

高三数学试卷

班级 _____ 姓名 _____ 学号 _____

- | | |
|---|---|
| 考 | 1. 本试卷共 3 页, 满分 150 分, 考试时长 120 分钟。 |
| 生 | 2. 试题答案一律书写在答题纸上, 在试卷上作答无效。 |
| 须 | 3. 在答题纸上, 选择题用 2B 铅笔作答, 非选择题用黑色字迹签字笔作答。 |
| 知 | 4. 考试结束后, 将答题纸、试卷和草稿纸一并交回。 |

一、选择题: 本大题共 10 道小题, 每小题 4 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目的要求。把正确答案涂写在答题卡上相应的位置。

1. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 M 满足 $\complement_U M = \{1, 3\}$, 则
 - A. $2 \in M$
 - B. $3 \in M$
 - C. $4 \notin M$
 - D. $5 \notin M$
2. 已知向量 $\vec{a} = (m, 1)$, $\vec{b} = (-1, 2)$. 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $m =$
 - A. 2
 - B. 1
 - C. -1
 - D. $-\frac{1}{2}$
3. 下列函数中, 值域为 $(1, +\infty)$ 的是
 - A. $y = \frac{1}{\sin x}$
 - B. $y = \sqrt{x} + 1$
 - C. $y = \lg(|x| + 1)$
 - D. $y = 2^x + 1$
4. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, $BD = 2DA$. 记 $\vec{CA} = m$, $\vec{CD} = n$, 则 $\vec{CB} =$
 - A. $3m - 2n$
 - B. $-2m + 3n$
 - C. $3m + 2n$
 - D. $-2m + 3n$
5. 若 $ab > 0$, 且 $a < b$, 则下列不等式一定成立的是
 - A. $a^2 < b^2$
 - B. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
 - C. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$
 - D. $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$
6. 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, 点 A 在 C 上, 点 $B(3, 0)$, 若 $|AF| = |BF|$, 则 $|AB| =$
 - A. 2
 - B. $2\sqrt{2}$
 - C. 3
 - D. $3\sqrt{2}$
7. 紫砂壶是中国特有的手工制造陶土工艺品, 其制作始于明朝正德年间. 紫砂壶的壶型众多, 经典的有西施壶、掇球壶、石瓢壶、潘壶等. 其中, 石瓢壶的壶体可以近似看成一个圆台 (即圆锥用平行

于底面的平面截去一个锥体得到的).下图给出了一个石瓢壶的相关数据(单位:cm),那么该壶的容量约为

- A. 100cm^3
 B. 200cm^3
 C. 300cm^3
 D. 400cm^3



8. “ $\sin\theta + \tan\theta > 0$ ”是“ θ 为第一或第三象限角”的

- A. 充分而不必要条件
 B. 必要而不充分条件
 C. 充分必要条件
 D. 既不充分也不必要条件

9. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角均为 30° , 则

- A. $AB = 2AD$
 B. AB_1 与 A_1D 所成的角为 60°
 C. $AC = CB_1$
 D. B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 45°

10. 黎曼函数由德国著名数学家黎曼 (Riemann) 发现提出. 黎曼函数定义在 $[0,1]$ 上, 其解析式为:

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}, & \text{当 } x = \frac{q}{p} (p, q \text{ 均为正整数, 且 } \frac{q}{p} \text{ 为既约真分数)} \\ 0, & \text{当 } x = 0, 1 \text{ 或 } [0, 1] \text{ 上的无理数} \end{cases}$$

若函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且 $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) + f(x+2) = 0$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = R(x)$, 则:

$$f(\pi) - f\left(\frac{2023}{5}\right) =$$

- A. $-\frac{2}{5}$ B. $-\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{2}{5}$

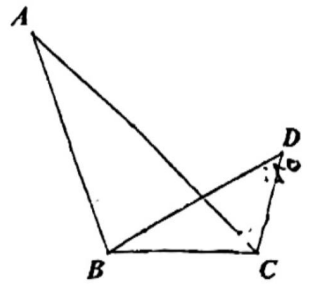
二、填空题: 本大题共 5 小题, 共 25 分. 把答案填在答题纸中相应的横线上.

11. 函数 $f(x) = \log_2(1-x) + \sqrt{x}$ 的定义域是 _____

12. 复数 z 满足: $(1-i)z = 2i$, 则 $|z| =$ _____

13. 记双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 e , 写出满足条件“直线 $y = 3x$ 与 C 无公共点”的 e 的一个值_____.

14. 如图, 为了测量湖两侧的 A, B 两点之间的距离, 某观测小组的三位同学分别在 B 点, 距离 A 点 30km 处的 C 点, 以及距离 C 点 10km 处的 D 点进行观测. 甲同学在 B 点测得 $\angle DBC = 30^\circ$, 乙同学在 C 点测得 $\angle ACB = 45^\circ$, 丙同学在 D 点测得 $\angle BDC = 45^\circ$, 则 A, B 两点间的距离为_____ km .



15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + a, & x < a \\ x^2 + 2ax, & x \geq a \end{cases}$ 给出下列四个结论:

- ①当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 的最小值为 0 ;
- ②当 $a \in (-1, 0) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$ 时, $f(x)$ 不存在最小值;
- ③ $f(x)$ 零点个数为 $g(a)$, 则函数 $g(a)$ 的值域为 $\{0, 1, 2, 3\}$;
- ④当 $a \geq 1$ 时, 对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}, f(x_1) + f(x_2) \geq 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分。把答案填在答题纸中相应的位置上。

16. (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = 2\cos x \cdot \cos(x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$)，从条件①、条件②、条件③这三个条件中选

择一个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在。

条件①： $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$ ；

条件②：函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上是增函数；

条件③： $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 。

注：如果选择的条件不符合要求，得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分。

(I) 求 φ 的值；

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ 上的最大值和最小值。

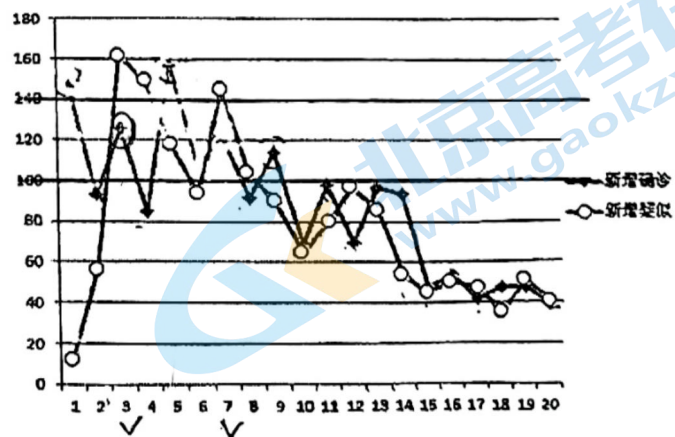
17. (本小题 13 分)

右图是 2023 年 11 月 1 日到 11 月 20 日，某地区甲流疫情新增数据的走势图。

(I) 从这 20 天中任选 1 天，求新增确诊和新增疑似的人数都超过 100 的概率；

(II) 从新增确诊的人数超过 100 的日期中任选两天，用 X 表示新增确诊的人数超过 140 的天数，求 X 的分布列和数学期望；

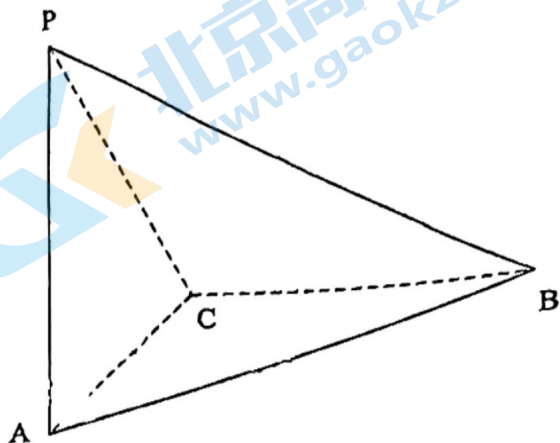
(III) 记每天新增确诊的人数为 X ，每天新增疑似的人数 Y ，根据这 20 天统计数据，试判断 DX 与 DY 的大小关系 (结论不要求证明)。



18. (本小题 14 分)

如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $PA = AC = BC = 2$, $PB = 2\sqrt{3}$.

- (I) 求证: $BC \perp$ 平面 PAC ;
- (II) 求二面角 $A-PB-C$ 的大小;
- (III) 求点 C 到平面 PAB 的距离.



19. (本小题 14 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $P(1, \frac{3}{2})$, 焦距为 2.

- (I) 求椭圆 E 的方程;
- (II) 设椭圆 E 的右焦点为点 F , 右顶点为点 A . 过点 F 的直线 l 交椭圆 E 于不同的两点 M, N , 直线 AM, AN 与 y 轴分别交于点 B, C . 当 $|BC| = 12$ 时, 求直线 l 的方程.

20. (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = mx \ln x - x^2 + 1 (m \in \mathbf{R})$.

(I) 当 $m = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 若 $f(x) \leq 0$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 求 m 的取值范围;

(III) 试比较 $\ln 4$ 与 $\sqrt{2}$ 的大小, 并说明理由.

21. (本小题 15 分)

设无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $\{i_n\}$ 为单调递增的无穷正整数数列, 记 $A_n = S_{i_{n+1}} - S_{i_n}$,

$(n = 1, 2, \dots)$, 定义 $\Omega = \{j \in \mathbf{N}^* \mid S_k - S_j \geq 0, k = j+1, j+2, \dots\}$.

(I) 若 $a_n = n, i_n = n^2 (n = 1, 2, \dots)$, 写出 A_1, A_2 的值;

(II) 若 $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (n = 1, 2, \dots)$, 求 Ω ;

(III) 设 $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ 求证: 对任意的无穷数列 $\{a_n\}$, 存在数列 $\{i_n\}$, 使得 $\{\operatorname{sgn}(A_n)\}$ 为

常数列.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：**京考一点通**，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！



 **微信搜一搜**

 **京考一点通**