；

（Ⅱ）设 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-2\cos^2\omega x+1$，求函数 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 上的单调递增区间.

条件①：$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$　　条件②：$f(x)$ 为偶函数

条件③：$f(x)$ 的最大值为 1　条件④：$f(x)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$

18.（本小题满分 14 分）

乒乓球运动在中国风靡，成为了中国的国球体育项目. 某校拟从 5 名优秀乒乓球爱好者中抽选人员分批次参加社区活动. 活动共分 3 个批次进行，每批次活动需要同时派送 2 名选手，且每次派送选手均从 5 人中随机抽选. 已知这 5 名选手中，2 人有比赛经验，3 人没有比赛经验.

（Ⅰ）求 5 名选手中的"1 号选手"，在这 3 批次活动中有且只有一次被抽选到的概率；

（Ⅱ）第二次抽选时，选到没有比赛经验的选手的人数最有可能是几人？说明理由；

（Ⅲ）现在需要 2 名选手完成某项加赛，比赛方式为 2 名选手依次参赛，如果前一位选手不能获胜，则再派另一位选手. 若有 A、B 两位选手可派，他们各自完成任务的概率分别为 P_A、P_B，且 $P_A>P_B$. 假设各人能否完成任务相互独立，则当派出选手的人员数目的数学期望达到最小时，直接写出 A、B 两位选手的派遣顺序.

19.（本小题满分 15 分）

已知函数 $f\left(x\right)=a\ln\left(x-1\right)+\left(a+2\right)x+1$， $a\neq 0$.

（Ⅰ）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（Ⅱ）设 $g\left(x\right)=f\left(x+1\right)+2\sin x-4x-4$， $x\in(0,\frac{3}{2}\pi]$.

求证：当 $a=1$ 时， $y=g\left(x\right)$ 有且仅有两个不同的零点.

20.（本小题满分 15 分）

已知直线 $y=1$ 与椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相切，定点 $P(4,0)$ 和原点 O 的中点为椭圆右顶点.

（Ⅰ）求椭圆方程及离心率；

（Ⅱ）已知椭圆上第一象限内动点 M 与第三象限内动点 N ，定点 $T(1,0)$ ，直线 PM,PN 交 $y=1$ 于 A,B 两点，若 $\angle OPN=\angle PAB$，求证： M,N,T 三点共线.

参考答案

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 4 分，满分 40 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	B	D	A	B	B	A	C	B	C

10.【答案】C

【分析】根据"偏对称函数"的定义，逐项判断四个函数是否满足条件①②③，对于条件②可转化为函数在区间$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上的单调性进行求解，根据奇偶性可判断函数$g(x)$的单调性，根据分段函数的性质及基本初等函数的单调性可判断$h(x)$的单调性，利用导数判断函数$\phi(x)$及函数$\varphi(x)$是否满足条件②即可，对于条件③，通过构造函数，利用导数求解函数的单调性及最值，即可判断$h(x),\varphi(x)$是否满足条件③.

【详解】解：由题可知，$g(0)=0,h(0)=0,\phi(0)=0,\varphi(0)=0$，故函数$g(x),h(x),\phi(x),\varphi(x)$都满足条件①，

对于条件②等价于函数$f(x)$在区间$(-\infty,0)$上单调递减，在区间$(0,+\infty)$上单调递增，

当$x\neq 0$时，$g(x)=\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)x^2$，则$g(-x)=\left(\dfrac{1}{2^{-x}-1}+\dfrac{1}{2}\right)(-x)^2=-g(x)$，

故$g(x)$是奇函数，则$g(x)$在区间$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上单调性相同，故$g(x)$不满足条件②，

因为$h(x)=\begin{cases}\ln(-x+1)(x\le 0)\\ 2x(x>0)\end{cases}$，故$h(x)$在区间$(-\infty,0)$单调递减，在区间$(0,+\infty)$上单调递增，所以$h(x)$满足条件②，

因为$\phi'(x)=-3x^2+3x,x\phi'(x)=-3x^3+3x^2=-3x^2(x-1)$，当$x>1$时，$x\phi'(x)<0$，所以$\phi(x)$不满足条件②，

因为$\varphi'(x)=e^x-1,x\varphi'(x)=x(e^x-1)>0$，所以$\varphi(x)$满足条件②，

对于$h(x)$，不妨设$x_1\le 0<x_2$，则$\ln(-x_1+1)=2x_2$，$2(x_1+x_2)=\ln(-x_1+1)+2x_1$，

令$H(x)=\ln(-x+1)+2x(x<0)$，则$H'(x)=\dfrac{1}{x-1}+2=\dfrac{2x-1}{x-1}>0$，

故$H(x)$在区间$(-\infty,0)$上单调递增，故$H(x)<H(0)=0$，

所以$2(x_1+x_2)=\ln(-x_1+1)+2x_1<0$，所以$h(x)$满足③，

对于$\varphi(x)$，$\varphi'(x)=e^x-1$，$\varphi(x)$在$(-\infty,0)$上递减，$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上递增，

令$F(x)=\varphi(x)-\varphi(-x)=e^x-e^{-x}-2x$，则$F'(x)=e^x+\dfrac{1}{e^x}-2\ge 0$，

所以$F(x)$在定义域R上单调递增，故$F(x)\ge F(0)=0,\varphi(x)>\varphi(-x)$，

不妨设$x_1<0<x_2$，则$\varphi(x_1)=\varphi(x_2)>\varphi(-x_2)$，

所以$x_1<-x_2$，即$x_1+x_2<0$，所以$\varphi(x)$满足③，

所以$h(x),\varphi(x)$是"偏对称函数".

故选：C.

二、填空题（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）

11. 11　5

12. $\dfrac{5}{2}$

13. $\{x\,|\,-2<x<1\}$

14. 【答案】$x=3$（答案不唯一）

【分析】由题可得线段 AB 的中点为 $M\left(3,y_0\right)$，结合条件分类讨论可得.

【详解】由题知，抛物线 $y^2=8x$ 的准线为 l： $x=-2$，

因为线段 AB 的中点到抛物线的准线的距离为 5，

所以线段 AB 的中点为 $M\left(3,y_0\right)$.

当 AB 斜率不存在时， $x=3$ 符合题意；

当直线 AB 斜率存在且不为 0 时，设直线 AB 的方程为 $x=ky+b\left(k\neq0\right)$，代入 $y^2=8x$，

整理得 $y^2-8ky-8b=0$，

所以 $8k=2y_0=\dfrac{2\left(3-b\right)}{k}$，

所以 $b=3-4k^2$，

所以直线 AB 的方程为 $x=ky+3-4k^2\left(k\neq0\right)$，

令 $k=1$，得直线 AB 的方程为 $x=y-1$，即 $x-y+1=0$.

故答案为： $x=3$（答案不唯一）.

15. 【答案】①③

【解析】根据已知中的新定义，$\vec{a}\odot\vec{b}=|\vec{a}+\vec{b}|\times|\vec{a}-\vec{b}|\times\sin<\vec{a}$， $\vec{b}>$，其中 $<\vec{a}$， $\vec{b}>$ 是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，结合平面向量数量积的运算、平面向量数量积的坐标表示以及向量夹角公式，逐一判断四个命题的真假可得答案.

【详解】$\because$ $\vec{a}\odot\vec{b}=|\vec{a}+\vec{b}|\times|\vec{a}-\vec{b}|\times\sin<\vec{a}$， $\vec{b}>$，其中 $<\vec{a}$， $\vec{b}>$ 是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，

若 $<\vec{a}$， $\vec{b}>=90^\circ$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$， $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

则 $\vec{a}\odot\vec{b}=|\vec{a}+\vec{b}|\times|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}^2+\vec{b}^2$，故正确；

②$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，则 $(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$， $(\vec{a}+\vec{b}),(\vec{a}-\vec{b})$ 夹角为 90°，

则 $(\vec{a}+\vec{b})\odot(\vec{a}-\vec{b})=\left|(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b})\right|\times\left|(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})\right|\sin90^\circ=4|\vec{a}||\vec{b}|\neq4\vec{a}\cdot\vec{b}$，故错误；

③若 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，则 $\vec{a}\odot\vec{b}\leqslant\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\times\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\vec{a}^2+\vec{b}^2=2|\vec{a}|^2$，故正确；

④若 $\vec{a}=(1,2)$， $\vec{b}=(-2,2)$，则 $\vec{a}+\vec{b}=(-1,4)$， $\vec{a}+2\vec{b}=\left(-3,6\right)$，

$\cos\left\langle\vec{a}+\vec{b},\vec{b}\right\rangle=\dfrac{10}{2\sqrt{2}\times\sqrt{17}}=\dfrac{5}{\sqrt{34}}$， $\sin\left\langle\vec{a}+\vec{b},\vec{b}\right\rangle=\dfrac{3}{\sqrt{34}}$

则 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\odot\vec{b}=\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|\times\left|\vec{a}\right|\times\sin<\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{b}>=3\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\dfrac{3}{\sqrt{34}}=\dfrac{45}{\sqrt{34}}\neq\sqrt{10}$，故错误；

故真命题的序号为：①③

故答案为：①③

【点睛】本题以向量运算的新定义为载体，考查平面向量数量积的运算、平面向量数量积的坐标表示以及向量夹角公式，难度为中档.

三、解答题（本题共 6 小题，满分 85 分）

16.解：（I）取 AB 的中点 F，连接 CF，所以 $AF=CD$，

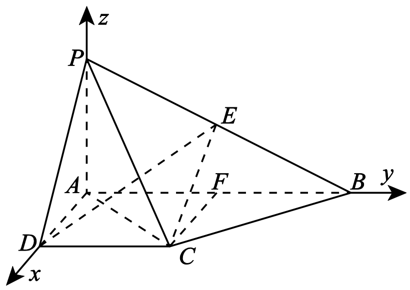
又因为 $AF\,//\,CD$，所以四边形 $AFCD$ 是平行四边形.

因为 $AB\perp AD$，$AD=CD$，所以四边形 $AFCD$ 是正方形，

则 $AB\perp CF$，$CF=AD=2$，所以 $AC=BC=2\sqrt{2}$，

得到 $AC^2+BC^2=AB^2$，

所以 $BC\perp AC$． ……………1 分



因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp BC$， ……………2 分

因为 $PA\cap AC=A$，

所以 $BC\perp$ 平面 PAC． ……………3 分

因为 $BC\subset$ 平面 PBC， ……………4 分

平面 $PBC\perp$ 平面 PAC． ……………5 分

（II）因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp AD$，$PA\perp AB$，则 PA,AD,AB 两两垂直，

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$ ……………6 分

则 $A(0,0,0)$，$P(0,0,2)$，$B(0,4,0)$，$C(2,2,0)$，$D(2,0,0)$，$E(0,2,1)$，

所以 $\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{CE}=(-2,0,1)$．

设平面 CDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}2y=0,\\ -2x+z=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y=0,\\ z=2x,\end{cases}$ ……………8 分

令 $x=1$，则 $z=2$，

所以平面 CDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,2)$， ……………9 分

又因为平面 ACD 的法向量 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$， ……………10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$， ……………12 分

由已知，二面角 $E-CD-A$ 为锐角，

所以二面角 $E-CD-A$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ……………13 分

17. 解：（Ⅰ） $f\left(x\right)=a\sin\omega x\cos\omega x=\dfrac{a}{2}\sin 2\omega x$.

选择条件①④：

因为函数 $f(x)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $\dfrac{2\pi}{2\omega}=\pi$，即 $\omega=1$. 所以 $f\left(x\right)=\dfrac{a}{2}\sin 2x$.

因为 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$，所以 $\dfrac{a}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}=1$，即 $a=2$. 所以 $f\left(x\right)=\sin 2x$. ………7 分

选择条件③④：

因为函数 $f(x)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $\dfrac{2\pi}{2\omega}=\pi$，即 $\omega=1$. 所以 $f\left(x\right)=\dfrac{a}{2}\sin 2x$.

因为函数 $f(x)$ 的最大值为 1，所以 $\dfrac{a}{2}=1$，即 $a=2$. 所以 $f\left(x\right)=\sin 2x$ ……7 分

（Ⅱ） $g\left(x\right)=f\left(x\right)-2\cos^2\omega x+1=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

因为 $y=\sin x$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2k\pi)\ (k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增，

所以 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi<2x-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$.

所以 $-\dfrac{\pi}{8}+k\pi<x<\dfrac{3\pi}{8}+k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$.

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调递增区间为 $(0,\dfrac{3\pi}{8})$ 和 $\left(\dfrac{7\pi}{8},\pi\right)$. ………13 分

18.【答案】(1) $\dfrac{54}{125}$

(2)最有可能是 1 人，理由见解析

(3)按照先 A 后 B 的顺序所需人数期望最小.

【分析】(1) 5 名选手中的"1 号选手"在每轮抽取中被抽取到的概率为 $\frac{C_4^1}{C_5^2}=\frac{2}{5}$，然后用独立事件概率公式和事件和公式求解即可；

(2) 用期望或概率判断即可；

(3) 分别求出按先 A 后 B 的顺序和先 B 后 A 完成任务所需人员数目的数学期望，比较即可得出答案.

【详解】(1) 5 名选手中的"1 号选手"在每轮抽取中被抽取到的概率为 $\frac{C_4^1}{C_5^2}=\frac{2}{5}$，

则三次抽取中，"1 号选手"恰有一次被抽取到的概率为 $P=C_3^1\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{54}{125}$.

【4 分】

(2) 第二次抽取到的没有比赛经验的选手人数最有可能是 1 人.

设 ξ 表示第二次抽取到的无比赛经验的选手人数，可能的取值有 0，1，2，

则有：$P(\xi=0)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$，$P(\xi=1)=\frac{C_2^1\cdot C_3^1}{C_5^2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，

$P(\xi=2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$，

(法一) 因为 $P(\xi=1)>P(\xi=2)>P(\xi=0)$，

故第二次抽取到的无比赛经验的选手人数最有可能是 1 人.

(法二) $\because E(\xi)=0+\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=1.2$，

$\therefore$ 第二次抽取到的无比赛经验的选手人数最有可能是 1 人. 【12 分】

(3) 按照先 A 后 B 的顺序所需人数期望最小.

由题意：$0<p_B<p_A<1$，

设 X 表示先 A 后 B 完成任务所需人员数目，则

X	1	2
P	p_A	$1-p_A$

$E(X)=p_A+2(1-p_A)=2-p_A$，

设 Y 表示先 B 后 A 完成任务所需人员数目，则

Y	1	2
P	p_B	$1-p_B$

$E(Y)=p_B+2(1-p_B)=2-p_B$，

$\because E(Y)-E(X)=p_A-p_B>0$，

∴故按照先 A 后 B 的顺序所需人数期望最小.　　　　　　　　【14 分】

19【详解】(1) $f'(x)=\dfrac{a}{x-1}+a+2=\dfrac{(a+2)(x-1)+a}{x-1}=\dfrac{(a+2)x-2}{x-1},x>1$.

当 $a=-2$ 时，$f'(x)=-\dfrac{2}{x-1}<0,\therefore f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

当 $-2<a<0$ 时，在 $\left(1,\dfrac{2}{a+2}\right)$ 上，有 $f'(x)<0$，在 $\left(\dfrac{2}{a+2},+\infty\right)$ 上，有 $f'(x)>0$，

故 $f(x)$ 在 $\left(1,\dfrac{2}{a+2}\right)$ 上单调递减，$\left(\dfrac{2}{a+2},+\infty\right)$ 上单调递增.

当 $a>0$ 时，$(a+2)x>2,(a+2)x-2>0,\therefore f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

当 $a<-2$ 时，$a+2<0,(a+2)x-2<0,\therefore f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

综上所述，当 $-2<a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(1,\dfrac{2}{a+2}\right)$ 上单调递减，$\left(\dfrac{2}{a+2},+\infty\right)$ 上单调递增.

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

当 $a\le -2$ 时，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.　　　　【6 分】

(2) $a=1$ 时，$g(x)=\ln x+2\sin x-x(x>0)$，

则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}+2\cos x-1$.

令 $m(x)=g'(x),m'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-2\sin x$.

i. $x\in(0,1]$ 时，$g'(x)>0$ 恒成立，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增.

又 $g(1)=2\sin 1-1>0$，

$g(\mathrm{e}^{-2})=-2+2\sin\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-2}<0$

$\therefore$ 存在一个零点 $x_1,x_1\in(0,1]$，使 $g(x_1)=0$.

ii. $x\in(1,\pi]$，

$m'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-2\sin x<0$ 恒成立，

$\therefore m(x)$ 在 $(1,\pi]$ 上单调递减.

又 $m(\pi)=\dfrac{1}{\pi}-2-1<0$，

$m(1)=2\cos 1>0$.

存在零点 x_0，使 $m(x_0)=0$.

$\therefore x\in(1,x_0), g'(x)>0$，

$x\in(x_0,\pi), g'(x)<0$.

$\therefore g(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递增，(x_0,π) 上单调递减.

又 $g(1)>0, \therefore g(x_0)>0$.

$g(\pi)=\ln\pi-\pi<0$，

$\therefore$ 存在一个零点 $x_2, x_2\in(x_0,\pi)$，使 $g(x_2)=0$.

iii. $x\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$，

$\therefore g'(x)=\dfrac{1}{x}-1+2\cos x<0$ 恒成立.

$\therefore g(x)$ 在 $\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 单调递减.

$\therefore g(x)<g(\pi)=\ln\pi-\pi<0$ 恒成立.

$\therefore g(x)$ 在 $\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 没有零点.

综上所述，$h(x)$ 在 $(0,\dfrac{3\pi}{2}]$ 只有两个零点.　　　　【15 分】

20.（Ⅰ）依题意，有：$b=1$，$a=2$，$a^2=b^2+c^2$，解得 $c=\sqrt{3}$，

故椭圆的标准方程为 $E:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　【5 分】

（Ⅱ）法一：倾斜角互补

依题意，直线 MN 与 x 轴不重合，设直线 $MN: x=my+t$，$M(x_1,y_1), N(x_2,y_2)$

故 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ x=my+t\end{cases}\Rightarrow (m^2+4)y^2+2mty+t^2-4=0$

$\Delta=(2mt)^2-4(m^2+4)(t^2-4)=16m^2-16t^2+64>0$

$y_1+y_2=-\dfrac{2mt}{m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{t^2-4}{m^2+4}$　　　　【8 分】

因为 $\angle OPN=\angle PAB$，所以 $\angle OPN=\angle OPM$，即 $k_{PM}+k_{PN}=0$　　　　【9 分】

则 $0=k_{PM}+k_{PN}=\dfrac{y_1}{x_1-4}+\dfrac{y_2}{x_2-4}=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1-4(y_1+y_2)}{(x_1-4)(x_2-4)}$　　　　【10 分】

即 $x_1y_2+x_2y_1-4(y_1+y_2)=2my_1y_2+(t-4)(y_1+y_2)=0$　　　　【12 分】

则 $2m(t^2-4)-2mt(t-4)=0$，解得 $t=1$ 或 $m=0$　　　　【13 分】

当 $m=0$ 时，$MN:x=t$ 无法使 M,N 分别位于一、三象限，不合题意，舍去；

故 $t=1$，$MN:x=my+1$，过定点 $T(1,0)$，则 M,N,T 三点共线.　　【15 分】

法二：角度化坐标

依题意，直线 MN 与 x 轴不垂直，设直线 $MN:y=kx+m$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$

故 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=kx+m\end{cases} \Rightarrow (4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$

$\Delta=(8km)^2-4(4k^2+1)(4m^2-4)=16(4k^2-m^2+1)>0$

$x_1+x_2=-\dfrac{8km}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{4k^2+1}$　　【8 分】

直线 $PM:y=\dfrac{y_1}{x_1-4}(x-4)$，取 $y=1$，有 $A(\dfrac{x_1+4y_1-4}{y_1},1)$　　【9 分】

因为 $\angle OPN=\angle PAB$，所以 $\tan\angle OPN=\tan\angle PAB$

即 $\dfrac{-y_2}{4-x_2}=\dfrac{1}{4-\dfrac{x_1+4y_1-4}{y_1}}$，也即 $4y_2-\dfrac{x_1y_2+4y_1y_2-4y_2}{y_1}=x_2-4$　　【11 分】

可化简为 $0=x_1y_2+x_2y_1-4(y_1+y_2)=2kx_1x_2+(m-4k)(x_1+x_2)-8m$

则 $2k(4m^2-4)-8km(m-4k)-8m(4k^2+1)=0$　　【13 分】

解得 $m=-k$，此时 $MN:y=k(x-1)$，过定点 $T(1,0)$，则 M,N,T 三点共线.【15 分】

【评标关键点】

第一问 5 分：方程 4 分，离心率 1 分；

第二问 10 分：

韦达部分 3 分—纵 $MN:y=kx+m$，$x_1+x_2=-\dfrac{8km}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{4k^2+1}$

　　横 $MN:x=my+t$，$y_1+y_2=-\dfrac{2mt}{m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{t^2-4}{m^2+4}$（判别式不写要扣分，不算不扣）

几何转化 1 分—倾斜角互补或正切值相等

韦达式推导 3 分—纵 $x_1y_2+x_2y_1-4(y_1+y_2)=2kx_1x_2+(m-4k)(x_1+x_2)-8m=0$

　　横 $x_1y_2+x_2y_1-4(y_1+y_2)=2my_1y_2+(t-4)(y_1+y_2)=0$

代入运算与结果推导 3 分

纵：$2k(4m^2-4)-8km(m-4k)-8m(4k^2+1)=0$，解得 $m=-k$，过定点 $T(1,0)$

横：$2m(t^2-4)-2mt(t-4)=0$，解得 $t=1$ 或 $m=0$，舍 $m=0$，过定点 $T(1,0)$

三点共线运算（1 分，等价过定点）：欲证 M,N,T 三点共线，即证 $\overrightarrow{TM},\overrightarrow{TN}$ 共线，即证

$x_1y_2-x_2y_1+y_1-y_2=0$

纵 $(x_1-x_2)(m+k)=0$ 与过定点 $T(1,0)$ 等价；横 $(y_2-y_1)(t-1)=0$ 与过定点 $T(1,0)$ 等价

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！