参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）B　（2）D　（3）C　（4）C　（5）D
（6）A　（7）B　（8）A　（9）B　（10）C

二、填空题(（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）1　　（12）2；$\frac{3}{5}$　　（13）e^x+1 (答案不唯一)

（14）$\frac{3\pi}{4}$　　（15）①④⑤

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）

方法一：（使用二倍角公式）

在$\triangle ABC$中，因为$\cos 2B=-\frac{1}{2}$，所以$1-2\sin^2 B=-\frac{1}{2}$.

因为$0<B<\pi$，$\sin B>0$，所以$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

得$\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{8}{\sin C}$，解得$\sin C=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

方法二：（使用特殊角）

在$\triangle ABC$中，因为$c>b$，所以$C>B$. 所以$0<B<\frac{\pi}{2}$，　$0<2B<\pi$.

因为$\cos 2B=-\frac{1}{2}$，所以$2B=\frac{2\pi}{3}$, $B=\frac{\pi}{3}$，所以$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（以下同方法一）

（Ⅱ） 方法一： (使用角 C 余弦定理)

因为$\sin^2 C+\cos^2 C=1$，C为钝角， 所以$\cos C=-\sqrt{1-(\frac{4\sqrt{3}}{7})^2}=-\frac{1}{7}$.

由 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$, 得 $8^2=a^2+7^2-2a\cdot 7\cdot(-\frac{1}{7})$.

整理得 $a^2+2a-15=0$， 解得 $a=3$或$a=-5$（舍）， 所以$a=3$.

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=3+7+8=18$.

方法二：(使用角 B 余弦定理)

在$\triangle ABC$中，因为$\cos 2B=-\frac{1}{2}$，所以$2\cos^2 B-1=-\frac{1}{2}$，　$\cos B=\frac{1}{2}$.

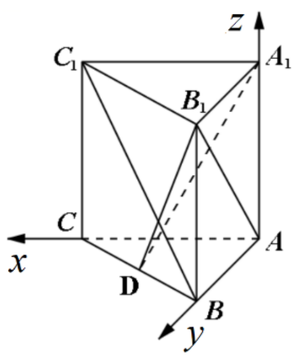
由 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$, 得 $7^2=a^2+8^2-2a\cdot 8\cdot\frac{1}{2}$.

整理得 $a^2-8a+15=0$， 解得 $a=5$或$a=3$.

当 $a=3$ 时， $\cos C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}=\frac{7^2+3^2-8^2}{2ab}<0$. 角 C 为钝角.

当 $a=5$ 时， $\cos C=\frac{7^2+5^2-8^2}{2ab}>0$. $\cos A=\frac{7^2+8^2-5^2}{2ab}>0$不符合题意.

所以 $a=3$， $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=3+7+8=18$.



（17）（本小题 14 分）

选条件②： $BC=2\sqrt{2}$.

（Ⅰ）证明：

在$\triangle ABC$中，$AB=AC=2, BC=2\sqrt{2}$，

$\therefore BC^2=AB^2+AC^2$.

$\therefore \angle BAC=90^\circ$，即$AB\perp AC$.

在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧棱$AA_1\perp$底面ABC，

$\therefore AA_1\perp AB$，$AA_1\perp AC$.

以点A为原点，分别以AC，AB，AA_1为x，y，z轴建立空间直角坐标系，则

$B(0,2,0)$，$C_1(2,0,2)$，$B_1(0,2,2)$.

$\therefore \overrightarrow{AB_1}=(0,2,2)$，$\overrightarrow{BC_1}=(2,-2,2)$.

$\therefore \overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0\cdot 2+2\cdot(-2)+2\cdot 2=0$.

$\therefore AB_1\perp BC_1$.

（Ⅱ）$B_1(0,2,2)$，$C_1(2,0,2)$，$A_1(0,0,2)$，$D(1,1,0)$，$B(0,2,0)$

$\therefore \overrightarrow{A_1B_1}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{A_1D}=(1,1,-2)$，$\overrightarrow{BC_1}=(2,-2,2)$.

设平面A_1B_1D的法向量为$\vec{n}=(x, y, z)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=2y=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=x+y-2z=0.\end{cases}$

令$z=1$得，$\vec{n}=(2,0,1)$.

直线BC_1与平面A_1B_1D所成角θ的正弦值为:

$$\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{BC_1},\vec{n}>\right|=\frac{|\overrightarrow{BC_1}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{BC_1}|}=\frac{6}{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{5}.$$

若选择条件①：$B_1D\perp BC_1$.

（Ⅰ）证明：连结AD. 在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$CC_1\perp$底面ABC，$AD\subset$面ABC，

$\therefore CC_1\perp AD$.

在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D为BC中点，

$\therefore BC\perp AD$.

又$BC\cap CC_1=C$，

$\therefore AD\perp$平面BB_1C_1C.

又$BC_1\subset$平面BB_1C_1C，

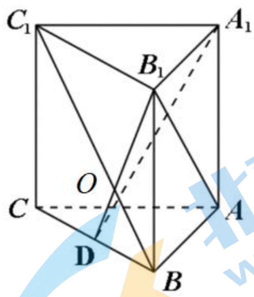
$\therefore AD\perp BC_1$.

由①$B_1D\perp BC_1$，$AD\cap B_1D=D$，

$\therefore BC_1\perp$平面AB_1D.

$\because AB_1\subset$平面AB_1D，

$\therefore AB_1\perp BC_1$.



（Ⅱ）

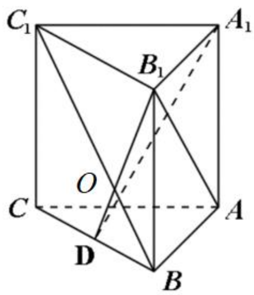
（方法一）在Rt$\triangle BB_1D$中，由$B_1D\perp BC_1$，得$B_1B^2=BO\cdot BC_1$

又$BO=\frac{1}{3}BC_1$，所以$BC_1=2\sqrt{3}$，$BC=B_1C_1=2\sqrt{2}$.

（方法二）由$B_1D\perp BC_1$，得$\angle B_1DB=\angle C_1BB_1$，

$\triangle DBB_1\backsim\triangle BB_1C_1$，得$\frac{DB}{BB_1}=\frac{BB_1}{B_1C_1}$.

又$DB=\frac{1}{2}B_1C_1$，所以$BC_1=2\sqrt{3}$，$BC=B_1C_1=2\sqrt{2}$.



（方法三）设$B_1D\cap BC_1=O$，$BD=x$，

$\therefore OB=\frac{1}{3}BC_1=\frac{1}{3}\sqrt{(2x)^2+2^2}$，$OB_1=\frac{2}{3}B_1D=\frac{2}{3}\sqrt{x^2+2^2}$.

在Rt$\triangle OBB_1$中，$B_1B^2=OB^2+OB_1^2$， $2^2=\frac{1}{9}(4x^2+2^2)+\frac{4}{9}(x^2+2^2)$.

解得 $x=\sqrt{2}$.$\therefore BC=2\sqrt{2}$.

（以下同选择条件②）

（18）（本小题 13 分）

（Ⅰ）记事件 A 为"从该校高一学生中随机抽取1人，该生平均每天的睡眠时间不少于8小时"，样本中高一学生人数为： $3+16+14+7=40$ ，其中平均每天的睡眠时间不少于8小时的人数为37 ，则：$P(A)=\frac{37}{40}$.

（Ⅱ）从高二年级学生中随机抽取 1 人，其平均每天的睡眠时间为8小时或8.5小时的概率为 $P=\frac{16+14}{40}=\frac{3}{4}$.

X 的可能取值为 $0,1,2$.

$P(X=0)=C_2^0(\frac{3}{4})^0(\frac{1}{4})^2=\frac{1}{16}$; $P(X=1)=C_2^1(\frac{3}{4})^1(\frac{1}{4})^1=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$;

$P(X=2)=C_2^3(\frac{3}{4})^2(\frac{1}{4})^0=\frac{9}{16}$.

X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$

$E(X)=0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{9}{16}=\frac{3}{2}$.

（Ⅲ） $D(Y_1)=D(Y_2)$.

（19）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ） $f'(x)=\frac{(\sin x)'x-(\sin x)x'}{x^2}=\frac{\cos x\cdot x-\sin x}{x^2}$.

所以 $f'(\pi)=-\frac{1}{\pi}$. 斜率为 $k=-\frac{1}{\pi}$.

$f(\pi)=\frac{\sin\pi}{\pi}=0$， 切点为 $(\pi,0)$.

所以， $f(x)$ 在点 $x=\pi$ 处切线的方程为 $y=-\frac{1}{\pi}x+1$.

（Ⅱ）当 $x\in(0，\pi]$ 时， $f(x)=\frac{\sin x}{x}$， $f'(x)=\frac{\cos x\cdot x-\sin x}{x^2}$.

令 $g(x)=\cos x\cdot x-\sin x$ ，

则 $g'(x)=(\cos x)'\cdot x+\cos x\cdot x'-\cos x=-\sin x\cdot x$.

当 $x\in(0，\pi)$ 时， $g'(x)<0$ ，

所以 $g(x)$ 在 $(0，\pi)$ 单调递减.

所以 $g(x)<g(0)=0$.

所以 $f'(x)<0$. 函数 $f(x)$ 在 $(0，\pi)$ 上单调递减.

函数 $f(x)$ 在 $(0，\pi]$ 上单调递减.

所以 $f(x)\geqslant f(\pi)=0$， 即函数 $f(x)$ 的最小值为 0 .

（Ⅲ）证明：由（Ⅱ）可知 $f(x)$ 在 $(0，\pi)$ 上单调递减.

又因为 $0<\frac{1}{3}<\frac{\pi}{6}<\pi$，

所以 $f(\frac{1}{3})>f(\frac{\pi}{6})$.

所以 $\dfrac{\sin\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} > \dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}}$，即 $\sin\frac{1}{3} > \frac{1}{\pi}$.

（20）（本小题 15 分）

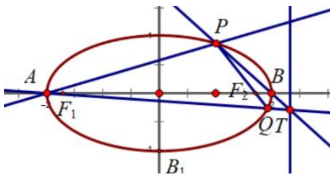
（Ⅰ）解：由题意可得：$\begin{cases} 2c = 2\sqrt{3}, \\ b = 1, \\ a^2 = b^2 + c^2. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 2, \\ c = \sqrt{3}. \end{cases}$

所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

（Ⅱ）设 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，$T(4, m)$，由题可知，$A(-2,0)$，$B(2,0)$

则直线 PB 的方程为 $y = \frac{m}{2}(x-2)$.

由 $\begin{cases} y = \frac{m}{2}(x-2), \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases}$ 整理得 $(1+m^2)x^2 - 4m^2x + 4m^2 - 4 = 0$.



则 $2x_1 = \frac{4m^2-4}{1+m^2}$，即 $x_1 = \frac{2m^2-2}{1+m^2}$.

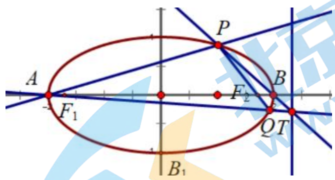
则 $y_1 = -\frac{2m}{1+m^2}$，$P(\frac{2m^2-2}{1+m^2}, -\frac{2m}{1+m^2})$.

$K_{AQ} = K_{AT} = \frac{m-0}{4-(-2)} = \frac{m}{6}$,

直线 AT 的方程为 $y = \frac{m}{6}(x+2)$.

由 $\begin{cases} y = \frac{m}{6}(x+2), \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases}$ 整理得 $(9+m^2)x^2 + 4m^2x + 4m^2 - 36 = 0$.

则 $-2x_2 = \frac{4m^2-36}{9+m^2}$，即 $x_2 = \frac{-2m^2+18}{9+m^2}$.



得 $Q(\frac{18-2m^2}{9+m^2}, \frac{6m}{9+m^2})$.

当 $\frac{18-2m^2}{9+m^2} = \frac{2m^2-2}{1+m^2}$，即 $m^2 = 3$ 时，

直线 PQ 方程为 $x = 1$，直线 PQ 过点 $(1,0)$.

当 $\frac{18-2m^2}{9+m^2} \neq \frac{2m^2-2}{1+m^2}$ 时，即 $m^2 \neq 3$ 时，

$$\therefore K_{PQ} = \frac{\frac{6m}{9+m^2} + \frac{2m}{1+m^2}}{\frac{18-2m^2}{9+m^2} - \frac{2m^2-2}{1+m^2}} = \frac{-2m}{m^2-3}.$$

所以直线 PQ 方程为 $y + \frac{2m}{1+m^2} = \frac{-2m}{m^2-3}(x - \frac{2m^2-2}{1+m^2})$,

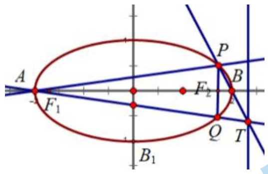
即 $y = -\frac{2m}{m^2-3}(x-1)$，此时直线 PQ 过定点 $(1,0)$.

综上，直线 PQ 过 x 轴上定点 $(1,0)$.

（2）方法二：

①当直线 PQ 斜率不存在时，设直线 PQ 为 $x = t(t \neq \pm 2)$.

设 $P(t,y_0)$ ，$Q(t,-y_0)$ ， $A(-2,0)$ ，$B(2,0)$ ，



直线 PB 方程为 $y=\dfrac{y_0}{t-2}(x-2)$.

令 $x=4$ ，得 $y=\dfrac{2y_0}{t-2}$.

$\therefore T(4,\dfrac{2y_0}{t-2})$.

$\therefore \overrightarrow{AT}=(6,\dfrac{2y_0}{t-2})$ ， $\overrightarrow{AQ}=(t+2,-y_0)$.

因为 A，T，Q 三点共线，

所以 $\overrightarrow{AT}\parallel\overrightarrow{AQ}$， $(t+2)\dfrac{2y_0}{t-2}+6y_0=0$.

$\therefore \left[\dfrac{2(t+2)}{t-2}+6\right]y_0=0$.

因为 $y_0\neq 0$, 所以 $t=1$.

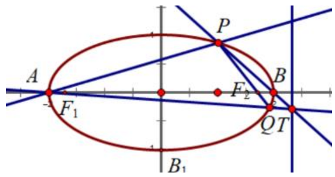
此时直线 PQ 方程为 $x=1$，直线 PQ 过点 $(1,0)$.

②当直线 PQ 斜率存在时，

设 $P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$， $T(4,\ m)$， 由题可知， $A(-2,\ 0)$，$B(2,0)$

则直线 PB 的方程为 $y=\dfrac{m}{2}(x-2)$.

由 $\begin{cases} y=\dfrac{m}{2}(x-2), \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1. \end{cases}$ 整理得 $(1+m^2)\ x^2-4m^2x+4m^2-4=0$.



则 $2x_1=\dfrac{4m^2-4}{1+m^2}$， 即 $x_1=\dfrac{2m^2-2}{1+m^2}$.

则 $y_1=-\dfrac{2m}{1+m^2}$ ， $P(\dfrac{2m^2-2}{1+m^2},-\dfrac{2m}{1+m^2})$.

$K_{AQ}=K_{AT}=\dfrac{m-0}{4-(-2)}=\dfrac{m}{6}$,

直线 AT 的方程为 $y=\dfrac{m}{6}(x+2)$.

由 $\begin{cases} y=\dfrac{m}{6}(x+2), \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1. \end{cases}$ 整理得 $(9+m^2)\ x^2+4m^2x+4m^2-36=0$

则 $-2x_2=\dfrac{4m^2-36}{9+m^2}$， 即 $x_2=\dfrac{-2m^2+18}{9+m^2}$,

得 $Q(\dfrac{18-2m^2}{9+m^2},\dfrac{6m}{9+m^2})$,

$\therefore K_{PQ}=\dfrac{\dfrac{6m}{9+m^2}+\dfrac{2m}{1+m^2}}{\dfrac{18-2m^2}{9+m^2}-\dfrac{2m^2-2}{1+m^2}}=\dfrac{-2m}{m^2-3}$.

所以直线 PQ 方程为 $y+\dfrac{2m}{1+m^2}=\dfrac{-2m}{m^2-3}(x-\dfrac{2m^2-2}{1+m^2})$.

当 $x=1$ 时 $y=0$ ，此时直线 PQ 过定点 $(1,0)$.

综上，直线 PQ 过 x 轴上定点 $(1,0)$.

(21)（本题满分 15 分）

解：

（Ⅰ）数列$0,1,2$具有性质P.

因为$0-0$，$1-0$，$2-0$，$1-1$，$2-1$，$2-2$，均是数列$0,1,2$中的项，

所以数列$0,1,2$具有性质P.

（Ⅱ）证明：设数列$\{a_n\}$所有的项组成集合M.

1. 因为$a_k>0$，所以$a_k+a_k>a_k$，$a_k+a_k\notin M$，

所以$a_k-a_k\in M$，即 $0\in M$. 所以$a_1=0$，$a_k-a_1\in M$.

2. 当$2\leqslant i\leqslant k$，因为$a_i>0$，所以$a_k+a_i\notin M$，$a_k-a_i\in M$.

（Ⅲ）因为$0=a_k-a_k<a_k-a_{k-1}<a_k-a_{k-2}<\cdots<a_k-a_2<a_k-a_1=a_k$.

且$0\leqslant a_1<a_2<a_3<\cdots<a_{k-1}<a_k$，

所以$a_k-a_k=a_1$，$a_k-a_{k-1}=a_2$，$a_k-a_{k-2}=a_3$，…，$a_k-a_2=a_{k-1}$，$a_k-a_1=a_k$，

即$a_k-a_{k-i}=a_{i+1}\left(1\leqslant i\leqslant k-1\right)$.　①

当$3\leqslant i\leqslant k-2$时，则$a_{k-1}+a_i>a_{k-1}+a_2=a_k$，所以$a_{k-1}+a_i\notin M$，得$a_{k-1}-a_i\in M$.

由$0=a_{k-1}-a_{k-1}<a_{k-1}-a_{k-2}<\cdots<a_{k-1}-a_3<a_k-a_3=a_{k-2}$

及$0\leqslant a_1<a_2<a_3<\cdots<a_{k-3}<a_{k-2}$，

可得 $a_{k-1}-a_{k-1}=a_1$，$a_{k-1}-a_{k-2}=a_2$，$a_{k-1}-a_{k-3}=a_3$，…，$a_{k-1}-a_3=a_{k-3}$.

所以 $a_{k-1}-a_{k-i}=a_i$ $(1\leqslant i\leqslant k-3)$.

因为$k\geqslant 5$，$a_{k-1}-a_{k-1}=a_1$，且 $a_{k-1}-a_{k-2}=a_2$，

所以$a_{k-1}-a_1=a_{k-1}$，且$a_{k-1}-a_2=a_{k-2}$，

所以$a_{k-1}-a_{k-i}=a_i$ $(1\leqslant i\leqslant k-1)$.　②

① ②两式相减得$a_k-a_{k-1}=a_{i+1}-a_i\left(1\leqslant i\leqslant k-1\right)$.

所以，当$k\geqslant 5$时，a_1，a_2，$a_3,\cdots$，a_k是等差数列.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。