2023年“安徽省示范高中皖北协作区”第25届高三联考

数　　学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\mid \ln(x-2)<0\}$，$B=\{x\mid 5-2x>0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x\mid 2<x<\frac{5}{2}\}$　　B. $\{x\mid \frac{5}{2}<x<3\}$　　C. $\{x\mid 1<x<\frac{5}{2}\}$　　D. $\{x\mid 1<x<2\}$

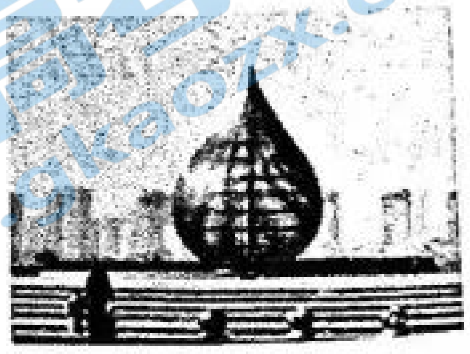
2. 已知复数 z 满足 $\frac{z}{z+1}=3+\mathrm{i}$，则 $|z|=$

A. $2\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}$

3. 已知抛物线 $C:y=\frac{1}{4}x^2$ 的焦点为 F，P 是抛物线 C 上的一点，且 $|PF|=3$，则点 P 到坐标原点 O 的距离是

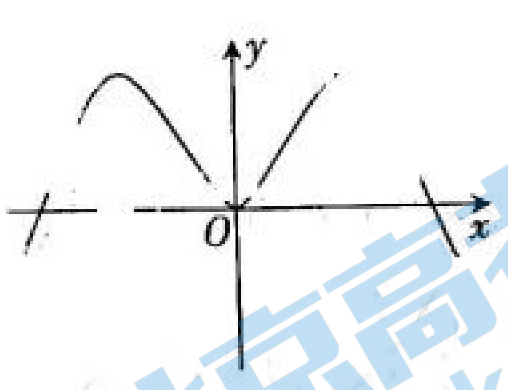
A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 4

4. 宿州市三角洲生态公园是多功能的综合性公园，其标志性雕塑“生命之源”为水滴形状，寓意水是生命之源，此雕塑顶部可视为一个圆锥. 已知此圆锥的高为3 m，其母线与底面所成的角为60°，则此圆锥的侧面展开图的面积为

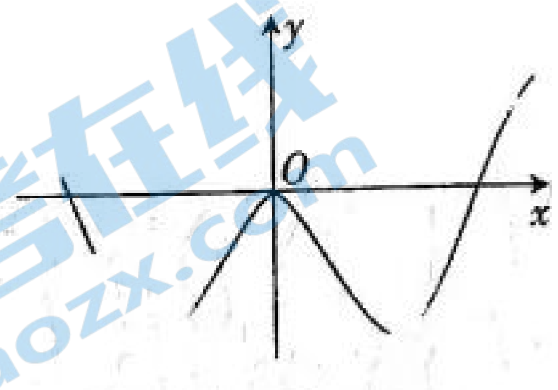


A. $3\pi\ \mathrm{m}^2$　　B. $6\pi\ \mathrm{m}^2$　　C. $3\sqrt{3}\pi\ \mathrm{m}^2$　　D. $6\sqrt{3}\pi\ \mathrm{m}^2$

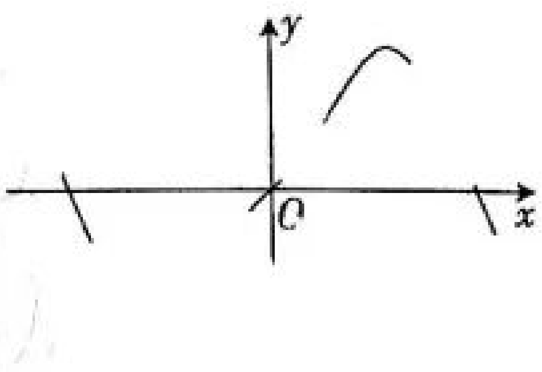
5. 函数 $f(x)=\frac{2(x^2+1)\sin x}{2^x+2^{-x}}$ 的部分图象大致是



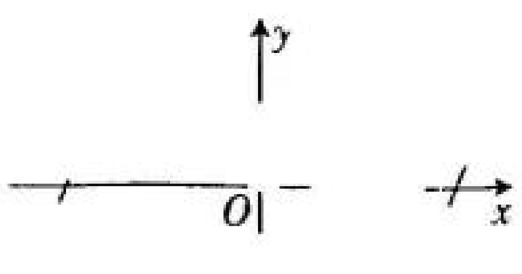
A



B



C



D

6. 公元前3世纪，古希腊数学家阿波罗尼斯结合前人的研究成果，写出了经典之作《圆锥曲线论》，在此著作第七卷《平面轨迹》中，有众多关于平面轨迹的问题，例如：平面内到两定点距离之比等于定值（不为1）的动点轨迹为圆. 后来该轨迹被人们称为阿波罗尼斯圆. 已知平面内有两点 $A(-1,0)$ 和 $B(2,1)$，且该平面内的点 P 满足 $|PA|=\sqrt{2}|PB|$，若点 P 的轨迹关于直

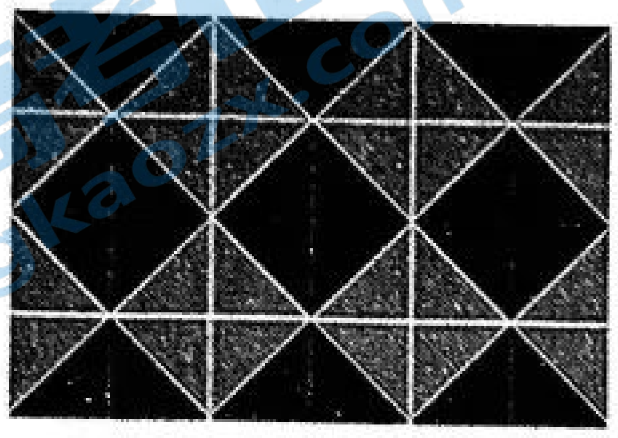
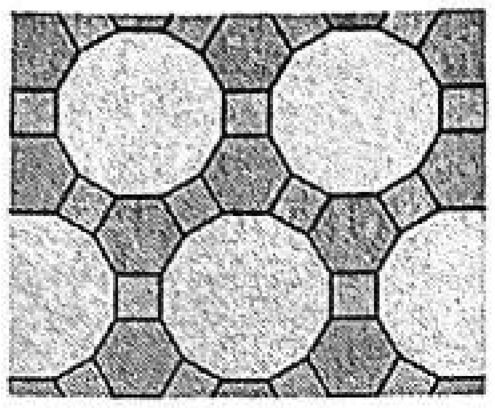
线 $mx+ny-2=0(m>0,n>0)$ 对称，则 $\frac{2}{m}+\frac{3}{n}-15$ 的最小值是

A. $10+2\sqrt{5}$　　B. $10+2\sqrt{15}$　　C. $-5+2\sqrt{10}$　　D. $-7+2\sqrt{15}$

7. 已知 $a=\ln\frac{5}{4}$，$b=\frac{1}{5}$，$c=\sqrt[4]{e}-1$（其中 $e=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数），则下列大小关系正确的是

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $a<c<b$　　D. $c<a<b$

8. 许多建筑物的地板是用正多边形的地砖铺设而成的（可以使用多种正多边形的地砖）. 用正多边形地砖可以铺出很多精美的图案，如图. 若用边长相等的正多边形地砖铺满地面，且保持每块地砖完整不受损坏，则至少使拼接在同一顶点处的所有正多边形地砖的内角和恰为 2π. 现用正多边形地砖给一个地面面积较大的客厅铺设地板（所有类型地砖边长均相等），要求每块地砖完整不受损坏，铺设地砖后无空余地面（不考虑客厅墙角和周边地带），每个顶点周围只有 3 块正多边形地砖拼接在一起，则在某一顶点处的拼法（不考虑排列顺序）最多有

A. 16 种　　B. 10 种　　C. 4 种　　D. 5 种

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列说法正确的是

A. 数据 5,7,8,11,10,15,20 的中位数为 11

B. 一组数据 7,8,8,9,11,13,15,17,20,22 的第 80 百分位数为 18.5

C. 从 1,2,3,4,5 中任取 3 个不同的数，则这 3 个数能构成直角三角形三边长的概率为 0.1

D. 设随机事件 A 和 B，已知 $P(A)=0.8$，$P(B|A)=0.6$，$P(B|\overline{A})=0.1$，则 $P(B)=0.5$

10. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$a_{n+1}=ba_n+a(a,b\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}_+)$，则下列结论正确的是

A. 若 $a=0,b=2$，则 $S_n=2^n-1$　　B. 若 $a=2,b=1$，则 $S_n=n^2-2n$

C. 若 $a=1,b=-1$，则 $a_{10}=1$　　D. 若 $a=1,b=2$，则 $a_n=2^n-1$

11. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x\cos x$，则下列结论正确的是

A. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{2},0)$ 对称　　B. $f(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})$ 上单调递增

C. $f(x)$ 在区间 $[1,10]$ 内有 7 个零点　　D. $f(x)$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

12. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3)+f(x+1)=f(2)$，$f(2-x)=f(x+4)$，若 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，则

A. $f(x)$ 是周期函数　　B. $f(2022)=\frac{1}{2}$

C. $f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称　　D. $\sum_{k=1}^{200}kf(k-\frac{1}{2})=-100$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，且 $|\boldsymbol{a}|=5$，$\boldsymbol{b}=(3,4)$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的坐标为 (▲).

14. $(\frac{y}{x}-1)(x+y)^7$ 的展开式中 x^4y^3 的系数为 14▲ .(用数字作答)

15. 已知正四棱台 $A'B'C'D'-ABCD$ 内接于半径为 1 的球 O，且球心 O 是四边形 $ABCD$ 的中心，若该棱台的侧棱与底面 $ABCD$ 所成的角是 $60°$，则该棱台的体积为 ▲ .

16. 已知 F 为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一个焦点，过 F 作 C 的一条渐近线的垂线 l，垂足为 M，直线 l 与另一条渐近线交于点 N，若 $|MN|=4\sqrt{3}a$，则双曲线 C 的离心率为 ▲ .

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 各项都为正数，且 $a_n^2-na_na_{n-1}+a_n-na_{n-1}=0(n\geq2,n\in\mathbf{N}_+)$，$a_1=1$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若 $b_n=\frac{n}{a_{n+1}}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，证明：$\frac{1}{2}\leq S_n<1$.

18.(12 分)

为贯彻落实《健康中国行动(2019—2030 年)》《关于全面加强和改进新时代学校体育工作的意见》等文件精神，确保 2030 年学生体质达到规定要求，各地将认真做好学生的体制健康监测. 某市决定对某中学学生的身体健康状况进行调查，现从该校抽取 200 名学生测量他们的体重，得到如下样本数据的频率分布直方图.

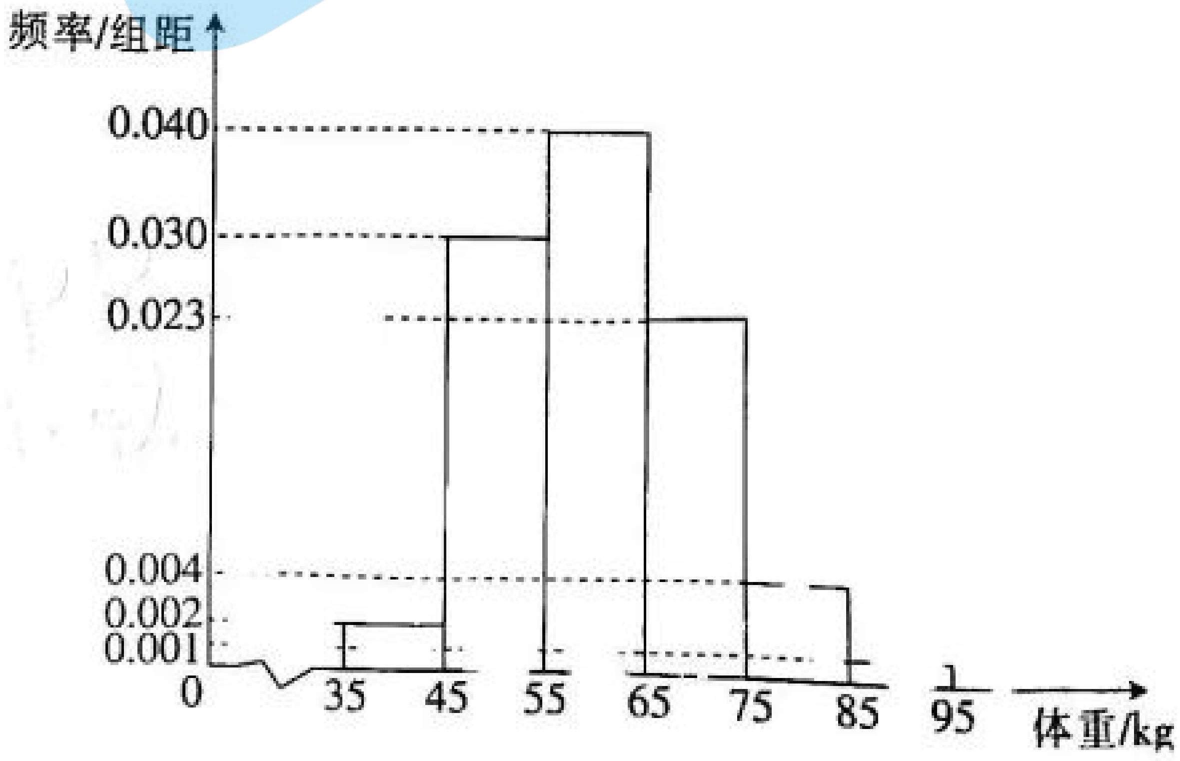
(1)求这 200 名学生体重的平均数 $\bar{x}$ 和方差 s^2(同一组数据用该区间的中点值作代表).

(2)由频率分布直方图可知，该校学生的体重 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 近似为平均数 $\bar{x}$，σ^2 近似为方差 s^2.

①利用该正态分布，求 $P(50.73<Z\leq69.27)$；

②若从该校随机抽取 50 名学生，记 X 表示这 50 名学生的体重位于区间 $(50.73,69.27]$ 内的人数，利用①的结果，求 $E(X)$.

参考数据：$\sqrt{86}\approx9.27$. 若 $Z\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<Z\leq\mu+\sigma)\approx0.6826$，$P(\mu-2\sigma<Z\leq\mu+2\sigma)\approx0.9544$，$P(\mu-3\sigma<Z\leq\mu+3\sigma)\approx0.9974$.



19. (12 分)

在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $a=2\sqrt{2}$，$\sqrt{2}c\sin(A+\frac{\pi}{4})=b$.

(1)求角 C;

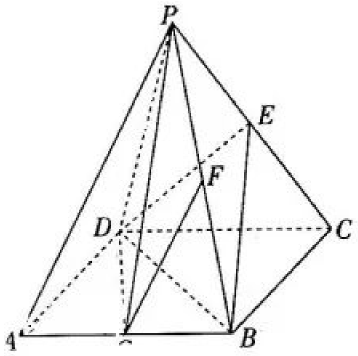
(2)若△ABC 为锐角三角形，D 为 AB 边的中点，求线段 CD 长的取值范围.

20. (12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，所有棱长都相等，$AB\perp AD$，E,F 分别是棱 PC,PB 的中点，G 是棱 AB 上的动点，且 $\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

(1)若 $\lambda=\frac{1}{2}$，证明：GF∥平面 BDE.

(2)求平面 BDE 与平面 PDG 夹角余弦值的最大值.



21. (12 分)

已知 A,B 分别是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的左、右顶点，若椭圆 C 的短轴长等于焦距，且该椭圆经过点$(-\sqrt{2},1)$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)过椭圆 C 的右焦点 F 作一条直线交椭圆 C 于 M,N(异于 A,B 两点)两点，连接 AM,AN 并延长，分别交直线 l：$x=2\sqrt{2}$ 于不同的两点 P,Q. 证明：直线 MQ 与直线 NP 相交于点 B.

22. (12 分)

已知函数 $f(x)=ax^2+x-e^x+1$，其中 $a\in\mathbf{R}$，e=2.71828…是自然对数的底数.

(1)若 $a=\frac{1}{2}$，证明：当 $x<0$ 时，$f(x)>0$；当 $x>0$ 时，$f(x)<0$.

(2)设函数 $g(x)=\cos x-f(x)+1$，若 $x=0$ 是 $g(x)$的极大值点，求实数 a 的取值范围.

(参考数据：$e^{-\frac{\pi}{6}}\approx0.59$，$e^{-\frac{\pi}{4}}\approx0.46$)

2023年"安徽省示范高中皖北协作区"第25届高三联考
数学参考答案

1. A　由题意可得 $A=\{x|2<x<3\}$，$B=\{x|x<\frac{5}{2}\}$，则 $A\cap B=\{x|2<x<\frac{5}{2}\}$.

2. D　设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\frac{a+bi}{a+bi+1}=3+i$，整理得 $a+bi=3a-b+3+(a+3b+1)i$，从而 $\begin{cases}a=3a-b+3,\\ b=a+3b+1,\end{cases}$ 解得 $a=-\frac{7}{5}$，$b=\frac{1}{5}$，故 $|z|=\sqrt{(-\frac{7}{5})^2+(\frac{1}{5})^2}=\sqrt{2}$.

3. C　设 $P(m,n)$，由题意可得 $n+1=3$，解得 $n=2$，则 $m^2=8$，故点 P 到坐标原点 O 的距离是 $\sqrt{m^2+n^2}=\sqrt{8+4}=2\sqrt{3}$.

4. B　设圆锥的底面半径为 r，高为 $h=3$ m，母线长为 l，由题意可得 $\tan 60^\circ=\frac{h}{r}$，则 $r=\sqrt{3}$ m，从而 $l=2r=2\sqrt{3}$ m，圆锥的侧面展开图的面积 $s=\pi rl=6\pi$ m^2.

5. C　因为 $f(x)=\frac{2(x^2+1)\sin x}{2^x+2^{-x}}$，所以 $f(-x)=\frac{2(x^2+1)\sin(-x)}{2^{-x}+2^x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(x)$ 的图象关于原点对称，排除 A，B. 当 $0<x<\pi$ 时，$f(x)>0$，排除 D.

6. D　设点 P 的坐标为 (x,y)，因为 $|PA|=\sqrt{2}|PB|$，所以点 P 的轨迹方程为 $(x-5)^2+(y-2)^2=20$，因为 P 点的轨迹关于直线 $mx+ny-2=0(m>0,n>0)$ 对称，所以圆心 $(5,2)$ 在此直线上，即 $5m+2n=2$，所以 $\frac{2}{m}+\frac{3}{n}-15=\frac{1}{2}(5m+2n)(\frac{2}{m}+\frac{3}{n})-15=-7+\frac{1}{2}(\frac{4n}{m}+\frac{15m}{n})\geqslant-7+2\sqrt{15}$，当且仅当 $\frac{4n}{m}=\frac{15m}{n}$，即 $n=\frac{\sqrt{15}}{2}m$ 时，等号成立.

7. B　由题意可得 $a=\ln\frac{5}{4}=\ln(1+\frac{1}{4})$，$b=\frac{1}{5}=\frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}$，$c=\sqrt[4]{e}-1=e^{\frac{1}{4}}-1$. 设 $f(x)=e^x-x-1(x>0)$，则 $f'(x)=e^x-1$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x)>f(0)=0$，从而 $e^x-x-1>0$，即 $e^x-1>x$，故 $e^{\frac{1}{4}}-1>\frac{1}{4}$，即 $c>\frac{1}{4}$. 设 $g(x)=\ln(1+x)-x(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{-x}{1+x}$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则 $g(x)<g(0)=0$，即 $\ln(1+x)-x<0$，即 $\ln(1+x)<x$，从而 $\ln(1+\frac{1}{4})<\frac{1}{4}$，即 $a<\frac{1}{4}$，故 $a<\frac{1}{4}<c$，即 $a<c$. 设 $h(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $h(x)>h(0)=0$，即 $\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$，从而 $\ln(1+\frac{1}{4})>\frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}$，即 $\ln\frac{5}{4}>\frac{1}{5}$，故 $b<a$，即 $b<a<c$.

8. C　一个正 $n(n\geqslant3)$ 边形各内角的和是 $(n-2)\pi$，则每个内角为 $\theta_n=\frac{(n-2)\pi}{n}(\theta_n<\pi)$.

设在顶点处有 k 块砖拼凑在一起，它们的边数分别为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_k$，则有 $\theta_{x_1}+\theta_{x_2}+\theta_{x_3}+\cdots+\theta_{x_k}=2\pi$，即 $\frac{x_1-2}{x_1}\pi+\frac{x_2-2}{x_2}\pi+\frac{x_3-2}{x_3}\pi+\cdots+\frac{x_k-2}{x_k}\pi=2\pi$，

所以 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_k}=\frac{k-2}{2}$，$x_j\geqslant3(j=1,2,3,\cdots,k)$. (1)

由(1)式可得 $k\geqslant3$.

当 $k=3$ 时，$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{2}$，$x_j\geqslant 3(j=1,2,3)$. (2)

设(2)式的一组解为(x_1,x_2,x_3)，首先求出(2)式的全部整数解.

①当 $x_1=x_2=x_3$ 时，由(2)式可解得$(x_1,x_2,x_3)=(6,6,6)$.

这组解给出的正多边形可以铺设地板，如图 1 所示. 故这时只有一种拼法.

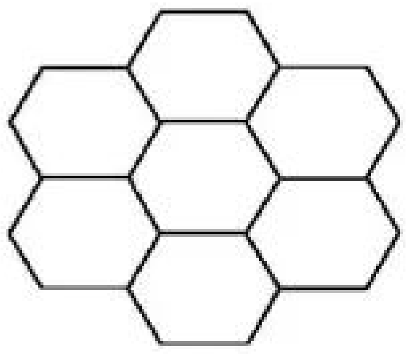


图 1

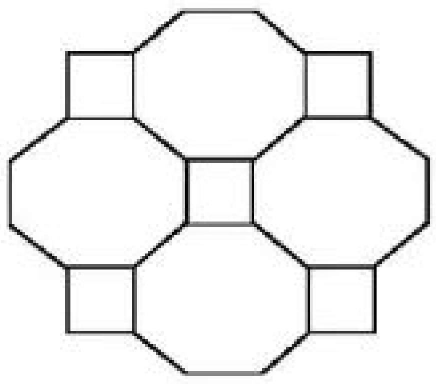


图 2

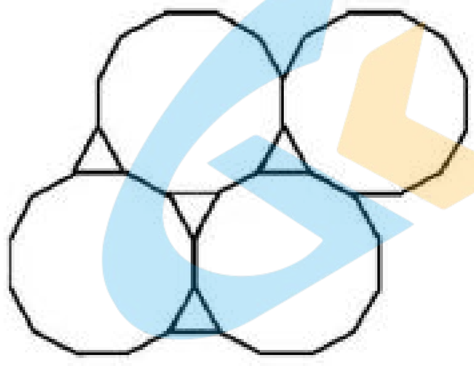


图 3

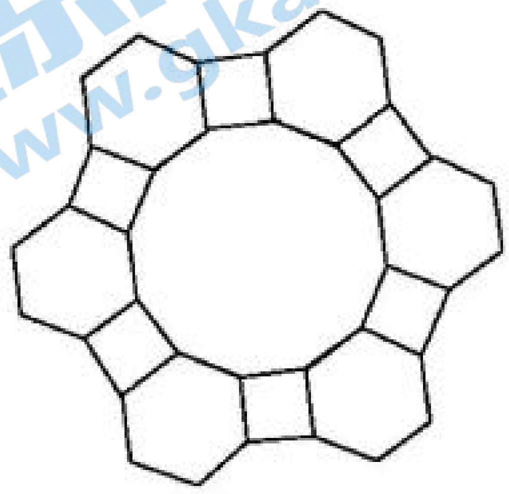


图 4

②当 x_1,x_2,x_3 中恰有两个相等，不妨设 $x_1=x_2\neq x_3$，

由(2)式得$\frac{2}{x_1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{x_3}$，即 $x_3=2+\frac{8}{x_1-4}$，

易知(2)式的全部解为$(x_1,x_2,x_3)=(5,5,10),(5,10,5),(10,5,5),(8,8,4),(8,4,8),(4,8,8),(12,12,3),(12,3,12),(3,12,12)$.

依题设可知用正五边形和正十边形铺设地面，一定会出现两个正十边形有一条边重合的情况，这时，要铺满地面，另一个角是 $72°$，而正五边形的 1 个内角是 $108°$，则$(5,5,10),(5,10,5),(10,5,5)$不合要求. 而对于解$(8,8,4),(8,4,8),(4,8,8),(12,12,3),(12,3,12),(3,12,12)$给出的拼接方法符合要求，且$(8,8,4),(8,4,8),(4,8,8)$对应同一拼法，$(12,12,3),(12,3,12),(3,12,12)$对应同一拼法，如图 2 和图 3. 故这时有两种拼法.

③当 x_1,x_2,x_3 两两不相等，不妨设 $x_1<x_2<x_3$，

由(2)式得$\frac{1}{2}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1}=\frac{3}{x_1}$，即 $x_1\leqslant 5$.

类似②对于解(5,5,10)不能铺设地面的讨论可知，x_1 必须是偶数，同理可得，x_2,x_3 都是偶数.

由 $3\leqslant x_1\leqslant 5$ 知，$x_1=4$，代入(2)式得$\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{4}$，$3\leqslant x_2\leqslant x_3$，

则$\frac{1}{4}=\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}<\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_2}=\frac{2}{x_2}$，解得 $x_2<8$. 故可推出 $x_2=6$，则 $x_3=12$.

从而 x_1,x_2,x_3 两两不相等的全部解为$(4,6,12),(4,12,6),(6,4,12),(6,12,4),(12,6,4),(12,4,6)$，这些给出的正多边形都能铺设地面，它们对应同一拼法，如图 4.

综上，满足条件的拼法最多有 4 种.

9. BCD　A 选项中的数据按从小到大顺序，排出中位数为 10，故 A 错误. B 选项中的数据共有 10 个数，$10\times 0.8=8$，即第 8 个数与第 9 个数的平均数为 18.5，则这组数据的第 80 百分位数是 18.5，故 B 正确. 对于 C 选项，只有 3，4，5 这三个数符合，则 $P=\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10}$，故 C 正确. 对于 D 选项，由全概率公式$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.8\times 0.6+0.2\times 0.1=0.5$，故 D 正确.

10. AD　当 $a=0,b=2$ 时，$a_{n+1}=2a_n$，所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$. 因为 $a_1=1$，所以$\{a_n\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列，则 $S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，故 A 正确. 当 $a=2,b=1$ 时，$a_{n+1}=a_n+2$，即 $a_{n+1}-a_n=2$. 因为 $a_1=1$，所以 $a_n=2n-1$，则 $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=n^2$，故 B 错误. 当 $a=1,b=-1$ 时，$a_{n+1}=-a_n+1$，因为 $a_1=1$，所以 $a_2=0,a_3=1$，所以$\{a_n\}$是周期为 2 的周期数列，则 $a_{10}=0$，故 C 错误. 当 $a=1,b=2$ 时，$a_{n+1}=2a_n+1$，则 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，即$\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$. 因为 $a_1=1$，所以 $a_1+1=2$，所以$\{a_n+1\}$是首项为 2，公比为 2 的等比数列，月

即 $a_n=2^n-1$，故 D 正确.

11. BD　由题意可得 $f(x)=\sin x\cos^2 x$，则 $f(\pi-x)=\sin x\cos^2 x$，$f(\pi-x)+f(x)=2\sin x\cos^2 x\neq 0$，故 A 错误. 因为 $f'(x)=\cos x(1-3\sin^2 x)$，所以当 $x\in(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})$ 时，$f'(x)>0$，故 B 正确. 由 $f(x)=0$ 得 $x=\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π，$\frac{5\pi}{2}$，3π. 则 $f(x)$ 在 $[1,10]$ 内共有 6 个零点，故 C 错误. 由题意可得 $f(x)=\sin x\cos^2 x=\sin x(1-\sin^2 x)=\sin x-\sin^3 x$，令 $\sin x=t(t\in[-1,1])$，则 $y=g(t)=t-t^3$，从而 $g'(t)=1-3t^2=(1-\sqrt{3}t)(1+\sqrt{3}t)$，故 $g(t)$ 在 $(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3})$ 上单调递减；在 $(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$ 上单调递增；在 $(\frac{\sqrt{3}}{3},1)$ 上单调递减. 因为 $g(-1)=0$，$g(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{2\sqrt{3}}{9}$，所以 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$，故 D 正确.

12. ACD　因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x+3)+f(x+1)=f(2)$，所以 $f(x+1)+f(x-1)=f(2)$，所以 $f(x+3)=f(x-1)$，即 $f(x+4)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，则 A 正确. 在 $f(x+3)+f(x+1)=f(2)$ 中，令 $x=-1$，得 $f(2)+f(0)=f(2)$，则 $f(0)=0$. 因为 $f(2-x)=f(4+x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，则 C 正确. 因为 $f(0)=0$，所以 $f(2)=f(0)=0$，所以 $f(2022)=f(2)=0$，则 B 错误. 由函数的对称性与周期性可得 $f(\frac{9}{2})=f(\frac{1}{2})=f(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}$，$f(\frac{7}{2})=f(\frac{5}{2})=-f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$，则 $\sum\limits_{k=1}^{200}kf(k-\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})+2f(\frac{3}{2})+3f(\frac{5}{2})+4f(\frac{7}{2})+\cdots+200f(\frac{399}{2})=\frac{1}{2}[(1+2-3-4)+(5+6-7-8)+\cdots+(197+198-199-200)]=\frac{1}{2}\times(-4\times 50)=-100$，则 D 正确.

13. $(\frac{3}{2},2)$　由题意可知与向量 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量为 $\boldsymbol{b}_0=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\boldsymbol{b}_0=5\times\frac{1}{2}\times(\frac{3}{5},\frac{4}{5})=(\frac{3}{2},2)$.

14. -14　$(\frac{y}{x}-1)(x+y)^7$ 的展开式中 x^4y^3 的系数为 $C_7^2-C_7^3=-14$.

15. $\frac{7\sqrt{3}}{12}$　由题意可知该棱台的侧棱长为 1，棱台的高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，上底面边长 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，下底面边长为 $\sqrt{2}$，所以该棱台的体积是 $\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}+2+\sqrt{\frac{1}{2}\times 2})\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{12}$.

16. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{21}}{3}$　当直线 l 与双曲线 C 的一支交于两点时，不妨设 $F(c,0)$，过 F 作双曲线 C 的一条渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 的垂线 l，垂足为 M，直线 l 与另一条渐近线 $y=-\frac{b}{a}x$ 交于点 N，则 $|FM|=b$，$|OM|=a$，因为 $|MN|=4\sqrt{3}a$，所以 $\tan\angle MON=\frac{|MN|}{|OM|}=\frac{4\sqrt{3}a}{a}=4\sqrt{3}$，设渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 的倾斜角为 θ，则 $\tan\angle MON=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=4\sqrt{3}$，解得 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\tan\theta=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$（舍去），即 $\tan\theta=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故双曲线 C 的离心率 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$. 当直线 l 与双曲线 C 的两支各交于一点时，不妨设 $F(c,0)$，过 F 作双曲线 C 的一条渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 的垂线 l，垂足为 M，直线 l 与另一条渐近线 $y=-\frac{b}{a}x$ 交于点 N，则 $|FM|=b$，$|OM|=a$，因为 $|MN|=4\sqrt{3}a$，所以 $\tan\angle MON=\frac{|MN|}{|OM|}=\frac{4\sqrt{3}a}{a}=4\sqrt{3}$. 设渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 的倾斜角为 θ，则 $\tan\angle MON=\tan(\pi-2\theta)=-\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=4\sqrt{3}$，解得 $\tan\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$（舍去），即 $\tan\theta=\frac{b}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故双曲线 C 的离心率 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$. 综上，双曲线 C 的离心率是 $\frac{\sqrt{7}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

17.(1)解：因为 $a_n^2-na_na_{n-1}+a_n-na_{n-1}=0$，所以 $(a_n-na_{n-1})(a_n+1)=0$. …… 2分

因为 $a_n>0$，所以 $a_n-na_{n-1}=0$，即 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=n(n\geqslant 2)$. …… 3分

因为 $a_1=1$，所以 $\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\dfrac{a_4}{a_3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2\times3\times4\times\cdots\times n(n\geqslant 2)$，即 $a_n=n!\ (n\geqslant 2)$. …… 4分

当 $n=1$，$a_1=1$ 满足上式，故 $a_n=n!$. …… 5分

(2)证明：由(1)可知 $a_{n+1}=(n+1)!$，则 $b_n=\dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$. …… 7分

所以 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=(\dfrac{1}{1!}-\dfrac{1}{2!})+(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!})+\cdots+(\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!})=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$. …… 9分

因为 $\dfrac{1}{(n+1)!}\in(0,\dfrac{1}{2}]$，所以 $S_n\in[\dfrac{1}{2},1)$，即 $\dfrac{1}{2}\leqslant S_n<1$. …… 10分

18.解：(1)由题意可得 $\bar{x}=40\times0.02+50\times0.3+60\times0.4+70\times0.23+80\times0.04+90\times0.01=60$；…… 2分

$s^2=400\times0.02+100\times0.3+0\times0.4+100\times0.23+400\times0.04+900\times0.01=86$. …… 4分

(2)①由(1)可知 $\mu=60$，$\delta=\sqrt{86}=9.27$，…… 6分

则 $P(50.73<Z\leqslant69.27)=P(60-9.27<Z\leqslant60+9.27)=P(\mu-\sigma<Z\leqslant\mu+\sigma)\approx0.6826$. …… 8分

②由①可知1名学生的体重位于 $(50.73,69.27]$ 的概率为 0.6826. …… 10分

因为 $X\sim B(50,0.6826)$，所以 $E(X)=50\times0.6826=34.13$. …… 12分

19.解：(1)因为 $\sqrt{2}c\sin(A+\dfrac{\pi}{4})=b$，所以 $\sqrt{2}\sin C(\sin A\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos A\sin\dfrac{\pi}{4})=\sin B$，

即 $\sin C\sin A+\sin C\cos A=\sin B$. …… 2分

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，…… 3分

所以 $\sin C=\cos C$，即 $\tan C=1$. …… 4分

因为 $0<C<\pi$，所以 $C=\dfrac{\pi}{4}$. …… 5分

(2)因为 D 为 AB 边的中点，所以 $\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$，…… 6分

所以 $\overrightarrow{CD}^2=\dfrac{\overrightarrow{CA}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}^2}{4}=\dfrac{b^2+a^2+2ab\cos C}{4}=\dfrac{b^2+4b+8}{4}=\dfrac{(b+2)^2+4}{4}$. …… 8分

在△ABC 中，由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得 $b=\dfrac{2\sqrt{2}\sin B}{\sin(B+\dfrac{\pi}{4})}=\dfrac{4}{1+\dfrac{1}{\tan B}}$. …… 9分

因为△ABC 为锐角三角形，且 $C=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $B\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$，…… 10分

则 $\tan B\in(1,+\infty)$，故 $b\in(2,4)$. …… 11分

因为 $b\in(2,4)$，所以 $|\overrightarrow{CD}|\in(\sqrt{5},\sqrt{10})$，即线段 CD 长的取值范围为 $(\sqrt{5},\sqrt{10})$. …… 12分

20.(1)证明：连接 AC，记 $AC\cap BD=O$，连接 OE.

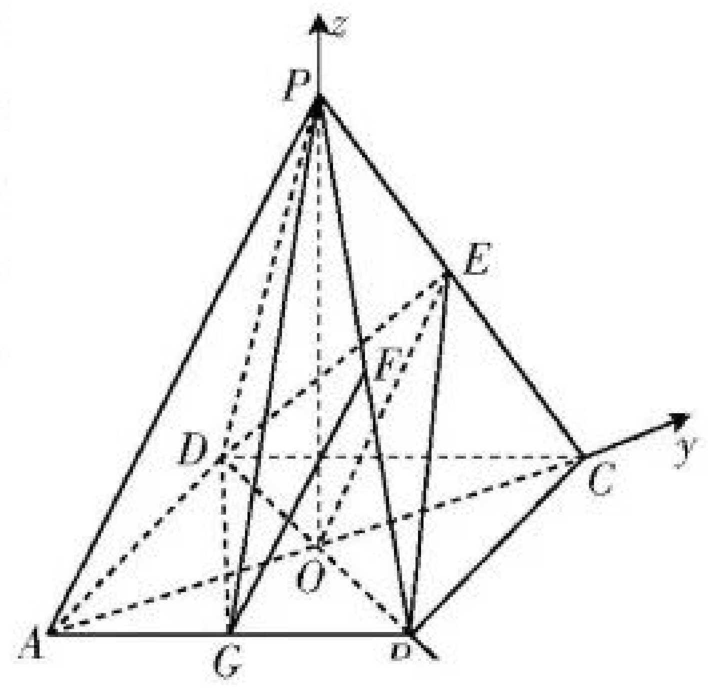
因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 O 是 AC 的中点，…… 1分

因为 E 是 PC 的中点，所以 $OE/\!/PA$. …… 2分

因为 G,F 分别是棱 AB,PB 的中点，所以 $GF/\!/PA$，所以 $GF/\!/OE$. …… 4分

因为 $OE\subset$ 平面 BDE，$GF\not\subset$ 平面 BDE，所以 $GF/\!/$ 平面 BDE. …… 5分

(2)解：易证 OB,OC,OP 两两垂直，故以 O 为原点，分别以 $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OP}$ 的方向为 x,y,z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $AB=4$，则 $A(0,-2\sqrt{2},0)$，$B(2\sqrt{2},0,0)$，$D(-2\sqrt{2},0,0)$，$E(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$，$P(0,0,2\sqrt{2})$，

从而 $\overrightarrow{AB}=(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{BD}=(-4\sqrt{2},0,0)$，$\overrightarrow{BE}=(-2\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{DP}=$

$(2\sqrt{2},0,2\sqrt{2})$. ………………………………………………………………………………………… 6分

因为$\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AB}=(2\sqrt{2}\lambda,2\sqrt{2}\lambda,0)$，所以$G(2\sqrt{2}\lambda,2\sqrt{2}\lambda-2\sqrt{2},0)$，

则$\overrightarrow{DG}=(2\sqrt{2}\lambda+2\sqrt{2},2\sqrt{2}\lambda-2\sqrt{2},0)$. …………………………………………………… 7分

设平面BDE的法向量为$\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-4\sqrt{2}x_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=-2\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}y_1+\sqrt{2}z_1=0,\end{cases}$ 令$y_1=1$，得$\boldsymbol{n}=(0,1,-1)$. ……………………………… 8分

设平面PDG的法向量为$\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DP}=2\sqrt{2}x_2+2\sqrt{2}z_2=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DG}=(2\sqrt{2}\lambda+2\sqrt{2})x_2+(2\sqrt{2}\lambda-2\sqrt{2})y_2=0,\end{cases}$ 令$x_2=\lambda-1$，得$\boldsymbol{m}=(\lambda-1,-\lambda-1,-\lambda+1)$. … 9分

设平面BDE与平面PDG的夹角为θ，

则$\cos\theta=\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{(\lambda-1)^2+(-\lambda-1)^2+(-\lambda+1)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\lambda^2-2\lambda+3}}$. ………… 10分

因为$0\leqslant\lambda\leqslant1$，所以$3\lambda^2-2\lambda+3=3(\lambda-\dfrac{1}{3})^2+\dfrac{8}{3}\geqslant\dfrac{8}{3}$，所以$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\lambda^2-2\lambda+3}}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\dfrac{8}{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

则当$\lambda=\dfrac{1}{3}$时，平面BDE与平面PDG夹角的余弦值取得最大值$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………………… 12分

21.(1)解：由题意可得$\begin{cases}2b=2c,\\ \dfrac{(-\sqrt{2})^2}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$解得$a=2,b=c=\sqrt{2}$. ………………………………………… 3分

故所求椭圆C的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ………………………………………………………… 4分

(2)证明：设直线MN的方程为$x=my+\sqrt{2}$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}x=my+\sqrt{2},\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1,\end{cases}$消元得$(m^2+2)y^2+2\sqrt{2}my-2=0$.

所以$y_1+y_2=-\dfrac{2\sqrt{2}m}{m^2+2}$，$y_1y_2=-\dfrac{2}{m^2+2}$①，………………………………………………………… 5分

直线AM的方程为$y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，

与直线l:$x=2\sqrt{2}$联立，可得点P的纵坐标$y_P=\dfrac{y_1}{x_1+2}(2\sqrt{2}+2)$. …………………………………… 6分

直线AN的方程为$y=\dfrac{y_2}{x_2+2}(x+2)$与直线$l$:$x=2\sqrt{2}$联立，

可得点Q的纵坐标$y_Q=\dfrac{y_2}{x_2+2}(2\sqrt{2}+2)$，……………………………………………………………… 7分

则$k_{MB}=\dfrac{y_1}{x_1-2}=\dfrac{y_1}{my_1+\sqrt{2}-2}$，$k_{BQ}=\dfrac{y_Q}{2\sqrt{2}-2}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{y_2}{my_2+\sqrt{2}+2}$.

故$k_{MB}-k_{BQ}=\dfrac{y_1}{my_1+\sqrt{2}-2}-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{y_2}{my_2+\sqrt{2}+2}=\dfrac{2(y_1+y_2)-2\sqrt{2}my_1y_2}{(my_1+\sqrt{2}-2)(my_2+\sqrt{2}-2)(2-\sqrt{2})}$②，…… 9分

把①代入②，可得$k_{MB}-k_{BQ}=\dfrac{2(-\dfrac{2\sqrt{2}m}{m^2+2})-2\sqrt{2}m(-\dfrac{2}{m^2+2})}{(my_1+\sqrt{2}-2)(my_2+\sqrt{2}-2)(2-\sqrt{2})}=0$，

所以直线MQ与x轴相交于右顶点B. ……………………………………………………………

同理可得直线 NP 与 x 轴相交于右顶点 B. 故直线 MQ 与直线 NP 相交于点 B. ······················ 12分

22. (1)证明：当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-e^x+1$，所以 $f'(x)=x-e^x+1(x\in\mathbf{R})$.

令 $h(x)=x-e^x+1$，则 $h'(x)=1-e^x$. ·· 1分

由 $h'(x)>0$，得 $x<0$，由 $h'(x)<0$，得 $x>0$，

则 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. ·· 2分

因为 $h(0)=0-e^0+1=0$，所以当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$h(x)\leqslant 0$，即 $f'(x)\leqslant 0$，则 $f(x)$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上单调递减. ·· 3分

因为 $f(0)=0+0-e^0+1=0$，所以当 $x<0$ 时，$f(x)>0$，当 $x>0$ 时，$f(x)<0$. ······························ 4分

(2)解：由题意可得 $g(x)=\cos x-ax^2-x+e^x$，则 $g'(x)=-\sin x-2ax-1+e^x$，且 $g'(0)=0$. ········ 5分

令 $G(x)=g'(x)=-\sin x-2ax-1+e^x$，则 $G'(x)=-\cos x-2a+e^x$.

令 $H(x)=G'(x)=-\cos x-2a+e^x$，则 $H'(x)=\sin x+e^x$. ·· 6分

当 $x>0$ 时，$\sin x\geqslant -1$，$e^x>1$，所以 $\sin x+e^x>0$，即 $H'(x)=\sin x+e^x>0$.

所以 $G'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，则 $G'(x)>G'(0)=-2a$. ·· 7分

①当 $-2a\geqslant 0$，即 $a\leqslant 0$ 时，$G'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $G(x)=g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

因为 $g'(0)=0$，所以 $g'(x)>g'(0)=0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 与 $x=0$ 是极大值点矛盾，即 $a\leqslant 0$ 不符合题意. ·· 8分

②当 $-2a<0$，即 $a>0$ 时，因为 $G'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，且 $G'(0)=-2a<0$，

$G'(\ln(2a+2))=-\cos[\ln(2a+2)]-2a+e^{\ln(2a+2)}=-\cos[\ln(2a+2)]-2a+(2a+2)>0$，

所以 $\exists x_0\in(0,\ln(2a+2))$，$G'(x_0)=0$，

则当 $x\in(0,x_0)$ 时，$G'(x_0)<0$，即 $g'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上是减函数，从而 $g'(x)<g'(0)=0$，

故 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减. ·· 10分

当 $x<0$ 时，对 $\forall x\in(-\frac{\pi}{6},0)$，$\sin(-\frac{\pi}{6})<\sin x<\sin 0$，$e^{-\frac{\pi}{6}}<e^x<1$，

即 $-\frac{1}{2}<\sin x<0$，$0.59<e^x<1$，所以 $\sin x+e^x>0$，则当 $x\in(-\frac{\pi}{6},0)$ 时，$H'(x)=\sin x+e^x>0$.

故 $G'(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{6},0)$ 上是增函数.

因为 $G'(x)<G'(0)=-2a<0$，即当 $a>0$ 时，$g'(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{6},0)$ 上是减函数，

所以 $g'(x)>g'(0)=0$，则 $g(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{6},0)$ 上单调递增，符合 $x=0$ 是极大值点.

故所求实数 a 的取值范围为 $(0,+\infty)$. ·· 12分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〞精益求精、专业严谨〞的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。