

## 高三数学

2023.1

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

## 第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合  $A = \{x | -1 < x < 2\}$ ,  $B = \{x | x \leq 1\}$ , 则  $A \cup B =$

- (A)  $(-\infty, 2)$  (B)  $(-1, +\infty)$   
(C)  $(-1, 1]$  (D)  $[1, 2)$

(2) 在下列函数中，为偶函数的是

- (A)  $f(x) = x - \cos x$  (B)  $f(x) = x \cos x$   
(C)  $f(x) = \ln|x|$  (D)  $f(x) = \sqrt{x}$

(3) 在  $(x + \frac{1}{x})^n$  的展开式中，若第 3 项的系数为 10，则  $n =$

- (A) 4 (B) 5  
(C) 6 (D) 7

(4) 在等比数列  $\{a_n\}$  中， $a_1 = 1$ ,  $a_2 a_3 = 8$ , 则  $a_7 =$

- (A) 8 (B) 16  
(C) 32 (D) 64

(5) 北京中轴线是世界城市建设历史上最杰出的城市设计范例之一。其中钟鼓楼、万宁桥、景山、故宫、端门、天安门、外金水桥、天安门广场及建筑群、正阳门、中轴线南段道路遗存、永定门，依次是自北向南位列轴线中央相邻的 11 个重要建筑及遗存。某同学欲从这 11 个重要建筑及遗存中随机选取相邻的 3 个游览，则选取的 3 个中一定有故宫的概率为

- (A)  $\frac{1}{11}$  (B)  $\frac{1}{9}$   
(C)  $\frac{3}{11}$  (D)  $\frac{1}{3}$



(6) 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 角  $\alpha$  以  $Ox$  为始边, 终边位于第一象限, 且与单位圆  $O$

交于点  $P$ ,  $PM \perp x$  轴, 垂足为  $M$ . 若  $\triangle OMP$  的面积为  $\frac{6}{25}$ , 则  $\sin 2\alpha =$

(A)  $\frac{6}{25}$

(B)  $\frac{12}{25}$

(C)  $\frac{18}{25}$

(D)  $\frac{24}{25}$

(7) 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 其渐近线方程为  $y = \pm 2x$ ,  $P$  是  $C$  上一点, 且  $PF_1 \perp PF_2$ . 若  $\triangle PF_1F_2$  的面积为 4, 则  $C$  的焦距为

(A)  $\sqrt{3}$

(B)  $2\sqrt{3}$

(C)  $2\sqrt{5}$

(D)  $4\sqrt{5}$

(8) 在  $\triangle ABC$  中, “对于任意  $t \neq 1$ ,  $|\overrightarrow{BA} - t\overrightarrow{BC}| > |\overrightarrow{AC}|$ ” 是 “ $\triangle ABC$  为直角三角形” 的

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

(9) 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 若点  $P(a, b)$  在直线  $ax + by + 4a + 3 = 0$  上, 则当  $a, b$  变化时, 直线  $OP$  的斜率的取值范围是

(A)  $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

(B)  $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$

(C)  $(-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty)$

(D)  $[-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}]$

(10) 如图, 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 点  $Q$  是棱  $DD_1$  上的动点, 下列说法中正确的是

① 存在点  $Q$ , 使得  $C_1Q \parallel A_1C$ ;

② 存在点  $Q$ , 使得  $C_1Q \perp A_1C$ ;

③ 对于任意点  $Q$ ,  $Q$  到  $A_1C$  的距离为定值;

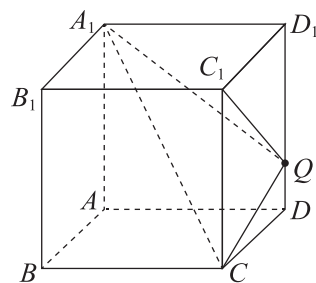
④ 对于任意点  $Q$ ,  $\triangle A_1CQ$  都不是锐角三角形.

(A) ①③

(B) ②③

(C) ②④

(D) ①④



第二部分(非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

(11) 若复数  $z$  满足  $(z+i)i = -3$ , 则  $|z| =$  \_\_\_\_\_.

(12) 已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin x - \cos x$ , 则  $f(\frac{\pi}{3}) =$  \_\_\_\_\_; 若将  $f(x)$  的图象向左平行移动  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度得到  $g(x)$  的图象, 则  $g(x)$  的一个对称中心为 \_\_\_\_\_.

(13) 经过抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  焦点  $F$  的直线与抛物线交于不同的两点  $A, B$ , 经过点  $A$  和抛物线顶点的直线交抛物线的准线于点  $D$ , 则点  $B$  的纵坐标  $y_B$  与点  $D$  的纵坐标  $y_D$  的大小关系为  $y_B$  \_\_\_\_\_  $y_D$ . (填“>”“<”或“=”)

(14) 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x > a, \\ |x - a - 1|, & x \leq a. \end{cases}$  当  $a = 0$  时,  $f(x)$  的值域为 \_\_\_\_\_; 若  $f(x)$  的最小值为 1, 则  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

(15) 对于数列  $\{a_n\}$ , 令  $T_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n$ , 给出下列四个结论:

① 若  $a_n = n$ , 则  $T_{2023} = 1012$ ;

② 若  $T_n = n$ , 则  $a_{2022} = -1$ ;

③ 存在各项均为整数的数列  $\{a_n\}$ , 使得  $|T_n| > |T_{n+1}|$  对任意的  $n \in \mathbf{N}^*$  都成立;

④ 若对任意的  $n \in \mathbf{N}^*$ , 都有  $|T_n| < M$ , 则有  $|a_{n+1} - a_n| < 2M$ .

其中所有正确结论的序号是 \_\_\_\_\_.

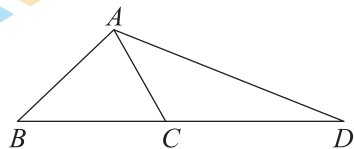
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16)(本小题 13 分)

如图，在锐角  $\triangle ABC$  中， $B = \frac{\pi}{4}$ ， $AB = 3\sqrt{6}$ ， $AC = 6$ ，点  $D$  在  $BC$  边的延长线上，且  $CD = 10$ 。

(I) 求  $\angle ACB$ ；

(II) 求  $\triangle ACD$  的周长。



(17)(本小题 15 分)

如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  是边长为 2 的正方形， $PA = 2$ ， $PA \perp AB$ ， $E$  为  $BC$  的中点， $F$  为  $PD$  上一点， $EF \parallel$  平面  $PAB$ 。

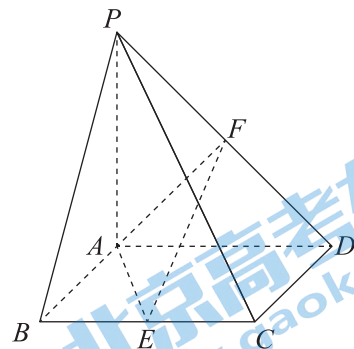
(I) 求证： $F$  为  $PD$  的中点；

(II) 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求直线  $AD$  与平面  $AEF$  所成角的正弦值。

条件①： $AD \perp PB$ ；

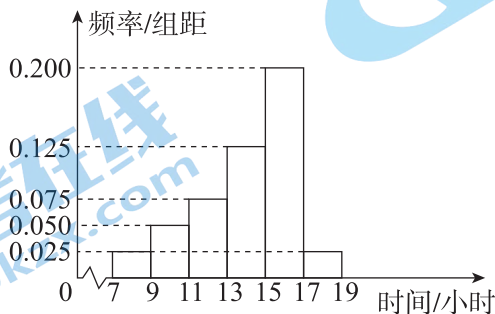
条件②： $PC = 2\sqrt{3}$ 。

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分。



(18)(本小题 13 分)

“双减”政策执行以来，中学生有更多的时间参加志愿服务和体育锻炼等课后活动. 某校为了解学生课后活动的情况，从全校学生中随机选取 100 人，统计了他们一周参加课后活动的时间(单位:小时)，分别位于区间 $[7,9)$ ， $[9,11)$ ， $[11,13)$ ， $[13,15)$ ， $[15,17)$ ， $[17,19]$ ，用频率分布直方图表示如下：



假设用频率估计概率，且每个学生参加课后活动的时间相互独立.

(I) 估计全校学生一周参加课后活动的时间位于区间 $[13,17)$ 的概率；

(II) 从全校学生中随机选取 3 人，记  $\xi$  表示这 3 人一周参加课后活动的时间在区间 $[15,17)$ 的人数，求  $\xi$  的分布列和数学期望  $E\xi$ ；

(III) 设全校学生一周参加课后活动的时间的众数、中位数、平均数的估计值分别为  $a, b, c$ ，请直接写出这三个数的大小关系。(样本中同组数据用区间的中点值替代)

(19)(本小题 14 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，长轴长与短轴长的和为 6，

$F_1, F_2$  分别为椭圆  $C$  的左、右焦点.

(I) 求椭圆  $C$  的方程；

(II) 设  $P$  为椭圆  $C$  上一点， $M(1,0)$ . 若  $|PF_1|, \lambda|PM|, |PF_2|$  成等差数列，求实数  $\lambda$  的取值范围.

(20)(本小题 15 分)

已知函数  $f(x) = xe^x$ .

(I) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;

(II) 求  $f(x)$  的极值;

(III) 证明: 当  $m \leq 1$  时, 曲线  $C_1: y = f(x)$  与曲线  $C_2: y = \ln x + x + m$  至多存在一个交点.

(21)(本小题 15 分)

已知数列  $A: a_1, a_2, \dots, a_n$  满足:  $a_i \in \{0, 1\} (i=1, 2, \dots, n, n \geq 2)$ , 从  $A$  中选取第  $i_1$  项、第  $i_2$  项、 $\dots$ 、第  $i_m$  项 ( $i_1 < i_2 < \dots < i_m, m \geq 2$ ), 称数列  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}$  为  $A$  的长度为  $m$  的子列. 记  $T(A)$  为  $A$  所有子列的个数. 例如  $A: 0, 0, 1$ , 其  $T(A) = 3$ .

(I) 设数列  $A: 1, 1, 0, 0$ , 写出  $A$  的长度为 3 的全部子列, 并求  $T(A)$ ;

(II) 设数列  $A: a_1, a_2, \dots, a_n, A': a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, A'': 1-a_1, 1-a_2, \dots, 1-a_n$ , 判断  $T(A), T(A'), T(A'')$  的大小, 并说明理由;

(III) 对于给定的正整数  $n, k (1 \leq k \leq n-1)$ , 若数列  $A: a_1, a_2, \dots, a_n$  满足:  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = k$ , 求  $T(A)$  的最小值.

高三数学参考答案及评分标准

2023.1

一、选择题 (共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

- (1) A            (2) C            (3) B            (4) D            (5) D  
 (6) D            (7) C            (8) A            (9) B            (10) C

二、填空题 (共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

- (11) 2                      (12) 1 (0,0) (答案不唯一)  
 (13) =                      (14) (-1,+∞) [ $\sqrt{2}$ ,+∞)                      (15) ① ② ④

三、解答题 (共 6 小题, 共 85 分)

(16) (共 13 分)

解:

(I) 在  $\triangle ABC$  中, 由正弦定理  $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin \angle ACB}$ ,

$$\text{得 } \sin \angle ACB = \frac{AB \cdot \sin B}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

又因为在锐角  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACB \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 所以  $\angle ACB = \frac{\pi}{3}$ . .....6 分

(II) 因为  $\angle ACB = \frac{\pi}{3}$ , 所以  $\angle ACD = \frac{2\pi}{3}$ .

在  $\triangle ACD$  中, 由余弦定理  $AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos \frac{2}{3}\pi$ , 得  $AD = 14$ .

所以  $\triangle ACD$  的周长为  $AC + CD + AD = 30$ . .....13 分

(17) (共 15 分)

解: (I) 在  $\triangle PAD$  中, 过点  $F$  作  $FG \parallel AD$  交  $PA$  于点  $G$ , 连接  $GB$ .

因为  $AD \parallel BC$ ,

所以  $FG \parallel BC$ ,

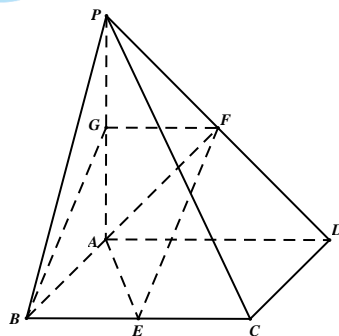
所以  $B, E, F, G$  四点共面.

因为  $EF \parallel$  平面  $PAB$ ,  $EF \subset$  平面  $BEFG$ ,

平面  $PAB \cap$  平面  $BEFG = BG$ ,

所以  $EF \parallel BG$ .

所以四边形  $BEFG$  是平行四边形.



所以  $FG = BE = \frac{1}{2} AD$ .

所以  $F$  为  $PD$  的中点.

.....6分

(II) 选条件①:  $AD \perp PB$ .

因为底面  $ABCD$  为正方形,

所以  $AD \perp AB$ .

又  $AD \perp PB$ ,  $AB \cap PB = B$ ,

所以  $AD \perp$  平面  $PAB$ .

所以  $AD \perp PA$ .

如图建立空间直角坐标系  $A-xyz$ , 因为底面  $ABCD$  是边长为 2 的正方形,  $PA = 2$ ,

则  $A(0,0,0)$ ,  $D(0,2,0)$ ,  $E(2,1,0)$ ,  $F(0,1,1)$ ,

所以  $\overrightarrow{AD} = (0,2,0)$ ,  $\overrightarrow{AE} = (2,1,0)$ ,  $\overrightarrow{AF} = (0,1,1)$ .

设平面  $AEF$  的一个法向量为  $\mathbf{n} = (x, y, z)$ ,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AF} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} 2x + y = 0, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

令  $x = 1$ , 则  $y = -2, z = 2$ . 于是  $\mathbf{n} = (1, -2, 2)$ .

设直线  $AD$  与平面  $AEF$  所成角为  $\theta$ ,

$$\text{则} \sin \theta = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{AD} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AD}|}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{AD}|} = \frac{2}{3}.$$

所以直线  $AD$  与平面  $AEF$  所成角为的正弦值为  $\frac{2}{3}$ .

.....15分

选条件②:  $PC = 2\sqrt{3}$ .

如图, 连接  $AC$ .

因为底面  $ABCD$  是边长为 2 的正方形,

所以  $AD \perp AB$ ,  $AC = 2\sqrt{2}$ .

因为  $PA = 2$ ,  $PC = 2\sqrt{3}$ ,

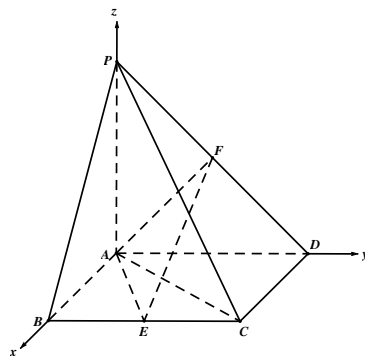
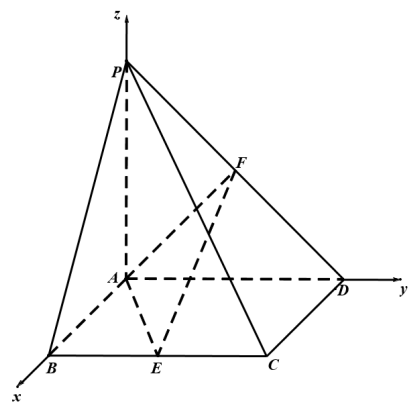
所以  $PA^2 + AC^2 = PC^2$ .

所以  $PA \perp AC$ .

因为  $PA \perp AB$ ,  $AB \cap AC = A$ ,

所以  $PA \perp$  平面  $ABCD$ .

所以  $PA \perp AD$ .





以下同选条件① .

.....15分

(18) (共 13 分)

解: (I) 根据频率分布直方图, 可得学生一周参加课后活动的时间位于区间[13, 17]的频率为  $(0.125 + 0.200) \times 2 = 0.65$ ,

因此估计全校学生一周参加课后活动的时间位于区间[13, 17]的概率为 0.65. ....3分

(II) 从全校学生中随机选取 1 人, 其一周参加课后活动的时间在区间[15, 17]的概率为 0.4.

因此  $\xi \sim B(3, 0.4)$ .

$$P(\xi = 0) = (1 - 0.4)^3 = 0.216; \quad P(\xi = 1) = C_3^1 \times 0.4^1 \times (1 - 0.4)^2 = 0.432;$$

$$P(\xi = 2) = C_3^2 \times 0.4^2 \times (1 - 0.4)^1 = 0.288; \quad P(\xi = 3) = 0.4^3 = 0.064.$$

则  $\xi$  的分布列为:

$\xi$	0	1	2	3
$P$	0.216	0.432	0.288	0.064

$$E\xi = 0 \times 0.216 + 1 \times 0.432 + 2 \times 0.288 + 3 \times 0.064 = 1.2 .$$

.....10分

(III)  $c < b < a$ .

.....13分

(19) (共 14 分)

解: (I) 由题设, 
$$\begin{cases} 2a + 2b = 6, \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2. \end{cases}$$

$$\text{解得 } a^2 = 4, b^2 = 1.$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

.....5分

(II) 设  $P(x_0, y_0)$  为椭圆  $C$  上一点,

$$\text{则有 } |PF_1| + |PF_2| = 2a = 4.$$

$$\text{由 } |PF_1|, \lambda |PM|, |PF_2| \text{ 成等差数列, 得 } 2\lambda |PM| = 4, \lambda \neq 0,$$

$$\text{即 } |PM| = \frac{2}{\lambda}.$$

$$\text{由 } M(1, 0), \text{ 则 } |PM| = \sqrt{(x_0 - 1)^2 + y_0^2}.$$

又  $P(x_0, y_0)$  在椭圆  $C$  上, 有  $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$ ,

$$\text{故 } |PM| = \sqrt{(x_0 - 1)^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0 - 1)^2 + 1 - \frac{x_0^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}x_0^2 - 2x_0 + 2},$$

因为  $x_0 \in [-2, 2]$ , 所以  $|PM| \in [\frac{\sqrt{6}}{3}, 3]$ .

$$\text{即 } \frac{2}{\lambda} \in [\frac{\sqrt{6}}{3}, 3],$$

$$\text{所以 } \lambda \in [\frac{2}{3}, \sqrt{6}]$$

所以实数  $\lambda$  的取值范围是  $[\frac{2}{3}, \sqrt{6}]$ .

.....14 分

(20) (共 15 分)

解: (I) 因为  $f(x) = xe^x$

$$\text{所以 } f'(x) = (x+1)e^x.$$

$$\text{所以 } f(0) = 0, f'(0) = 1.$$

所以曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程为  $y = x$ .

.....4 分

(II) 令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = -1$ .

当  $x \in (-\infty, -1)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减;

当  $x \in (-1, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增;

当  $x = -1$  时,  $f'(x) = 0$ ,  $f(x)$  在  $x = -1$  时取得极小值.

所以函数  $f(x)$  的极小值为  $-\frac{1}{e}$ , 不存在极大值.

.....9 分

(III) 令  $g(x) = xe^x - \ln x - x - m$ , 其定义域为  $(0, +\infty)$ .

$$g'(x) = (x+1)e^x - \frac{1}{x} - 1 = (x+1)(e^x - \frac{1}{x}), \quad x+1 > 0.$$

$$\text{令 } h(x) = e^x - \frac{1}{x}, \quad h'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0,$$

所以  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增.

因为  $h(1) > 0$ ,  $h(\frac{1}{2}) < 0$ , 所以  $\exists x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ ,

当  $x \in (0, x_0)$  时,  $h(x) < 0$ , 即  $g'(x) < 0$ ,  $g(x)$  单调递减;

当  $x \in (x_0, +\infty)$  时,  $h(x) > 0$ , 即  $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  单调递增;

当  $x = x_0$  时,  $h(x) = 0$ , 即  $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$ ,  $g(x)$  取得极小值  $g(x_0)$ .

$$g(x_0) = x_0 e^{x_0} - \ln x_0 - x_0 - m,$$

因为  $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$ , 所以  $x_0 e^{x_0} = 1$ ,  $x_0 = -\ln x_0$ ,

所以  $g(x_0) = 1 - m$ .

因此, 当  $m < 1$  时,  $g(x_0) > 0$ ,

所以  $\forall x \in (0, +\infty)$ ,  $g(x) > 0$ ,

即  $\forall x \in (0, +\infty)$ ,  $f(x) > \ln x + x + m$ , 曲线  $C_1$  与曲线  $C_2$  无交点;

当  $m = 1$  时,  $g(x_0) = 0$ ,

所以存在且仅存在一个  $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ , 使得  $g(x_0) = 0$ ,

对  $\forall x \in (0, +\infty)$  且  $x \neq x_0$ , 都有  $g(x) > 0$ , 即  $f(x) > \ln x + x + m$ .

所以当  $m = 1$  时, 曲线  $C_1$  与曲线  $C_2$  有且仅有一个交点;

故当  $m \leq 1$  时, 曲线  $C_1$  与曲线  $C_2$  至多存在一个交点.

.....15 分

(21) (共 15 分)

解: (I) 由  $T(A)$  的定义以及  $A: 1, 1, 0, 0$ , 可得:  $A$  的长度为 3 的子列为:  $1, 0, 0; 1, 1, 0$ ,

$A$  的长度为 2 的子列有 3 个,  $A$  的长度为 4 的子列有 1 个,

所以  $T(A) = 6$ .

.....5 分

(II)  $T(A) = T(A') = T(A'')$ .

理由如下:

若  $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}, m_k$  是  $A: a_1, a_2, \dots, a_n$  的一个子列,

则  $m_k, m_{k-1}, \dots, m_2, m_1$  为  $A': a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$  的一个子列.

若  $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}, m_k$  与  $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k$  是  $A: a_1, a_2, \dots, a_n$  的两个不同子列,

则  $m_k, m_{k-1}, \dots, m_2, m_1$  与  $n_k, n_{k-1}, \dots, n_2, n_1$  也是  $A': a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$  的两个不同子列.

所以  $T(A) \leq T(A')$ .

同理  $T(A') \leq T(A)$ ,

所以  $T(A) = T(A')$ .

同理  $T(A) = T(A'')$ . 所以有  $T(A) = T(A') = T(A'')$ . .....10分

(III) 由已知可得, 数列  $A: a_1, a_2, \dots, a_n$  中恰有  $k$  个 1,  $n-k$  个 0. 令  $A^*: \underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}_{n-k \text{ 个}} \ \underbrace{1 \ 1 \ \dots \ 1}_{k \text{ 个}}$ ,

下证:  $T(A) \geq T(A^*)$ .

由于  $A^*: \underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}_{n-k \text{ 个}} \ \underbrace{1 \ 1 \ \dots \ 1}_{k \text{ 个}}$ , 所以  $A^*$  的子列中含有  $i$  个 0,  $j$  个 1

( $i=0,1,\dots, n-k, j=0,1,\dots, k, i+j \geq 2$ ) 的子列有且仅有 1 个,

设为:  $\underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}_i \ \underbrace{1 \ 1 \ \dots \ 1}_j$ . 而数列  $A: a_1, a_2, \dots, a_n$  的含有  $i$  个 0,  $j$  个 1 的子列至少有一个,

所以  $T(A) \geq T(A^*)$ .

数列  $A^*: \underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}_{n-k \text{ 个}} \ \underbrace{1 \ 1 \ \dots \ 1}_{k \text{ 个}}$  中, 不含有 0 的子列有  $k-1$  个, 含有 1 个 0 的子列有  $k$  个,

含有 2 个 0 的子列有  $k+1$  个,  $\dots$ , 含有  $n-k$  个 0 的子列有  $k+1$  个,

所以  $T(A^*) = (n-k)(k+1) + k - 2 = nk + n - k^2 - 2$ .

所以  $T(A)$  的最小值为  $nk + n - k^2 - 2$ .

.....15分

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯