通州区高三年级第一次模拟考试

数学（理科）试卷

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．设集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\{x|x^2-x-2<0\}$，则 $M\cap N=$

A．{-2，-1}　　B．{-1，0}　　C．{0，1}　　D．{1，2}

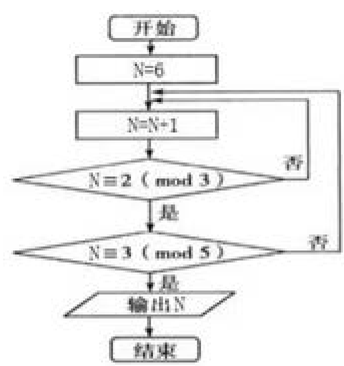
2．已知 $c<0$，则下列不等式中成立的是

A．$c>2^c$　　B．$c>\left(\frac{1}{2}\right)^c$　　C．$2^c>\left(\frac{1}{2}\right)^c$　　D．$2^c<\left(\frac{1}{2}\right)^c$

3.在极坐标系中，圆 $\rho=2\sin\theta$ 的圆心的极坐标是

A．$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$　　B．$\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$　　C．$(0,1)$　　D．$(1,0)$

4．中国古代数学著作《孙子算经》中有这样一道算术题："今有物不知其数，三三数之余二，五五数之余三，问物几何？"现给出该问题算法的程序框图，其中 $N\equiv n(\bmod m)$ 表示正整数 N 除以正整数 m 后的余数为 n，例如 $11\equiv 2(\bmod 3)$ 表示 11 除以 3 后的余数是 2. 执行该程序框图，则输出的 N 等于



A．7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

5.设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，已知点 $M\left(\frac{1}{4},a\right)$，$N\left(\frac{1}{2},b\right)$，$P(1,c)$，$Q(4,d)$ 都在抛物线上，则 M，N，P，Q 四点中与焦点 F 距离最小的点是

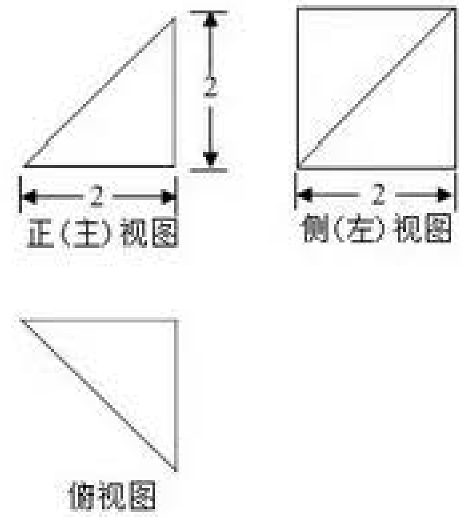
A．M　　B．N　　C．P　　D．Q

6．"$m>0$"是"方程 $\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{m+2}=1$ 表示双曲线"的

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

7.某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的体积为



A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{8}{3}$　　D. $\frac{16}{3}$

8.由正整数组成的数对按规律排列如下：(1,1)，(1,2)，(2,1)，(1,3)，(2,2)，(3,1)，(1,4)，(2,3)，(3,2)，(4,1)，(1,5)，(2,4)，…．若数对(m,n)满足$(m^2-1)(n^2-3)=2019$，其中$m,n\in N^*$，则数对(m,n)排在

A. 第351位　　B. 第353位　　C. 第378位　　D. 第380位

第二部分（非选择题　共110分）

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分.

9. 复数$\frac{2-i}{i}$（i为虚数单位）在复平面内对应的点位于第____象限.

10. 在ΔABC中，$\cos A=\frac{3}{5}$，$a=4\sqrt{2}$，$b=5$，则$c=$_____.

11. 若实数x，y满足$\begin{cases}x-y+1\geqslant 0,\\ x+y\geqslant 0,\\ x\leqslant 0,\end{cases}$　则$z=2x+y$的最大值是_____.

12. 能说明“若函数$f(x)$满足$f(0)\cdot f(2)>0$，则$f(x)$在$(0,2)$内不存在零点”为假命题的一个函数是 ______________.

13. 用数字0，1，2，3，4，5组成没有重复数字的四位数，其中百位上的数字是5的四位数共有___个(用数字作答).

14. 在平面直角坐标系xOy中，对于点$A(a,b)$，若函数$y=f(x)$满足：$\forall x\in[a-1,a+1]$，都有$y\in[b-1,b+1]$，就称这个函数是点A的“限定函数”．以下函数：①$y=\frac{1}{2}x$，②$y=2x^2+1$，③$y=\sin x$，④$y=\ln(x+2)$，其中是原点O的“限定函数”的序号是__________．已知点$A(a,b)$在函数$y=2^x$的图象上，若函数$y=2^x$是点A的“限定函数”，则a的取值范围是__________.

三、解答题：本大题共6小题．共80分．解答应写出文字说明．演算步骤或证明过程.

15.（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sin(\pi-x)\cos x+2\cos^2 x-1$.

（Ⅰ）求$f(x)$的最小正周期;

（Ⅱ）当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$时 $f(x)\geq m$ 恒成立，求 m 的取值范围.

16.（本小题 13 分）

某校工会开展健步走活动，要求教职工上传 3 月 1 日至 3 月 7 日微信记步数信息，下图是职工甲和职工乙微信记步数情况:

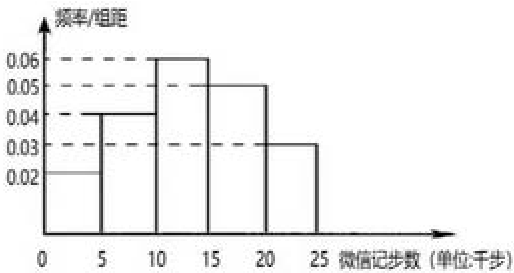
职工甲

职工乙

（Ⅰ）从 3 月 1 日至 3 月 7 日中任选一天，求这一天职工甲和职工乙微信记步数都不低于 10000 的概率;

（Ⅱ）从 3 月 1 日至 3 月 7 日中任选两天，记职工乙在这两天中微信记步数不低于 10000 的天数为 X，求 X 的分布列及数学期望;

（Ⅲ）右图是校工会根据 3 月 1 日至 3 月 7 日某一天的数据，制作的全校 200 名教职工微信记步数的频率分布直方图．已知这一天甲和乙微信记步数在单位 200 名教职工中排名分别为第 68 和第 142，请指出这是根据哪一天的数据制作的频率分布直方图（不用说明理由）.



17.（本小题 14 分）

如图 1，菱形 $ABCD$ 中，$\angle A=60°$，$AB=4$，$DE\perp AB$ 于 E．将 ΔAED 沿 DE 翻折到 $\Delta A'ED$，使 $A'E\perp BE$，如图 2.

（Ⅰ）求证：平面$A'ED\perp$平面$BCDE$;

（Ⅱ）求直线$A'E$与平面$A'BC$所成角的正弦值;

（Ⅲ）设 F 为线段$A'D$上一点，若 $EF//$

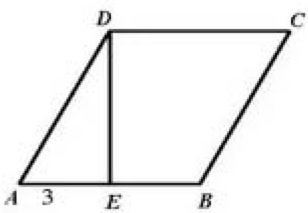


图 1

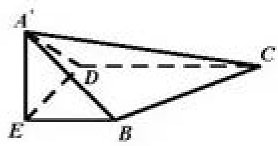


图 2

平面$A'BC$，求$\dfrac{DF}{FA'}$的值.

18.（本小题 14 分）

已知椭圆C的两个焦点分别为$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，长轴长为$2\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求椭圆C的标准方程及离心率；

（Ⅱ）过点$(0,1)$的直线l与椭圆C交于 A，B 两点，若点M满足$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MO}=\mathbf{0}$，

求证：由点M构成的曲线L关于直线$y=\dfrac{1}{3}$对称.

19.（本小题 13 分）

已知函数$f(x)=\dfrac{e^{kx}}{x^2}(k\in\mathrm{R})$.

（Ⅰ）当$k=0$时，求曲线$y=f(x)$在点$(-1,\ f(-1))$处的切线方程；

（Ⅱ）当$k\neq 0$时，

（ⅰ）求$f(x)$的单调区间；

（ⅱ）若$f(x)$在区间$(0,1)$内单调递减，求k的取值范围.

20.（本小题 13 分）

定义集合M与集合N之差是由所有属于M且不属于N的元素组成的集合，记作

$M-N=\{x\mid x\in M 且 x\notin N\}$. 已知集合$S=\{1,2,3,\cdots,100\}$.

（Ⅰ）若集合$T=\{x\mid x=2^n,n\in N^*\}$，写出集合$S-(S-T)$的所有元素；

（Ⅱ）从集合S选出 10 个元素由小到大构成等差数列，其中公差的最大值D和最小值d分别是多少？公差为D和d的等差数列各有多少个？

（Ⅲ）设集合$A\subseteq S$，且集合A中含有 10 个元素，证明：集合$S-A$中必有 10 个元素组成等差数列.

通州区高三年级第一次模拟考试

数学（理科）试卷参考答案及评分标准

2019.4

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	B	B	A	A	C	B

第二部分（非选择题 共110分）

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分.

9．三

10．7

11．1

12．$f(x)=(x-1)^2$（答案不唯一）

13．48

14．①③，$(-\infty,0]$

三、解答题：本大题共6小题，共80分.

15．解：（Ⅰ）$f(x)=2\sin(\pi-x)\cos x+2\cos^2 x-1$

$=2\sin x\cos x+\cos 2x$

$=\sin 2x+\cos 2x$ …………………3分

$=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x\right)$ …………………4分

$=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, …………………5分

所以最小正周期$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$； …………………6分

（Ⅱ）因为$x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$，

所以 $2x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$. ………………7 分

所以当 $2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$，即 $x=-\frac{\pi}{4}$ 时，$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 有最小值 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. …………10 分

所以 $f(x)$ 有最小值 -1. ………………11 分

因为当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 时 $f(x)\geq m$ 恒成立，

所以 $m\leq-1$，

即 m 的取值范围是 $(-\infty,-1]$. …………13 分

16. 解：（Ⅰ）设"职工甲和职工乙微信记步数都不低于 10000"为事件 A. ....1 分

从 3 月 1 日至 3 月 7 日这七天中，3 月 2 日，3 月 5 日，3 月 7 日这三天职工甲和职工乙微信记步数都不低于 10000，所以 $P(A)=\frac{3}{7}$； ....3 分

（Ⅱ）X 的所有可能取值为 0，1，2， ....4 分

$P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{1}{7}$，$P(X=1)=\frac{C_4^1\cdot C_3^1}{C_7^2}=\frac{4}{7}$，$P(X=2)=\frac{C_4^2}{C_7^2}=\frac{2}{7}$. ....7 分

X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

..........8 分

$E(X)=0\times\frac{1}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{2}{7}=\frac{8}{7}$； ....10 分

（Ⅲ）3 月 3 日. ....13 分

由直方图知，微信记步数落在[20,25]，[15,20)，[10,15)，[5,10)，[0,5)（单位：千步）区间内的人数依次为 $200\times0.15=30$ 人，$200\times0.25=50$ 人，$200\times0.3=60$ 人，$200\times0.2=40$ 人，$200\times0.1=20$ 人. 由甲微信记步数排名第 68，可知当天甲微信记步数在 15000---20000 之间，根据折线图知，这只有 3 月 2 日、3 月 3 日和 3 月 7 日；而由乙微信记步数排名第 142，可知当天乙微信记步数在 5000---10000 之间，根据折

线图知，这只有 3 月 3 日和 3 月 6 日．所以只有 3 月 3 日符合要求．

17．（Ⅰ）证明：在菱形 $ABCD$ 中，

因为 $DE\perp AB$，所以 $DE\perp AE$，$DE\perp EB$．

所以 $A'E\perp DE$． ……………………1 分

因为 $A'E\perp BE, DE\cap BE=E$， $DE\subset$ 平面 $BCDE$， $BE\subset$ 平面 $BCDE$，

所以 $A'E\perp$ 平面 $BCDE$． ……………………3 分

因为 $A'E\subset$ 平面 $A'ED$，

所以平面 $A'ED\perp$ 平面 $BCDE$． ……………………4 分

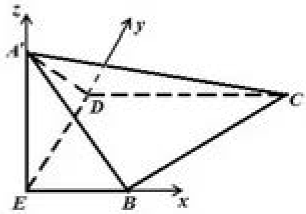
（Ⅱ）解：由（Ⅰ）知 $A'E\perp DE$， $A'E\perp BE$， $DE\perp BE$，

如图建立空间直角坐标系 E-xyz，则 ……………………5 分

$E(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$D(0,2\sqrt{3},0)$，$C(4,2\sqrt{3},0)$ $A'(0,0,2)$ ，

所以 $\overrightarrow{A'E}=(0,0,-2)$，

$\overrightarrow{BA'}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{BC}=(2,2\sqrt{3},0)$． ……………………6 分



设平面 $A'BC$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA'}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ ……………………7 分

得 $\begin{cases}-2x+2z=0,\\ 2x+2\sqrt{3}y=0,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x=z,\\ x=-\sqrt{3}y.\end{cases}$

令 $y=-1$，则 $x=\sqrt{3}$，$z=\sqrt{3}$．

所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,\sqrt{3})$． ……………………8 分

所以 $|\boldsymbol{n}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$，

又 $|\overrightarrow{A'E}|=2$，$\overrightarrow{A'E}\cdot\boldsymbol{n}=-2\sqrt{3}$，

所以 $\cos<\overrightarrow{A'E},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\overrightarrow{A'E}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{A'E}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$． ……………………9 分

所以直线 $A'E$ 与平面 $A'BC$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$． ……………………10 分

（Ⅲ）由（Ⅱ）可知，$\overrightarrow{DA'}=(0,-2\sqrt{3},2)$，$\overrightarrow{ED}=(0,2\sqrt{3},0)$，

设 $\overrightarrow{DF}=m\overrightarrow{DA'}=(0,-2\sqrt{3}m,2m)$，则 ……………………11 分

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}=(0,2\sqrt{3}-2\sqrt{3}m,2m)$． ……………………12 分

因为 $EF//$ 平面 $A'BC$，

所以$\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}=0$，

即$0\times\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-2\sqrt{3}m)\times(-1)+2m\times\sqrt{3}=0$. ……………………13 分

所以$m=\frac{1}{2}$，即$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA'}$.

所以$\frac{DF}{FA'}=1$. ……………………14 分

18．解：（Ⅰ）由已知，得$a=\sqrt{3}$，$c=1$，所以$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……….3 分

又$a^2=b^2+c^2$，所以$b=\sqrt{2}$. ……….4 分

所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，离心率$e=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……….5 分

（Ⅱ）设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$M(x_m,y_m)$.

①当直线l与x轴垂直时，点A,B的坐标分别为$\left(0,-\sqrt{2}\right)$，$\left(0,\sqrt{2}\right)$.

因为$\overrightarrow{MA}=\left(0-x_m,-\sqrt{2}-y_m\right)$，$\overrightarrow{MB}=\left(0-x_m,\sqrt{2}-y_m\right)$，$\overrightarrow{MO}=(0-x_m,0-y_m)$，

所以$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MO}=(-3x_m,-3y_m)=\boldsymbol{0}$.

所以$x_m=0$，$y_m=0$，即点M与原点重合. ……….6 分

②当直线l与x轴不垂直时，设直线l的方程为$y=kx+1$. ………. ……….7 分

由$\begin{cases}\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=kx+1,\end{cases}$

得$\left(3k^2+2\right)x^2+6kx-3=0$， ………. ……….8 分

$\Delta=36k^2+12\left(3k^2+2\right)=72k^2+24>0$.

所以$x_1+x_2=\frac{-6k}{3k^2+2}$，$y_1+y_2=\frac{4}{3k^2+2}>0$. ………. ……….9 分

因为$\overrightarrow{MA}=(x_1-x_m,y_1-y_m)$，$\overrightarrow{MB}=(x_2-x_m,y_2-y_m)$，$\overrightarrow{MO}=(0-x_m,0-y_m)$，

所以$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MO}=(x_1+x_2+0-3x_m,y_1+y_2+0-3y_m)=0$.

所以 $x_1+x_2=3x_m, y_1+y_2=3y_m$.

$x_m=\dfrac{-2k}{3k^2+2}$，$y_m=\dfrac{\frac{4}{3}}{3k^2+2}>0$. ………… …………11 分

消去 k 得 $2x_m^2+3y_m^2-2y_m=0(y_m>0)$.

综上，点 M 构成的曲线 L 的方程为 $2x^2+3y^2-2y=0$. ………… …………12 分

对于曲线 L 的任意一点 $M(x,y)$，它关于直线 $y=\dfrac{1}{3}$ 的对称点为 $M'\left(x,\dfrac{2}{3}-y\right)$. 把

$M'\left(x,\dfrac{2}{3}-y\right)$ 的坐标代入曲线 L 的方程的左端：

$$2x^2+3\left(\frac{2}{3}-y\right)^2-2\left(\frac{2}{3}-y\right)=2x^2+\frac{4}{3}-4y+3y^2-\frac{4}{3}+2y=2x^2+3y^2-2y=0.$$

所以点 M' 也在曲线 L 上.

所以由点 M 构成的曲线 L 关于直线 $y=\dfrac{1}{3}$ 对称. ……… ……… ……14 分

19. 解：（I）当 $k=0$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x^2}=x^{-2}$，$f'(x)=-2x^{-3}=-\dfrac{2}{x^3}$. ……….1 分

所以 $f'(-1)=2$，$f(-1)=1$. ………2 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程为

$y-f(-1)=f'(-1)[(x-(-1))]$, ………………………………3 分

即 $2x-y+3=0$； ………………………………4 分

（II）$k\neq 0$ 时，

（i）$f(x)=\dfrac{e^{kx}}{x^2}$，定义域为 $\{x|x\neq 0\}$, ………………………5 分

所以 $f'(x)=\dfrac{ke^{kx}\cdot x^2-e^{kx}\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{e^{kx}\cdot(kx^2-2x)}{x^4}$. ………… ……… ……………7 分

令 $f'(x)=0$，得 $x=\dfrac{2}{k}$． ………… ……… …………8 分

①当 $k>0$ 时，在 $(-\infty,0)$ 和 $(\dfrac{2}{k},+\infty)$，$f'(x)>0$；在 $(0,\dfrac{2}{k})$，$f'(x)<0$．

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(\dfrac{2}{k},+\infty)$，单调递减区间为 $(0,\dfrac{2}{k})$； ………9 分

②当 $k<0$ 时，在 $(\dfrac{2}{k},0)$，$f'(x)>0$；在 $(-\infty,\dfrac{2}{k})$ 和 $(0,+\infty)$，$f'(x)<0$．

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\dfrac{2}{k},0)$，单调递减区间为 $\left(-\infty,\dfrac{2}{k}\right)$ 和 $(0,+\infty)$； ….10 分

（ii）由 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内单调递减，

①当 $k>0$ 时，$(0,1)\subseteq(0,\dfrac{2}{k})$，有 $\dfrac{2}{k}\geq 1$，所以 $0<k\leq 2$； ……….11 分

②当 $k<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减，符合题意． ……….12 分

综上 k 的取值范围是 $(-\infty,0)\cup(0,2]$． ……….13 分

20．解：（Ⅰ）集合 $S-(S-T)$ 的所有元素是：2,4,8,16,32,64； …………………………2 分

（Ⅱ）当首项是 1，末项是 100 时，公差最大为 11，即 $D=11$．这样的数列只有 1 个：1，12，23，34，45，56，67，78，89，100； …………………………4 分
当选取的 10 个数是连续自然数时，公差最小为 1，即 $d=1$．这样的数列首项可以是 $1,2,3,\cdots,91$ 中的任何一个，因此共有 91 个公差为 1 的等差数列． ……… ……… …….6 分
（Ⅲ）将集合 S 中元素列表如下：

1	2	3	----	10
11	12	13	----	20
21	22	23	----	30
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
91	92	93	----	100

表中各行或各列的十个数分别构成等差数列．

假设存在含有 10 个元素的集合 A，使得 S-A 中不含 10 个元素组成的等差数列．显然每连续 10 个元素中必有集合 A 中的唯一一个元素，即表的每行、每列中必有集合 A 中的唯一一个元素．

记表中第 i 行第 j 列的数为 (i,j). 若第 $i(1\le i\le 9)$ 行中集合 A 的唯一元素为 (i,j)，则第 $i+1$ 行中 $(i+1,1),(i+1,2),\cdots(i+1,j)$ 中必有集合 A 中元素.

若第 $i(1\le i\le 9)$ 行的第一个数在集合 A 中，则此行余下九个数和下一行第一个数可以组成等差数列，与假设矛盾. 因此，第一列中集合 A 的唯一元素只可能在第十行.

同理，若第 $i(1\le i\le 8)$ 行的第二个数在集合 A 中，则此行余下八个数和下一行前两个数可以组成等差数列，与假设矛盾. 因此，第二列中集合 A 的唯一元素只可能在第九行.

依此类推，得 $A=\{10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91\}$.

此时，另一条对角线上的十个元素 $\{1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100\}$ 构成等差数列，与假设矛盾.

综上，原命题成立. ………………………………13 分

注：解答题学生若有其它解法，请酌情给分.