2019 年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）

数　学

一．选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1.已知全集 $U=\{-1,0,1,2,3\}$，集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{-1,0,1\}$，则 $(C_U A)\cap B=$（　）

A. $\{-1\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{-1,2,3\}$　　D. $\{-1,0,1,3\}$

2.渐近线方程为 $x\pm y=0$ 的双曲线的离心率是（　）

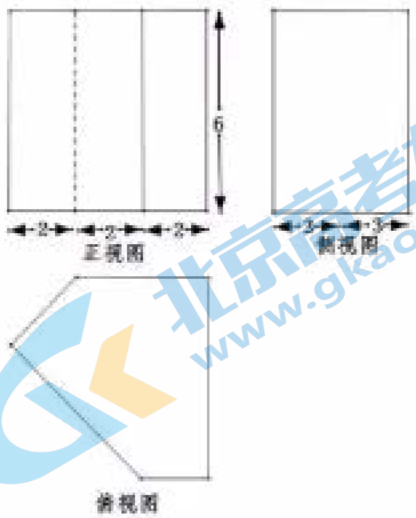
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

3.若实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x-3y+4\ge 0 \\ 3x-y-4\le 0 \\ x+y\ge 0 \end{cases}$，则 $z=3x+2y$ 的最大值是（　）

A. -1　　B. 1　　C. 10　　D. 12

4.祖暅是我国南北朝时代的伟大科学家，他提出的“幂势既同，则积不容异”称为祖暅原理，利用该原理可以得到柱体的体积公式 $V_{柱体}=sh$，其中 S 是柱体的底面积，h 是柱体的高，若某柱体的三视图如图所示，则该柱体的体积是（　）

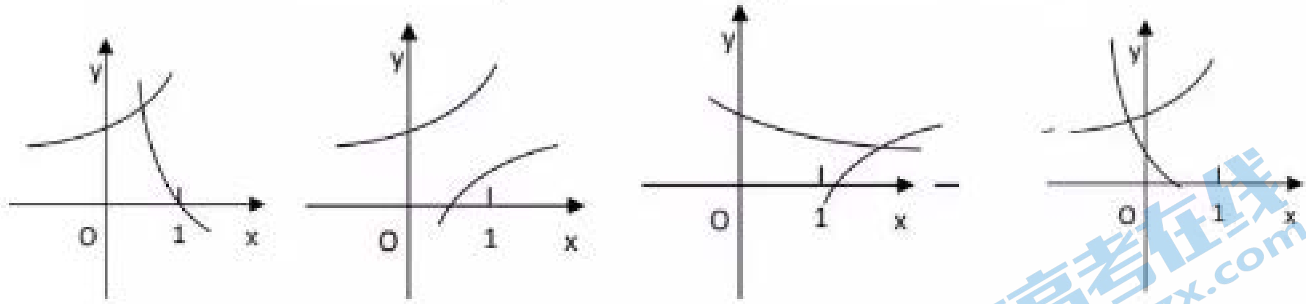
A. 158　　B. 162　　C. 182　　D. 32



5.若 $a>0,b>0$，则“$a+b\le 4$”是“$ab\le 4$”的（　）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件　　C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

6.在同一直角坐标系中，函数 $y=\frac{1}{a^x}$，$y=\log_a(x+\frac{1}{2})$，$(a>0$ 且 $a\neq 0)$ 的图像可能是（　）



A　　　　B　　　　C　　　　D

7.设 $0<a<1$，随机变量 X 的分布列是（　）

X	0	a	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则当 a 在 $(0,1)$ 内增大时

A. $D(X)$ 增大　B. $D(X)$ 减小　C. $D(X)$ 先增大后减小　D. $D(X)$ 先减小后增大

8.设三棱锥 $V-ABC$ 的底面是正三角形，侧棱长均相等，P 是棱 VA 上的点（不含端点），记直线 PB 与直线 AC 所成角为 α，直线 PB 与平面 ABC 所成角为 β，二面角 $P-AC-B$ 的平面角为 γ，则（　）

A. $\beta<\gamma,\alpha<\gamma$　B. $\beta<\alpha,\beta<\gamma$　C. $\beta<\alpha,\gamma<\alpha$　D. $\alpha<\beta,\gamma<\beta$

9.已知 $f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2+ax & x\geq 0 \end{cases}$，函数 $F(x)=f(x)-ax-b$ 恰有三个零点，则（　）

A. $a<-1,b>0$　B. $a<-1,b<0$　C. $a>-1,b>0$　D. $a>-1,b<0$

10. $a,b\in R$，$\{a_n\}$ 中 $a_1=a,a_{n+1}=a_n^2+b$，则（　）

A. 当 $b=\frac{1}{2},a_{10}>10$　　B. 当 $b=\frac{1}{4},a_{10}>10$

C. 当 $b=-2,a_{10}>10$　　D. 当 $b=-4,a_{10}>10$

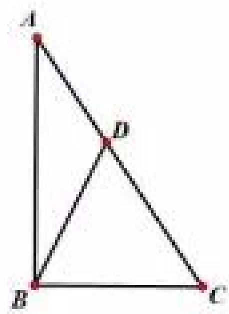
二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分

11.复数 $z=\frac{1}{1+i}$（i 为虚数单位），则 $|z|=$________

12.已知圆 C 的圆心坐标是 $(0,m)$，半径长是 r，若直线 $2x-y+3=0$ 与圆相切与点 $A(-2,-1)$，则 $m=$_______,$r=$________

13. 在二项式 $(\sqrt{2}+x)^9$ 的展开式中，常数项是________，系数为有理项的项的个数是________

14. ΔABC 中，$\angle B=90^\circ$，$AB=4$，$BC=3$，点 D 在 AC 上，若 $\angle BDC=45^\circ$，则 $BD=$______，$\cos\angle ABD=$________



15. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$，左焦点 F，点 P 在上半椭圆，且 PF 中点落在以 O 为圆心，$|OF|$ 为半径的圆上，则 PF 的斜率为________

16. 设 $a\in R$，$f(x)=ax^3-x$，若存在 $t\in R$ 使 $|f(t+2)-f(t)|\le\dfrac{2}{3}$，则实数 a 的最大值为________

17. 正方形 $ABCD$ 的边长为1，若每个 λ_i（$i=1,2,3,4,5,6$）都取遍 ±1，

则 $|\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{BC}+\lambda_3\overrightarrow{CD}+\lambda_4\overrightarrow{DA}+\lambda_5\overrightarrow{AC}+\lambda_6\overrightarrow{BD}|$ 的最小值为______，最大值为________

三、解答题（本大题共 5 题，共计 74 分）

18. （本题满分 14 分）已知 $f(x)=\sin x$，$x\in R$.

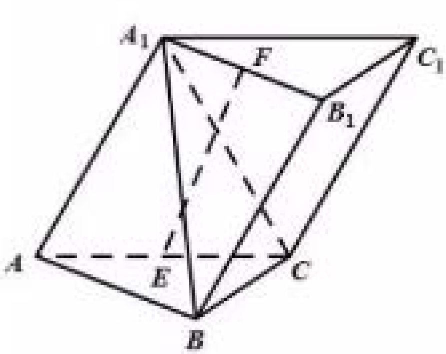
（1）$\theta\in[0,2\pi]$，若 $f(x+\theta)$ 为偶函数，求 θ 的值；

（2）求 $g(x)=[f(x+\dfrac{\pi}{12})]^2+[f(x+\dfrac{\pi}{4})]^2$ 的值域

19. （本题满分 15 分）已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，面 $AA_1C_1C\perp$ 面 ABC，ΔAA_1C 为正三角形，$AB\perp BC$，$\angle BAC=30^\circ$，E，F 分别为 AC，A_1B_1 的中点.

（1）求证：$EF\perp BC$；

（2）求直线 EF 与平面 A_1BC 所成角的余弦值.



20. （本题满分 15 分）等差数列$\{a_n\}$中，S_n为$\{a_n\}$的前n项和，且$a_3=4$，$a_4=S_3$，数列$\{b_n\}$满足：S_n+b_n，$S_{n+1}+b_n$，$S_{n+2}+b_n$成等比数列.

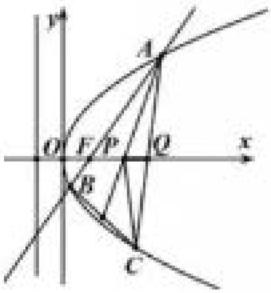
（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）设$c_n=\sqrt{\dfrac{a_n}{2b_n}}$，证明：$c_1+c_2+\cdots+c_n<2\sqrt{n}$.

21. （本题满分 15 分）过焦点$F(1,0)$的直线与抛物线$y^2=2px$交于A,B两点，C在抛物线，ΔABC的重心P在x轴上，AC交x轴于点Q（点Q在点P的右侧）.

（1）求抛物线方程及准线方程；

（2）记$\Delta AFP,\Delta CQP$的面积分别为S_1,S_2，求$\dfrac{S_1}{S_2}$的最小值及此时点P的坐标.



22. （本题满分 15 分）设$f(x)=a\ln x+\sqrt{1+x}\,(x>0)$.

（1）当$a=-\dfrac{3}{4}$时，求$f(x)$的单调区间；

（2）若对任意$x\in[\dfrac{1}{e^2},+\infty)$，$f(x)\le\dfrac{\sqrt{x}}{2a}$恒成立，求$a$的取值范围.

2019年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）

数 学 参 考 答 案

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算。每小题4分，满分40分。

1．A　　2．C　　3．C　　4．B　　5．A

6．D　　7．D　　8．B　　9．C　　10．A

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算。多空题每题6分，单空题每题4分，共36分。

11．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　12．$-2,\sqrt{5}$　　13．$16\sqrt{2},5$　　14．$\dfrac{12\sqrt{2}}{5},\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

15．$\sqrt{15}$　　16．$\dfrac{4}{3}$　　17．$0,2\sqrt{5}$

三、解答题：本大题共5小题，共74分。

18．本题主要考查三角函数及其恒等变换等基础知识，同时考查运算求解能力。满分14分。

（I）因为$f(x+\theta)=\sin(x+\theta)$是偶函数，所以，对任意实数$x$都有$\sin(x+\theta)=\sin(-x+\theta)$，

即$\sin x\cos\theta+\cos x\sin\theta=-\sin x\cos\theta+\cos x\sin\theta$，

故$2\sin x\cos\theta=0$，

所以$\cos\theta=0$．

又$\theta\in[0,2\pi)$，因此$\theta=\dfrac{\pi}{2}$或$\dfrac{3\pi}{2}$．

（II）$y=\left[f\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)\right]^2+\left[f\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^2=\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\dfrac{1-\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)}{2}+\dfrac{1-\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)}{2}=1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\dfrac{3}{2}\sin 2x\right)$

$=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$．

因此，函数的值域是$[1-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}]$．

19．本题主要考查空间点、线、面位置关系，直线与平面所成的角等基础知识，同时考查空间想象能力和运算求解能力。满分15分。

方法一：

（Ⅰ）连接A_1E，因为$A_1A=A_1C$，E是AC的中点，所以$A_1E\perp AC$.

又平面$A_1ACC_1\perp$平面ABC，$A_1E\subset$平面A_1ACC_1，

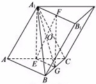
平面$A_1ACC_1\cap$平面$ABC=AC$，

所以，$A_1E\perp$平面ABC，则$A_1E\perp BC$.

又因为$A_1F/\!/AB$，$\angle ABC=90°$，故$BC\perp A_1F$.

所以$BC\perp$平面A_1EF.

因此$EF\perp BC$.



第 19 题图

（Ⅱ）取BC中点G，连接EG，GF，则$EGFA_1$是平行四边形.

由于$A_1E\perp$平面ABC，故$AE_1\perp EG$，所以平行四边形$EGFA_1$为矩形.

由（Ⅰ）得$BC\perp$平面$EGFA_1$，则平面$A_1BC\perp$平面$EGFA_1$，

所以EF在平面A_1BC上的射影在直线A_1G上.

连接A_1G交EF于O，则$\angle EOG$是直线EF与平面A_1BC所成的角（或其补角）.

不妨设$AC=4$，则在$Rt\triangle A_1EG$中，$A_1E=2\sqrt{3}$，$EG=\sqrt{3}$.

由于O为A_1G的中点，故$EO=OG=\dfrac{A_1G}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，

所以$\cos\angle EOG=\dfrac{EO^2+OG^2-EG^2}{2EO\cdot OG}=\dfrac{3}{5}$.

因此，直线EF与平面A_1BC所成角的余弦值是$\dfrac{3}{5}$.

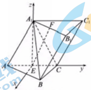
方法二：

连接A_1E，因为$A_1A=A_1C$，E是AC的中点，所以$A_1E\perp AC$.

又平面$A_1ACC_1\perp$平面ABC，$A_1E\subset$平面A_1ACC_1，

平面$A_1ACC_1\cap$平面$ABC=AC$，所以，$A_1E\perp$平面ABC.

如图，以点E为原点，分别以射线EC，EA_1为y，z轴的正半轴，建立空间直角坐标系$E\text{-}xyz$.



第 19 题图

不妨设$AC=4$，则

$A_1(0,0,2\sqrt{3})$，$B(\sqrt{3},1,0)$，$B_1(\sqrt{3},3,2\sqrt{3})$，$F(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},2\sqrt{3})$，$C(0,2,0)$.

因此，$\overrightarrow{EF}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},1,0)$.

由$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}=0$得$EF\perp BC$.

20. 本题主要考查等差数列、等比数列、数列求和、数学归纳法等基础知识，同时考查运算求解能力和综合应用能力。满分15分。

（Ⅰ）设数列$\{a_n\}$的公差为d，由题意得

$a_1+2d=4, a_1+3d=3a_1+3d$，

解得$a_1=0, d=2$.

从而$a_n=2n-2, n\in\mathbf{N}^*$.

由$S_n+b_n, S_{n+1}+b_n, S_{n+2}+b_n$成等比数列得

$\left(S_{n+1}+b_n\right)^2=\left(S_n+b_n\right)\left(S_{n+2}+b_n\right)$.

解得$b_n=\frac{1}{d}\left(S_{n+1}^2-S_nS_{n+2}\right)$.

所以$b_n=n^2+n, n\in\mathbf{N}^*$.

（Ⅱ）$c_n=\sqrt{\dfrac{a_n}{2b_n}}=\sqrt{\dfrac{2n-2}{2n(n+1)}}=\sqrt{\dfrac{n-1}{n(n+1)}},n\in\mathbf{N}^*$.

我们用数学归纳法证明.

（1）当$n=1$时，$c_1=0<2$，不等式成立；

（2）假设$n=k\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$时不等式成立，即$c_1+c_2+\cdots+c_k<2\sqrt{k}$.

那么，当$n=k+1$时，

$$c_1+c_2+\cdots+c_k+c_{k+1}<2\sqrt{k}+\sqrt{\frac{k}{(k+1)(k+2)}}<2\sqrt{k}+\sqrt{\frac{1}{k+1}}$$

$$<2\sqrt{k}+\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=2\sqrt{k}+2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=2\sqrt{k+1}.$$

即当$n=k+1$时不等式也成立.

根据（1）和（2），不等式$c_1+c_2+\cdots+c_n<2\sqrt{n}$对任意$n\in\mathbf{N}^*$成立.

1. **本题主要考查抛物线的几何性质，直线与抛物线的位置关系等基础知识，同时考查运算求解能力和综合应用能力。满分15分。**

（Ⅰ）由题意得$\dfrac{p}{2}=1$，即$p=2$.

所以，抛物线的准线方程为$x=-1$.

（Ⅱ）设$A(x_A,y_A),B(x_B,y_B),C(x_c,y_c)$，重心$G(x_G,y_G)$.令$y_A=2t,t\neq 0$，则$x_A=t^2$.

由于直线AB过F，故直线AB方程为$x=\dfrac{t^2-1}{2t}y+1$，代入$y^2=4x$，得

$$y^2-\frac{2\left(t^2-1\right)}{t}y-4=0,$$

故$2ty_B=-4$，即$y_B=-\dfrac{2}{t}$，所以$B\left(\dfrac{1}{t^2},-\dfrac{2}{t}\right)$.

又由于$x_G=\dfrac{1}{3}\left(x_A+x_B+x_c\right),y_G=\dfrac{1}{3}\left(y_A+y_B+y_c\right)$及重心$G$在$x$轴上，故$2t-\dfrac{2}{t}+y_c=0$，得

$$C\left(\left(\frac{1}{t}-t\right)^2,2\left(\frac{1}{t}-t\right)\right),G\left(\frac{2t^4-2t^2+2}{3t^2},0\right).$$

所以，直线AC方程为$y-2t=2t\left(x-t^2\right)$，得$Q\left(t^2-1,0\right)$.

由于Q在焦点F的右侧，故$t^2>2$.从而

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}|FG|\cdot|y_A|}{\frac{1}{2}|QG|\cdot|y_c|}=\frac{\left|\frac{2t^4-2t^2+2}{3t^2}-1\right|\cdot|2t|}{|t^2-1-\frac{2t^4-2t^2+2}{3t^2}|\cdot|\frac{2}{t}-2t|}=\frac{2t^4-t^2}{t^4-1}=2-\frac{t^2-2}{t^4-1}.$$

令$m=t^2-2$，则$m>0$，

$$\frac{S_1}{S_2}=2-\frac{m}{m^2+4m+3}=2-\frac{1}{m+\frac{3}{m}+4}\geq 2-\frac{1}{2\sqrt{m\cdot\frac{3}{m}}+4}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

当$m=\sqrt{3}$时，$\frac{S_1}{S_2}$取得最小值$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，此时G（2，0）.

22．本题主要考查函数的单调性，导数的运算及其应用，同时考查逻辑思维能力和综合应用能力。满分15分。

（Ⅰ）当$a=-\frac{3}{4}$时，$f(x)=-\frac{3}{4}\ln x+\sqrt{1+x},x>0$.

$$f'(x)=-\frac{3}{4x}+\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{(\sqrt{1+x}-2)(2\sqrt{1+x}+1)}{4x\sqrt{1+x}},$$

所以，函数$f(x)$的单调递减区间为（0，3），单调递增区间为（3，$+\infty$）.

（Ⅱ）由$f(1)\leq\frac{1}{2a}$，得$0<a\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$.

当$0<a\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$时，$f(x)\leq\frac{\sqrt{x}}{2a}$等价于$\frac{\sqrt{x}}{a^2}-\frac{2\sqrt{1+x}}{a}-2\ln x\geq 0$.

令$t=\frac{1}{a}$，则$t\geq 2\sqrt{2}$.

设$g(t)=t^2\sqrt{x}-2t\sqrt{1+x}-2\ln x,t\geq 2\sqrt{2}$，则

$g(t)\geq g(2\sqrt{2})=8\sqrt{x}-4\sqrt{2}\sqrt{1+x}-2\ln x$.

（i）当$x\in\left[\frac{1}{7},+\infty\right)$时，$\sqrt{1+\frac{1}{x}}\leq 2\sqrt{2}$，则

$g(t)\geq g(2\sqrt{2})=8\sqrt{x}-4\sqrt{2}\sqrt{1+x}-2\ln x$.

记 $p(x)=4\sqrt{x}-2\sqrt{2}\sqrt{1+x}-\ln x, x\geq\frac{1}{7}$，则

$$p'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{x}=\frac{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}-\sqrt{2}x-\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}}.$$

故

x	$\frac{1}{7}$	$(\frac{1}{7},1)$	1	$(1,+\infty)$
$p'(x)$		$-$	0	+
$p(x)$	$p(\frac{1}{7})$	单调递减	极小值 $p(1)$	单调递增

所以，$p(x)\geq p(1)=0$.

因此，$g(t)\geq g(2\sqrt{2})=2p(x)\geq 0$.

（ii）当 $x\in\left[\frac{1}{e^2},\frac{1}{7}\right)$ 时，$g(t)..g\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=\frac{-2\sqrt{x}\ln x-(x+1)}{2\sqrt{x}}$.

令 $q(x)=2\sqrt{x}\ln x+(x+1), x\in\left[\frac{1}{e^2},\frac{1}{7}\right]$，则 $q'(x)=\frac{\ln x+2}{\sqrt{x}}+1>0$，

故 $q(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e^2},\frac{1}{7}\right]$ 上单调递增，所以 $q(x)„\ q\left(\frac{1}{7}\right)$.

由（i）得 $q\left(\frac{1}{7}\right)=-\frac{2\sqrt{7}}{7}p\left(\frac{1}{7}\right)<-\frac{2\sqrt{7}}{7}p(1)=0$.

所以，$q(x)<0$.

因此 $g(t)..g\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=-\frac{q(x)}{2\sqrt{x}}>0$.

由（i）（ii）得对任意 $x\in\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$，$t\in[2\sqrt{2},+\infty), g(t)..0$，

即对任意 $x\in\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$，均有 $f(x)„\ \frac{\sqrt{x}}{2a}$.

综上所述，所求 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$.