2022 北京昌平二中高一（上）期中

数　　学

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 下列四组函数中，表示同一函数的是（　　）

A. $y=\sqrt{x^2}$，$y=\left(\sqrt{x}\right)^2$

B. $y=|x|$，$y=\sqrt{x^2}$

C. $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$y=x+1$

D. $y=x$，$y=\dfrac{x^2}{x}$

2. 下列函数中，既是奇函数又是增函数的为（　　）

A. $y=x+1$　　B. $y=-x^2$　　C. $y=\dfrac{1}{x}$　　D. $y=x|x|$

3. 命题“$\forall x\in[0,+\infty), x^3+x\geq 0$”的否定是

A. $\forall x\in(-\infty,0), x^3+x<0$

B. $\forall x\in(-\infty,0), x^3+x\geq 0$

C. $\exists x_0\in[0,+\infty), {x_0}^3+x_0<0$

D. $\exists x_0\in[0,+\infty), {x_0}^3+x_0\geq 0$

4. 设 $x\in\mathbf{R}$，则“$\left|x-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$”是“$x<1$”的（　　）条件．

A. 充分而不必要

B. 必要而不充分

C. 充要

D. 既不充分也不必要

5. 在以下区间中，存在函数 $f(x)=x^3+3x-3$ 零点的是（ ）

A. $[-1,0]$　　B. $[1,2]$　　C. $[0,1]$　　D. $[2,3]$

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x, x>0\\ x+1, x\leq 0\end{cases}$，若 $f(a)+f(1)=0$，则实数 a 的值等于（　　）

A. -3　　B. -1　　C. 1　　D. 3

7. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，下列命题中的真命题是（　　）

A. 若 $a>b$，则 $|a|>|b|$

B. 若 $a>b$，则 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$

C. 若 $a>b$，则 $a^3>b^3$

D. 若 $a>b$，则 $\dfrac{a}{b}>1$

8. 设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 R，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)$ 是增函数，且 $f(1)=0$，则不等式 $xf(x)\geq 0$ 的解集是（　　）

A. $[-1,0]\cup[1,+\infty)$　　　　B. $(-\infty,-1]\cup[0,1]$

C. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　　　　D. 以上结果都不对

9. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 的奇函数，且 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上单调递增，若 $f(2t-1)+f\left(\frac{t}{2}\right)<0$，则实数 t 的取值范围为（　　）

A. $\left(-\infty,\frac{2}{5}\right)$　　B. $\left[0,\frac{2}{5}\right)$　　C. $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$　　D. $\left[0,\frac{2}{3}\right)$

10. 若定义在 R 上 函数 $f(x)$ 满足：对任意 x_1，$x_2\in R$ 有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+1$ 则下列说法一定正确的是

A. $f(x)$ 为奇函数　　B. $f(x)$ 为偶函数　　C. $f(x)+1$ 为奇函数　　D. $f(x)+1$ 为偶函数

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分.

11. 函数 $y=\sqrt{\frac{1-x}{x+2}}$ 的定义域为__________.

12. 已知函数 $f\left(x\right)=x^2-4x-1$ 的两个零点分别为 x_1 和 x_2，则 $x_1^2+x_2^2$ 的值为______.

13. 已知 $f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)=x^2-1$，则当 $x<0$ 时，$f\left(x\right)=$______.

14. 函数 $f\left(x\right)=x+\frac{4}{x+1}\left(x>-1\right)$ 的最小值为______；对应的 x 的取值是______.

15. 已知函数 $f(x)=x^2-ax+1$，若 $f\left(x\right)$ 满足：对于任意的 x_1，$x_2\in\left(-\infty,-1\right]$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}<0$，则实数 a 的取值范围是______.

16. 对于实数 a，b，定义运算"*"：$a*b=\begin{cases}a^2-ab, & a<b\\ b^2-ab, & a>b\end{cases}$，设 $f(x)=(2x-1)*(x-1)$，且关于 x 的方程为 $f(x)=m(m\in R)$ 恰有三个互不相等的实数根 x_1,x_2,x_3，则 m 的取值范围是______.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

17. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，若集合 $A=\left\{x\middle|3<x<7\right\}$，$B=\left\{x\middle|x<2\text{ 或 }x>4\right\}$.

（1）求 $A\cap B$，$A\cup B$，$\left(\complement_U A\right)\cap\left(\complement_U B\right)$；

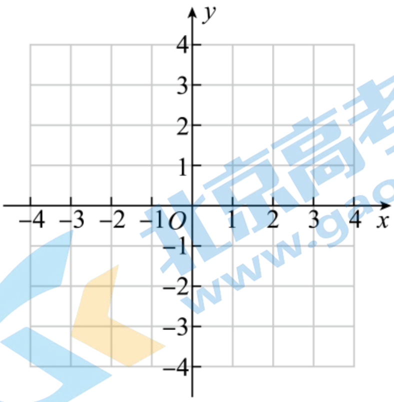
（2）若集合 $P=\left\{x\middle|x-a\geq 0\right\}$ 且 $P\cap A=A$，求实数 a 的取值范围.

18. 已知函数 $f(x)=2x+\dfrac{b}{x}+c$ (b，c 为常数)，$f(1)=4$，$f(2)=5$.

（1）求函数 $f(x)$的解析式；.

（2）用定义证明：函数 $f(x)$在区间$(0，1)$上是减函数.

19. 已知函数 $f\left(x\right)=x\left(\left|x\right|-2\right)$.



（1）画出此函数的图像；

（2）求不等式 $f\left(x\right)<\dfrac{1}{2}$ 解集；

（3）若函数 $h\left(x\right)=f\left(x\right)-2a$ 有三个零点，求 a 取值范围.

20. 已知函数 $f(x)=ax^2+(a-2)x-2$.

（1）若 $f(x)\geq 0$ 的解集 $\left\{x\middle|x\leq -1 \text{ 或 } x\geq 2\right\}$，求 a 的值；

（2）分类讨论不等式 $f(x)\geq 0$ 的解集.

21. 通过研究学生的学习行为，心理学家发现，学生的接受能力依赖于老师引入概念和描述问题所用的时间：讲授开始时，学生的兴趣激增；中间有一段不太长的时间，学生的兴趣保持较理想的状态；随后学生的注意力开始分散.分析结果和实验表明：讲课开始 x min 时，学生注意力集中度的值 $f(x)$（$f(x)$ 的值越大，表示学生的注意力越集中）与 x 的关系如下：$f(x)=\begin{cases}-0.1x^2+2.6x+43, & 0<x\leq 10,\\ 59,10<x\leq 16, \\ -3x+107,16<x\leq 30.\end{cases}$

（1）讲课开始5 min 时和讲课开始20 min 时比较，何时学生的注意力更集中？

（2）讲课开始多少分钟时，学生的注意力最集中，能持续多久？

（3）一道数学难题，需要讲解13 min，并且要求学生的注意力集中度至少达到 55，那么老师能否在学生

达到所需状态下讲授完这道题目？请说明理由.

22. 对于区间[a, b] (a<b), 若函数 $y=f\left(x\right)$ 同时满足：① $f\left(x\right)$ 在[a, b]上是单调函数，②函数 $y=f\left(x\right)$ 在[a, b]的值域是[a, b]，则称区间[a, b]为函数 $f\left(x\right)$ 的“保值”区间

（1）求函数 $y=x^2$ 的所有“保值”区间

（2）函数 $y=x^2+m\left(m\neq 0\right)$ 是否存在“保值”区间？若存在，求 m 的取值范围，若不存在，说明理由

参考答案

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 【答案】B

【解析】

【分析】分别判断各个选项中两个函数的定义域和解析式是否相同，从而得到结果.

【详解】对于 A，$y=\sqrt{x^2}$ 定义域为 R，$y=\left(\sqrt{x}\right)^2$ 定义域为 $[0,+\infty)$，$\therefore y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$ 不是同一函数，A 错误；

对于 B，$y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 定义域均为 R，且 $\sqrt{x^2}=|x|$，$\therefore y=|x|$ 与 $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$ 是同一函数，B 正确；

对于 C，$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 定义域为 $\{x|x\neq 1\}$，$y=x+1$ 定义域为 R，$\therefore y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$ 不是同一函数，C 错误；

对于 D，$y=x$ 定义域为 R，$y=\dfrac{x^2}{x}$ 定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，$\therefore y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 不是同一函数，D 错误.

故选：B.

2. 【答案】D

【解析】

【分析】利用奇偶性和单调性的定义，结合基本函数的性质逐个分析判断即可.

【详解】对于 A，函数的定义域为 $\mathbf{R}$，因为 $f(-x)=-x+1\neq f(x)$ 且 $f(-x)=-x+1\neq -f(x)$，所以此函数为非奇非偶函数；

对于 B，函数的定义域为 $\mathbf{R}$，因为 $f(-x)=-(-x)^2=-x^2=f(x)$，所以此函数为偶函数；

对于 C，函数的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，因为 $f(-x)=\dfrac{1}{-x}=-\dfrac{1}{x}=-f(x)$，所以此函数为奇函数，而此函数在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上为减函数；

对于 D，函数的定义域为 $\mathbf{R}$，因为 $f(-x)=-x|-x|=-x|x|=-f(x)$，所以此函数为奇函数，当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=x|x|=x^2$ 为增函数，又函数为奇函数，所以函数在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

故选：D

3. 【答案】C

【解析】

【详解】试题分析：全称命题的否定是存在性命题，所以，命题“$\forall x\in[0,+\infty), x^3+x\geq 0$”的否定是

$\exists x_0\in[0,+\infty), x_0{}^3+x_0<0$，选 C.

考点：全称命题与存在性命题.

4. 【答案】A

【解析】

【分析】先求解$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$，再根据充分与必要条件的概念分析即可.

【详解】解：因为$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{1}{2}<x-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\Rightarrow 0<x<1$.

所以“$0<x<1$”是“$x<1$”的充分不必要条件.

故选：A

5. 【答案】C

【解析】

【详解】分析：要判断函数 f（x）=x3+3x-3 的零点的位置，我们可以根据零点存在定理，则该区间两端点对应的函数值，应异号，将四个答案中各区间的端点依次代入函数的解析式，易判断零点的位置.

解答：解：∵f（-1）=-7

f（0）=-3

f（1）=1

f（2）=11

f（3）=33

根据零点存在定理，∵f（0）f（1）＜0

故[0，1]存在零点

故选 C

点评：要判断函数的零点位于哪个区间，可以根据零点存在定理，即如果函数 f（x）在区间（a，b）上存在一个零点，则 f（a）?f（b）＜0，如果方程在某区间上有且只有一个根，可根据函数的零点存在定理进行解答，但要注意该定理只适用于开区间的情况，如果已知条件是闭区间或是半开半闭区间，我们要分类讨论.

6. 【答案】A

【解析】

【分析】首先求得 $f(1)$ 的值，然后分类讨论确定实数 a 的值即可，需要注意自变量的取值范围.

【详解】 $f(1)=2\times1=2$，据此结合题意分类讨论：

当 $a>0$ 时， $f(a)=2a$，

由 $f(a)+f(1)=0$ 得 $2a+2=0$，解得 $a=-1$，舍去；

当 $a\le0$ 时， $f(a)=a+1$，

由 $f(a)+f(1)=0$ 得 $a+1+2=0$，解得 $a=-3$，满足题意.

故选：A.

7. 【答案】C

【解析】

【分析】根据基本不等关系，结合具体实例对选项一一判断即可.

【详解】对于 A，若 $a=1,b=-2$，满足 $a>b$，此时 $|a|<|b|$，故 A 错误；

对于 B，若 $a=2,b=1$，满足 $a>b$，此时 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，故 B 错误；

对于 C，若 $a>b$，则 $a^3>b^3$，故 C 正确；

对于 D，若 $a=1,b=-2$，满足 $a>b$，此时 $\frac{a}{b}<1$，故 D 错误；

故选：C

8. 【答案】C

【解析】

【分析】当 $x=0,-1,1$ 时，不等式 $xf(x)\ge0$ 显然成立，再讨论当 $x\ne0,x\ne-1,x\ne1$ 时不等式的解集，综合即得解.

【详解】解： $\because$ 奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数， f （1） $=0$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为增函数，且 $f(-1)=-f$ （1） $=0$，

当 $x=0,-1,1$ 时，不等式 $xf(x)\ge0$ 显然成立，

当 $x\ne0,x\ne-1,x\ne1$ 时，

则不等式等价为 $x>0$ 时， $f(x)>0$，此时 $x>1$；

当 $x<0$ 时， $f(x)<0$，此时 $x<-1$，

综上不等式的解为$x\le -1$或$x\ge 1$，

故不等式的解集为：$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

故选：C

9. 【答案】B

【解析】

【分析】根据奇函数将$f(2t-1)+f\left(\frac{t}{2}\right)<0$化简一下，再根据$f(x)$是定义在$\left[-1,1\right]$上的增函数，建立不等式组进行求解即可.

【详解】$\because f(x)$是奇函数

$\therefore f(2t-1)+f\left(\frac{t}{2}\right)<0$等价为$f(2t-1)<-f(\frac{t}{2})=f(-\frac{t}{2})$，

$\because f(x)$在$\left[-1,0\right]$上单调递增，且$f(x)$是奇函数，

$\therefore f(x)$在$\left[-1,1\right]$上单调递增，

$$\therefore \begin{cases} -1\le 2t-1\le 1 \\ -1\le \frac{t}{2}\le 1 \\ 2t-1<-\frac{t}{2} \end{cases}，即\begin{cases} 0\le t\le 1 \\ -2\le t\le 2 \\ t<\frac{2}{5} \end{cases}$$

解得：$0\le t<\frac{2}{5}$.

故选：B

10. 【答案】C

【解析】

【详解】$x_1=x_2=0$，则$f\left(0\right)=f\left(0\right)+f\left(0\right)+1$，$\therefore f\left(0\right)=-1$，

令$x_1=x$，$x_2=-x$，

则$f\left(0\right)=f\left(x\right)+f\left(-x\right)+1$，

所以$f\left(x\right)+1+f\left(-x\right)+1=0$，

即$f\left(x\right)+1=-\left[f\left(-x\right)+1\right]$，$f(x)+1$为奇函数，故选C.

第二部分（非选择题共110分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分.

11. 【答案】$(-2,1]$

【解析】

【详解】试题分析：$\frac{1-x}{x+2}\geq 0\Rightarrow -2<x\leq 1$，故定义域为$(-2,1]$.

考点：函数的定义域.

12. 【答案】18

【解析】

【分析】根据函数零点的定义以及韦达定理可得结果.

【详解】因为函数 $f\left(x\right)=x^2-4x-1$的两个零点分别为 x_1 和 x_2，

所以 x_1 和 x_2 是 $x^2-4x-1=0$ 的两个实根，

所以 $x_1+x_2=4$，$x_1x_2=-1$，

所以 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_2x_2=4^2-2\times(-1)=18$.

故答案为：18.

13. 【答案】$-x^2+1$

【解析】

【分析】当 $x<0$ 时，根据奇函数的性质转到 $x>0$ 时的解析式可求得结果.

【详解】当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f\left(x\right)=-f\left(-x\right)=-\left[\left(-x\right)^2-1\right]=-x^2+1$.

故答案为：$-x^2+1$

14. 【答案】　① 3　②. 1

【解析】

【分析】由基本不等式积定求和的最小值，$x+1>0$ 的条件下，当且仅当 $x+1=\frac{4}{x+1}$ 时取到最小值，即可求出此时的 x 的取值

【详解】因为 $x>-1$，

所以 $x+1>0$，

所以 $y=x+\frac{4}{x+1}=x+1+\frac{4}{x+1}-1\geq 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{4}{x+1}}-1=3$，

当且仅当 $x+1=\frac{4}{x+1}$，即 $x=1$ 时取到等号

故答案为：3；1

15. 【答案】$\left[-2,+\infty\right)$

【解析】

【分析】由单调性的定义可得 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,-1\right]$ 上单调递减，再结合二次函数的图像性质可得对称轴大于等于 -1 即可

【详解】不妨设 $x_1>x_2$，$\because \dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}<0$，$x_1-x_2>0$，$\therefore f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)<0$，即

$f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$，故 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,-1\right]$ 上单调递减.

$f(x)=x^2-ax+1$，对称轴为 $x=\dfrac{a}{2}$，开口向上，故有 $\dfrac{a}{2}\geq -1$，即 $a\geq -2$.

故答案为：$\left[-2,+\infty\right)$

16. 【答案】$(0,\dfrac{1}{4})$

【解析】

【分析】根据代数式 $(2x-1),(x-1)$ 之间的大小关系，结合题中所给的定义，用分段函数的形式表示函数 $f(x)$ 的解析式，画出函数的图象，利用数形结合求出 m 的取值范围.

【详解】由 $2x-1\leq x-1$ 可得 $x\leq 0$，由 $2x-1>x-1$ 可得 $x>0$.

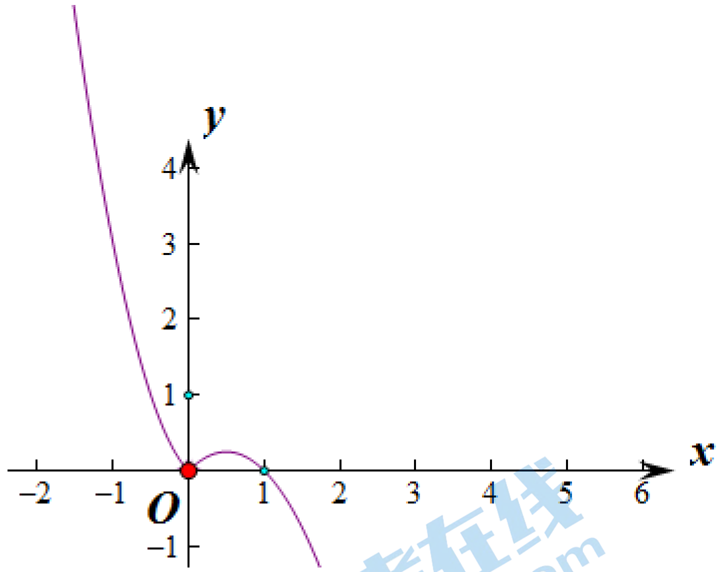
$\therefore$根据题意得 $f(x)=\begin{cases}(2x-1)^2-(2x-1)(x-1), & x\leq 0\\ (x-1)^2-(2x-1)(x-1), & x>0\end{cases}$.

即 $f(x)=\begin{cases}2x^2-x, & x\leq 0\\ x-x^2, & x>0\end{cases}$，

画出函数的图象，从图象上观察当关于 x 的方程为 $f(x)=m$（$m\in\mathbf{R}$）恰有三个互不相等的实数根时，函数的图象和直线 $y=m$ 有三个不同的交点.

当 $x>0$ 时，函数的最大值为 $f(\frac{1}{2})=\dfrac{1}{4}$，

可得 m 的取值范围是 $(0,\dfrac{1}{4})$，



故答案为：$(0,\frac{1}{4})$

【点睛】本题考查了利用数形结合思想解决已知方程根的个数求参数问题，考查了数学运算能力.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

17. 【答案】（1） $A\cap B=\{x|4<x<7\}$， $A\cup B=\{x|x<2$ 或 $x>3\}$，

$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{x|2\le x\le 3\}$；（2） $\{a|a\le 3\}$

【解析】

【分析】（1）根据交集、并集、补集的定义可求得结果；

（2）分析可知 $A\subseteq P$，求出集合 P，利用集合的包含关系可求得实数 a 的取值范围.

【详解】（1）因为全集 $U=\mathbf{R}$， $A=\{x|3<x<7\}$， $B=\{x|x<2$ 或 $x>4\}$，

所以， $A\cap B=\{x|4<x<7\}$， $A\cup B=\{x|x<2$ 或 $x>3\}$，

$\complement_U A=\{x|x\le 3$ 或 $x\ge 7\}$， $\complement_U B=\{x|2\le x\le 4\}$，则 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{x|2\le x\le 3\}$；

（2）因为 $P\cap A=A$，则 $A\subseteq P$， $\because P=\{x|x-a\ge 0\}=\{x|x\ge a\}$，故 $a\le 3$.

所以，实数 a 的取值范围为 $\{a|a\le 3\}$.

18. 【答案】（1） $f(x)=2x+\dfrac{2}{x}$

（2）证明见解析

【解析】

【分析】(1)结合已知条件利用待定系数法求解即可；(2)首先设任意的 x_1， $x_2\in(0,1)$，且 $x_1<x_2$，然后利

用作差法比较 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 大小，再结合函数单调性的定义即可证明.

【小问 1 详解】

由题意可知，$\begin{cases} f(1)=2+b+c=4 \\ f(2)=4+\dfrac{b}{2}+c=5 \end{cases}$，解得 $b=2$，$c=0$，

故函数 $f(x)$ 的解析式为：$f(x)=2x+\dfrac{2}{x}$.

【小问 2 详解】

设任意的 x_1，$x_2 \in (0,1)$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=2x_1+\dfrac{2}{x_1}-(2x_2+\dfrac{2}{x_2})=2(x_1-x_2)(1-\dfrac{1}{x_1x_2})$，

因为 x_1，$x_2 \in (0,1)$，且 $x_1<x_2$，所以 $x_1-x_2<0$，$\dfrac{1}{x_1x_2}>1$，即 $1-\dfrac{1}{x_1x_2}<0$，

从而 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，

故函数 $f(x)$ 在区间 $(0，1)$ 上是减函数.

19. 【答案】（1）图象见解析；

（2）$\left(-\infty,-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2},\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}\right)$；

（3）$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

【解析】

【分析】（1）将函数写成分段函数的形式，再绘制图象即可；

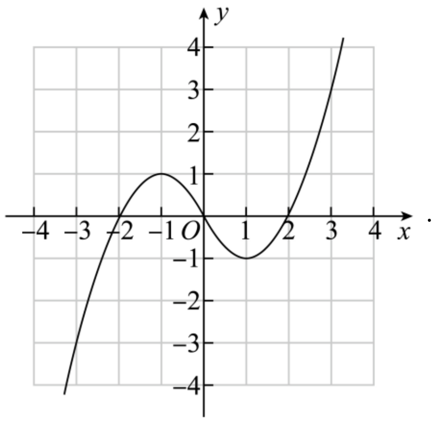
（2）根据（1）中所得函数解析式，分段求解即可；

（3）根据 $y=2a, y=f(x)$ 的图象有三个交点，数形结合即可求得参数范围.

【小问 1 详解】

因为 $f(x)=x(|x|-2)=\begin{cases} x(x-2), x\geq 0 \\ -x(x+2), x<0 \end{cases}$，

故其函数图象如下所示：



【小问 2 详解】

当 $x\ge 0$ 时，令 $f(x)<\dfrac{1}{2}$，即 $x(x-2)<\dfrac{1}{2}$，解得 $x\in\left[0,\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}\right)$，

当 $x<0$ 时，令 $f(x)<\dfrac{1}{2}$，即 $-x(x+2)<\dfrac{1}{2}$，解得 $x\in\left(-\infty,-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2},0\right)$，

综上所述，不等式的解集为：$\left(-\infty,-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2},\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}\right)$.

【小问 3 详解】

若函数 $h(x)=f(x)-2a$ 有三个零点，

即 $y=2a,y=f(x)$ 的函数图象有三个交点，

数形结合可知，$-1<2a<1$ 即可，解得 $a\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，

故实数 a 的取值范围为：$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

20. 【答案】(1) 1　　(2) 答案见解析

【解析】

【分析】(1) 由题意可得方程 $ax^2+(a-2)x-2=0$ 的两个根为 2 和 -1，从而可得 $-1+2=\dfrac{2-a}{a},-1\times 2=-\dfrac{2}{a}$，进而可求出 a 的值，

(2) 分 $a=0$，　$a>0$，$-2<a<0$，$a=-2$ 和 $a<-2$ 五种情况讨论即可

【小问 1 详解】

因为 $f(x)\ge 0$ 的解集 $\{x|x\le -1$ 或 $x\ge 2\}$，

所以方程 $ax^2+(a-2)x-2=0$ 的两个根为 2 和 -1，

所以 $-1+2=\frac{2-a}{a},-1\times2=-\frac{2}{a}$，解得 $a=1$

【小问 2 详解】

当 $a=0$ 时，$-2x-2\geq0$，解得 $x\leq-1$，

当 $a\neq0$ 时，由 $ax^2+(a-2)x-2\geq0$，得 $(x+1)(ax-2)\geq0$，

当 $a>0$ 时，解得 $x\leq-1$ 或 $x\geq\frac{2}{a}$，

当 $-2<a<0$ 时，$\frac{2}{a}<-1$，解得 $\frac{2}{a}\leq x\leq-1$，

当 $a=-2$ 时，解得 $x=-1$，

当 $a<-2$ 时，$-1<\frac{2}{a}<0$，解得 $-1\leq x\leq\frac{2}{a}$，

综上，当 $a=0$ 时，不等式的解集为 $(-\infty,-1]$，

当 $a>0$ 时，不等式的解集为 $(-\infty,-1]\cup[\frac{2}{a},+\infty)$，

当 $-2<a<0$ 时，不等式的解集为 $[\frac{2}{a},-1]$，

当 $a=-2$ 时，不等式的解集为 $\{-1\}$，

当 $a<-2$ 时，不等式的解集为 $[-1,\frac{2}{a}]$

21. 【答案】（1）讲课开始后 5min 学生注意力更集中

（2）开讲 10 分钟后，学生的接受能力最强（为59），能维持 6 分钟

（3）不能，理由见解析

【解析】

【分析】（1）由题意得，$f(5)=53.5, f(20)=47<f(5)$，即可得到答案；

（2）分析函数　单调性，根据函数单调性求函数最值，即可求出；

（3）分别求解当 $0<x\leq10$ 和 $16<x\leq40$ 时，不等式的解集，求出满足条件的时长，即可得到结论.

【小问 1 详解】

由题意得，$f\left(5\right)=53.5, f\left(20\right)=47<f\left(5\right)$，

所以讲课开始后 5min 学生注意力更集中.

【小问 2 详解】

当 $0<x\leq10$ 时，$f(x)=-0.1x^2+2.6x+43=-0.1(x-13)^2+59.9$，

$f(x)$ 在 $0<x\leqslant 10$ 时单调递增，最大值为 $f(10)=-0.1\times(10-13)^2+59.9=59$.

当 $10<x\leqslant 16$ 时， $f(x)=59$；当 $x>16$ 时，函数 $f(x)$ 为减函数，且 $f(x)<59$.

因此开讲 10 分钟后，学生的接受能力最强（为59），能维持 6 分钟.

【小问 3 详解】

当 $0<x\leqslant 10$ 时，令 $f(x)=55$，解得 $x=6$ 或 20（舍去）;

当 $x>16$ 时，令 $f(x)=55$，解得 $x=17\frac{1}{3}$，

可得学生一直达到所需接受能力 55 的状态的时间 $=17\frac{1}{3}-6=11\frac{1}{3}<13$，

因此老师不能及时在学生一直达到所需接受能力的状态下讲授完这个难题.

22. 【答案】（1） $[0,1]$；（2） $[-1,-\frac{3}{4})\cup(0,\frac{1}{4})$.

【解析】

【分析】（1）由已知中的保值区间的定义，结合函数 $y=x^2$ 的值域是 $[0,+\infty)$，可得 $[a,b]\subseteq[0,+\infty)$，从而函数 $y=x^2$ 在区间 $[a,b]$ 上单调，列出方程组，可求解;

（2）根据已知保值区间的定义，分函数 $y=x^2+m$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递减和函数 $y=x^2+m$ 在区间 $[a,b]$ 单调递增，两种情况分类讨论，即可得到答案.

【详解】（1）因为函数 $y=x^2$ 的值域是 $[0,+\infty)$，且 $y=x^2$ 在 $[a,b]$ 的最后综合讨论结果，

即可得到值域是 $[a,b]$ ，所以 $[a,b]\subseteq[0,+\infty)$，所以 $a\geq 0$，从而函数 $y=x^2$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递增，

故有 $\begin{cases}a^2=a\\b^2=b\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=0\text{或}a=1\\b=0\text{或}b=1\end{cases}$.

又 $a<b$ ，所以 $\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}$. 所以函数 $y=x^2$ 的“保值”区间为 $[0,1]$.

（2）若函数 $y=x^2+m\,(m\neq 0)$ 存在“保值”区间，则有:

①若 $a<b\leq 0$，此时函数 $y=x^2+m$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递减，

所以 $\begin{cases}a^2+m=b\\b^2+m=a\end{cases}$ ，消去 m 得 $a^2-b^2=b-a$，整理得 $(a-b)(a+b+1)=0$.

因为 $a<b$，所以 $a+b+1=0$ ，即 $a=-b-1$. 又 $\begin{cases}b\leq 0\\-b-1<b\end{cases}$ ，所以 $-\frac{1}{2}<b\leq 0$.

因为$m=-b^2+a=-b^2-b+1=-\left(b+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}(-\frac{1}{2}<b\le 0)$，所以$-1\le m<-\frac{3}{4}$.

②若$b>a\ge 0$，此时函数$y=x^2+m$在区间$[a,b]$上单调递增，

所以$\begin{cases}a^2+m=a\\b^2+m=b\end{cases}$，消去$m$得$a^2-b^2=a-b$，整理得$(a-b)(a+b-1)=0$.

因$a<b$，所以$a+b-1=0$，即$b=1-a$.

又$\begin{cases}a\ge 0\\a<1-a\end{cases}$，所以$0\le a<\frac{1}{2}$.

因为$m=-a^2+a=-\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}(0\le a<\frac{1}{2})$，所以$0<m<\frac{1}{4}$.

综合①、②得，函数$y=x^2+m(m\ne 0)$存在“保值”区间，此时m的取值范围是$\left[-1,-\frac{3}{4}\right)\cup\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

【点睛】本题主要考查了函数的单调性，函数的最值与值域等性质的综合应用，其中正确理解所给新定义，并根据新定义构造满足条件的方程（组）或不等式（组），将新定义转化为数学熟悉的数学模型求解是解答此类问题的关键，着重考查了转化思想和分类讨论思想的应用，以及分析问题和解答问题的能力，属于中档试题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ″ 精益求精、专业严谨 ″ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。