2023 北京日坛中学高二（上）期中

数　　学

2023.11

（本试卷共 4 页，考试时间 120min，满分 150 分）

一、选择题（每题 5 分，共 60 分）

1. 已知圆 C 的圆心坐标为（2，3），半径为 4，则圆 C 的标准方程为（　）

A. $(x-2)^2+(y-3)^2=4$　　B. $(x+2)^2+(y+3)^2=16$

C. $(x+2)^2+(y+3)^2=4$　　D. $(x-2)^2+(y-3)^2=16$

2. 直线 $x+y+1=0$ 的倾斜角为（　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{3\pi}{4}$　　C. $\frac{5\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

3. 已知点 $M(a,b)$ 在圆 $O: x^2+y^2=1$ 外，则直线 $ax+by=1$ 与圆 O 的位置关系是（　）.

A. 相切　　B. 相交　　C. 相离　　D. 不确定

4. 设圆 M 的圆心为 $(3,-5)$，且与直线 $x-7y+2=0$ 相切，则圆 M 的方程为（　）

A. $(x+3)^2+(y-5)^2=32$　　B. $(x+3)^2+(y+5)^2=32$

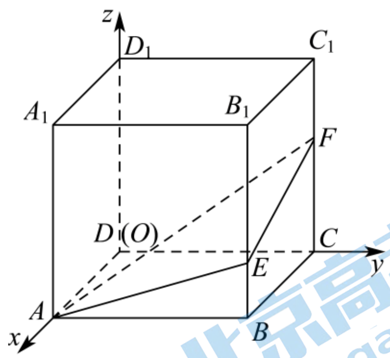
C. $x^2+y^2-6x+10y+2=0$　　D. $x^2+y^2-6x+10y-2=0$

5. 已知三点 $A(1,2,1)$、$B(1,5,1)$、$C(1,2,7)$，则

A. 三点构成等腰三角形　　B. 三点构成直角三角形

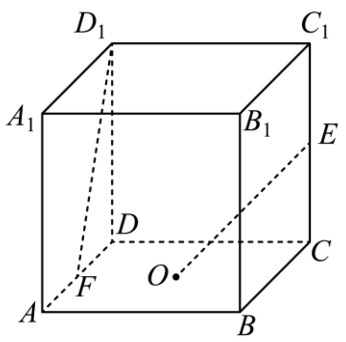
C. 三点构成等腰直角三角形　　D. 三点构不成三角形

6. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，以 D 为原点建立空间直角坐标系 $Oxyz$，E，F 分别在棱 BB_1，CC_1 上，且 $B_1E=2EB$，$CF=2FC_1$，则下列向量中，能作为平面 AEF 的法向量的是（　）



A. $(1,-1,3)$　　B. $(1,-1,-3)$　　C. $(2,-3,6)$　　D. $(-2,3,-6)$

7. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，O 是底面 $ABCD$ 的中点，E，F 分别是 CC_1，AD 的中点，那么异面直线 OE 和 FD_1 所成的角的余弦值等于（　）



A. $\frac{\sqrt{42}}{7}$　　B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

8. 已知椭圆 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ 上的一点 P 到焦点 F_1 的距离为 6，点 M 是 PF_1 的中点，O 为坐标原点，则 $|OM|$ 等于（　）

A. 2　　B. 4　　C. 7　　D. 14

9. 短轴长为 $4\sqrt{5}$，离心率为 $\frac{2}{3}$ 的椭圆的两个焦点分别为 F_1、F_2，过焦点 F_1 的弦为 AB，则三角形 ABF_2 的周长为（　）

A. $12\sqrt{5}$　　B. 24　　C. $24\sqrt{2}$　　D. $18\sqrt{3}$

10. 已知地球运行的轨道是焦距为 $2c$，离心率为 e 的椭圆，且太阳在这个椭圆的一个焦点上，则地球到太阳的最小距离为（　）

A. $ce-c$　　B. $2ce-2c$　　C. $\frac{c}{e}-c$　　D. $\frac{2c}{e}-2c$

11. 关于曲线 $C: x^2-xy+y^2=1$ 有下列三个结论：

①曲线 C 关于 y 轴对称；

②曲线 C 关于原点对称；

③曲线 C 上任意一点的横坐标不大于 1；

④曲线 C 上任意一点到原点的距离不超过 $\sqrt{2}$.

其中所有正确结论的个数是（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

12. 已知 (m,n) 为直线 $x+y-1=0$ 上的一点，则 $\sqrt{m^2+n^2}+\sqrt{(m+2)^2+n^2}$ 的最小值为（　）

A. $\sqrt{10}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 4　　D. $3\sqrt{2}$

二、填空题（每题 5 分，共 30 分）

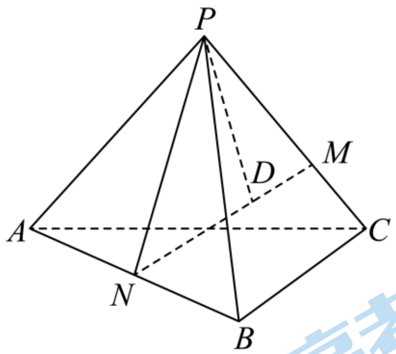
13. 经过点 $(-1,1)$ 且与圆 $x^2+y^2-4y+2=0$ 相切的直线的一般方程为__________.

14. 已知直线 $ax+4y-2=0$ 与 $2x-5y+b=0$ 互相垂直，垂足为 $(1,c)$，则 $a+b+c$ 的值是______

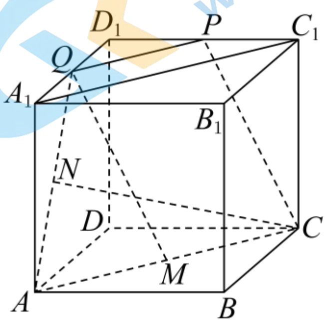
15. 已知向量 $\vec{a}=(x,1,-1)$，$\vec{b}=(2,1,0)$，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$______.

16. 若直线 $l:kx-y-2=0$ 与曲线 $C:\sqrt{1-(y-1)^2}=x-1$ 有且只有一个公共点，则实数 k 的取值范围是____________.

17. 如图，在四面体 $P-ABC$ 中，M 在线段 PC 上，满足 $PM=2MC$，N 是 AB 的中点，D 是线段 MN 上一点，且 $MD=\frac{1}{3}MN$，若 $\overrightarrow{PD}=x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}+z\overrightarrow{PC}$，则 $x+y+z=$__________.



18. 在棱长为 1 的正方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 中，M 为底面 $ABCD$ 的中心，Q 是棱 A_1D_1 上一点，且 $\overrightarrow{D_1Q}=\lambda\overrightarrow{D_1A_1}$，$\lambda\in[0,1]$，$N$ 为线段 AQ 的中点，给出下列命题：



①C，M，N，Q 四点共面；

②三棱锥 $A-DMN$ 的体积与 λ 的取值有关；

③当 $\angle QMC=90°$ 时，$\lambda=0$；

④当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，过 A,Q,M 三点的平面截正方体所得截面的面积为 $-\sqrt{5}+\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

其中正确的有______（填写序号）.

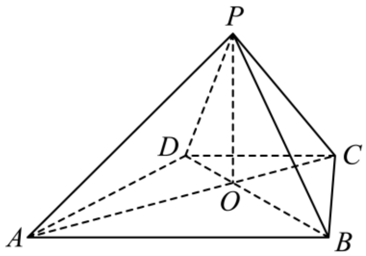
三、解答题（每题 15 分，共 60 分）

19. 已知直线 $l:x-y+1=0$ 和圆 $C:x^2+y^2-2x+4y-4=0$.

（1）判断直线 l 与圆 C 的位置关系；若相交，求直线 l 被圆 C 截得的弦长；

（2）求过点 $(4,-1)$ 且与圆 C 相切的直线方程.

20. 如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为等腰梯形，$AB\parallel DC$，$AC\perp BD, AC$ 与 BD 相交于点 O，且顶点 P 在底面上的射影恰为 O 点．又 $BO=2, PO=\sqrt{2}, PB\perp PD$.



（1）求异面直线 PD 与 BC 所成角的余弦值；

（2）求二面角 $P-AB-C$ 的大小；

（3）设点 M 在棱 PC 上，且 $\dfrac{PM}{MC}=\lambda$，问 λ 为何值时，$PC\perp$平面 BMD.

21. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$与椭圆 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{2}=1$有相同的焦点，过椭圆 C 的右焦点且垂直于 x 轴的弦长度为 1.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）直线 l：$y=x+m$ 与椭圆 C 交于 A，B 两点，若$\left|AB\right|=\dfrac{8}{5}$，求实数 m 的值.

22.

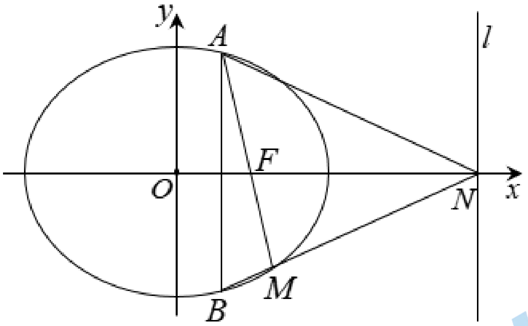
如图，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的一个焦点为 $F(1,0)$，且过点（2，0）.

（I）求椭圆 C 的方程；

（II）若 AB 为垂直于 x 轴的动弦，直线 l:x=4 与 x 轴交于点 N，直线 AF 与 BN 交于点 M.

(i)求证：点 M 恒在椭圆 C 上；

(ii)求△AMN 面积的最大值.



参考答案

一、选择题（每题 5 分，共 60 分）

1.【答案】D

【分析】直接利用圆的标准方程求解即可.

【详解】解：由圆的标准方程得：

圆心坐标为（2，3），半径为 4 的圆的标准方程是：

$(x-2)^2+(y-3)^2=16$.

故选：D.

2.【答案】B

【分析】

由直线的方程得到斜率为-1，再结合 $k=\tan\alpha=-1$ 即得解

【详解】由题意，直线 $x+y+1=0$ 的斜率为 $k=-1$

故 $k=\tan\alpha=-1\therefore\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$

故选:B

【点睛】本题考查了由直线的方程求直线的倾斜角，考查了学生概念理解，数学运算的能力，属于基础题.

3.【答案】B

【分析】由题意结合点与圆的位置关系考查圆心到直线的距离与圆的半径的大小关系即可确定直线与圆的位置关系.

【详解】$\because$ 点 $M\left(a,b\right)$ 在圆 $O:x^2+y^2=1$ 外，$\therefore a^2+b^2>1$，

圆心 O 到直线 $ax+by=1$ 距离 $d=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$，

$\therefore$ 直线 $ax+by=1$ 与圆 O 相交.

故选 B.

【点睛】本题主要考查点与圆的位置关系，直线与圆的位置关系等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

4.【答案】C

【分析】由已知条件求出半径，即可得出答案.

【详解】$\because$ 直线与圆相切，故圆的半径为 $r=\dfrac{|3+5\times7+2|}{\sqrt{7^2+1^2}}=\dfrac{40}{5\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$，$\therefore r^2=32$，

所以圆 M 的方程为 $\left(x-3\right)^2+\left(y+5\right)^2=32$，即 $x^2+y^2-6x+10y+2=0$.

故选：C

【点睛】本题结合直线与圆的位置关系，考查圆的方程,属于容易题.

5.【答案】B

【分析】

计算出$|AB|$、$|AC|$、$|BC|$，根据三角形三边关系、勾股定理等三角形知识判断即可.

【详解】由空间中两点间的距离公式可得$|AB|=\sqrt{(1-1)^2+(2-5)^2+(1-1)^2}=3$，

$|AC|=\sqrt{(1-1)^2+(2-2)^2+(1-7)^2}=6$，$|BC|=\sqrt{(1-1)^2+(5-2)^2+(1-7)^2}=3\sqrt{5}$，

$\therefore |AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$，因此，三点构成直角三角形.

故选：B.

【点睛】本题考查利用空间中两点间的距离公式判断三角形形状，解题的关键就是计算出三边长，结合三角形相关知识进行判断，考查计算能力，属于基础题.

6.【答案】A

【分析】

设正方体的棱长为 1，平面 AEF 的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，求出$\overrightarrow{AE},\overrightarrow{EF}$，令$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0\end{cases}$，即可得答案.

【详解】设正方体的棱长为 1，平面 AEF 的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$.

则 $A(1,0,0)$，$E\left(1,1,\frac{1}{3}\right)$，$F\left(0,1,\frac{2}{3}\right)$，

所以$\overrightarrow{AE}=\left(0,1,\frac{1}{3}\right)$，$\overrightarrow{EF}=\left(-1,0,\frac{1}{3}\right)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}y+\frac{1}{3}z=0,\\-x+\frac{1}{3}z=0.\end{cases}$ 不妨取 $x=1$，则 $y=-1$，$z=3$，

故$\vec{n}=(1,-1,3)$.

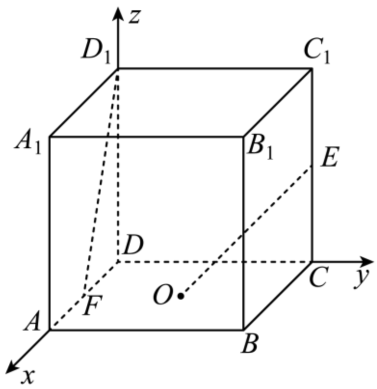
故选：A.

【点睛】本题考查空间中平面法向量的求解，考查函数与方程思想，考查运算求解能力，属于基础题.

7.【答案】B

【分析】建立空间直角坐标系，分别用坐标表示出$\overrightarrow{OE},\overrightarrow{FD_1}$，然后计算出向量夹角的余弦值，由此可求解出异面直线 OE 和 FD_1 所成的角的余弦值.

【详解】建立空间直角坐标系如图所示：



所以$\overrightarrow{OE}=(-1,1,1),\overrightarrow{FD_1}=(-1,0,2)$，所以$\cos<\overrightarrow{OE},\overrightarrow{FD_1}>=\dfrac{\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{FD_1}}{|\overrightarrow{OE}||\overrightarrow{FD_1}|}=\dfrac{3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

所以异面直线OE和FD_1所成的角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

故选：B.

【点睛】本题考查利用向量方法求解异面直线所成角的余弦值，难度一般.异面直线所成角的向量求解方法：根据直线方向向量夹角的余弦值求解出异面直线所成角的余弦值，从而异面直线所成角可求.

8.【答案】C

【分析】利用椭圆的定义和三角形中位线定理即可求解.

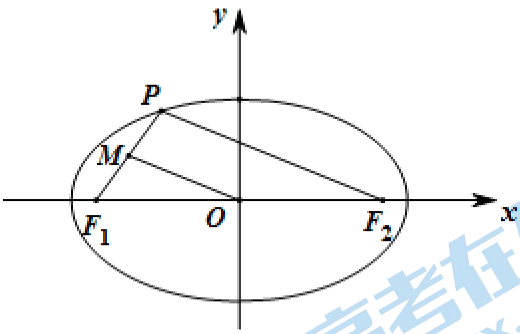
【详解】如图所示，设椭圆的另一焦点为F_2，因为O、M分别是F_1F_2和PF_1的中点，所以

$|OM|=\dfrac{1}{2}|PF_2|$，

而由椭圆的方程得a=10，2a=20，所以$|PF_2|=2a-|PF_1|=20-6=14$，

所以$|OM|$=7，

故选：C.



9.【答案】B

【分析】

先根据离心率和短轴的长求得长轴的长，进而利用椭圆的定义求得所求三角形的周长.

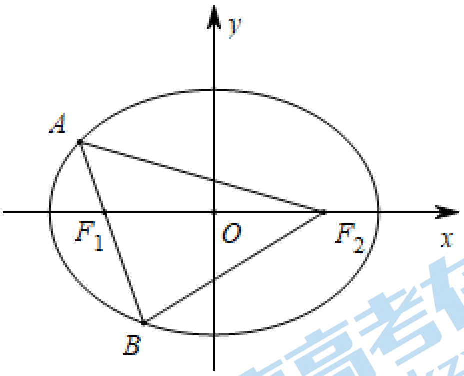
【详解】离心率为$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3}$，设$a=3k(k>0)$，则$c=2k$，

短轴长为 $2b=4\sqrt{5}$，$\therefore b=2\sqrt{5}$，$\because b^2=a^2-c^2$，$\therefore 20=9k^2-4k^2=5k^2$，

$\therefore k=2$，$\therefore a=6$，$\therefore \triangle ABF_2$ 的周长 $=|AB|+|AF_2|+|BF_2|=|AF_1|+|BF_1|+|AF_2|+|BF_2|$

$=(|AF_1|+|AF_2|)+(|BF_1|+|BF_2|)=2a+2a=4a=24$，

故选：B.



【点睛】

在椭圆的焦点三角形中，利用椭圆定义求周长是常用的方法，一般地，$\triangle ABF_2$ 的周长为长轴长的两倍.

10.【答案】C

【分析】根据离心率得到椭圆的 a，根据椭圆的几何性质，得到最小距离，从而得到答案.

【详解】因为地球椭圆轨道的焦距为 $2c$，离心率为 e，

所以由 $e=\dfrac{c}{a}$，得 $a=\dfrac{c}{e}$，

而太阳在这个椭圆的一个焦点上，

所以地球到太阳的最小距离为 $a-c=\dfrac{c}{e}-c$.

故选：C.

【点睛】本题考查椭圆离心率的定义，椭圆上的点到焦点的距离，属于简单题.

11.【答案】B

【分析】根据曲线方程，由对称性设点代入检验是否符合曲线方程可判断①②，由判别式可取特殊点代入排除③，由两点距离公式及基本不等式可判定④.

【详解】设曲线上一点 $A(x_0,y_0)$，则 $x_0^2-x_0y_0+y_0^2=1$，

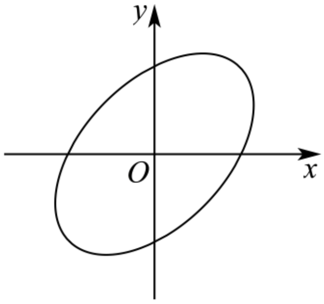
设 A 关于 y 轴对称的点为 $B(-x_0,y_0)$，将点 B 代入曲线 C 可得 $x_0^2+x_0y_0+y_0^2$，随 x_0 变化 $x_0^2+x_0y_0+y_0^2$ 的值不一定始终为 1，故①错误；

同理，设 A 关于原点对称的点为 $B(-x_0,-y_0)$，将点 B 代入曲线 C 可得 $x_0^2-x_0y_0+y_0^2=1$ 恒成立，故②正确；

由曲线方程可化简得 $y=\dfrac{x\pm\sqrt{4-3x^2}}{2}\Rightarrow x\in\left[-\sqrt{\dfrac{4}{3}},\sqrt{\dfrac{4}{3}}\right]$，

令 $x=\sqrt{\frac{4}{3}}$，可得 $\frac{4}{3}-\sqrt{\frac{4}{3}}y+y^2=1\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即曲线 C 上有一点 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，故③错误；

易知：$OA^2=x_0^2+y_0^2=1+x_0y_0\le 1+\frac{x_0^2+y_0^2}{2}\Rightarrow\sqrt{x_0^2+y_0^2}\le\sqrt{2}$，故④正确.

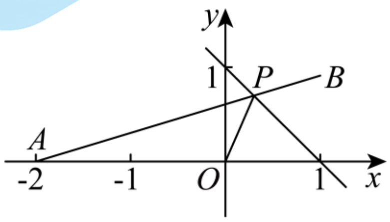


故选：B

12.【答案】A

【分析】求出 O 关于直线 $x+y-1=0$ 的对称点 B 坐标，易得 $|PO|=|PB|$，当 A，P，B 三点共线时，$|PO|+|PA|$ 取到最小值，且最小值为 $|PO|+|PA|=|AB|$.

【详解】如图，$\sqrt{m^2+n^2}+\sqrt{(m+2)^2+n^2}$ 为点 $P(m,n)$ 到原点 O 和到点 $A(-2,0)$ 的距离之和，



即 $|PO|+|PA|$. 设 $O(0,0)$ 关于直线 $x+y-1=0$ 对称的点为 $B(a,b)$，则 $\begin{cases}\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-1=0,\\ \frac{b}{a}=1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}$，即 $B(1,1)$.

易得 $|PO|=|PB|$，当 A，P，B 三点共线时，$|PO|+|PA|$ 取到最小值，且最小值为 $|PO|+|PA|=|AB|=\sqrt{10}$.

故选：A.

二、填空题（每题 5 分，共 30 分）

13.【答案】$x+y=0$

【分析】求出圆心坐标，由题意可得切线与圆心及点 $(-1,1)$ 所在的直线垂直且切点为点 $(-1,1)$，进而可得出答案.

【详解】由 $x^2+y^2-4y+2=0$，可得 $x^2+(y-2)^2=2$，则圆心 $M(0,2)$，

且点 $N(-1,1)$ 在该圆上，$k_{MN}=\dfrac{1-2}{-1-0}=1$，

则切线的斜率为 -1，

故所求的切线方程为 $y-1=-(x+1)$，即 $x+y=0$.

故答案为：$x+y=0$.

14.【答案】-4

【分析】由两直线垂直，可求出 a 的值，又垂足 $(1,c)$ 为两直线交点，列方程组求解可得 b，c 的值，从而即可得答案.

【详解】因为两直线互相垂直，所以 $2a+4\times(-5)=0$，解得 $a=10$，

又垂足 $(1,c)$ 既在前一条直线上，也在后一条直线上，

所以 $\begin{cases}10+4c-2=0\\ 2-5c+b=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}b=-12\\ c=-2\end{cases}$，

所以 $a+b+c=10+(-12)+(-2)=-4$.

故答案为：-4.

15.【答案】1

【分析】根据向量的模计算 $x=0$，再计算数量积得到答案.

【详解】$\vec{a}=(x,1,-1)$，$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+1+1}=\sqrt{2}$，解得 $x=0$，故 $\vec{a}=(0,1,-1)$，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(0,1,-1)\cdot(2,1,0)=1$.

故答案为：1

16.【答案】$(2,4]\cup\{\frac{4}{3}\}$

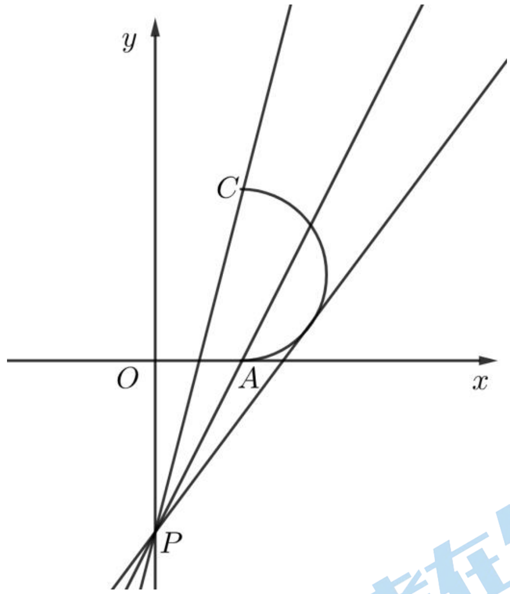
【分析】由题意可知，曲线 C 为圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的右半圆，作出直线 l 与曲线 C 的图象，可知直线 l 是过点 $(0,-2)$ 且斜率为 k 的直线，求出当直线 l 与曲线 C 相切时 k 的值，利用数形结合思想可得出当直线 l 与曲线 C 有一个公共点时实数 k 的取值范围.

【详解】对于直线 $l:y=kx-2$，则直线 l 是过点 $P(0,-2)$ 且斜率为 k 的直线，

对于曲线 $C:\sqrt{1-(y-1)^2}=x-1$，则 $x-1\geq0\Rightarrow x\geq1$，

曲线 C 的方程两边平方并整理得 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$，

则曲线 C 为圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的右半圆，如下图所示：



当直线l与曲线C相切时，$k>0$，且有$\dfrac{|k-1-2|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k-3|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得$k=\dfrac{4}{3}$，

当直线l过点$A(1,0)$时，则有$k-2=0$，解得$k=2$，

当直线l过点$C(1,2)$时，则有$2=k-2$，解得$k=4$，

结合图象可知，当$k\in(2,4]\cup\left\{\dfrac{4}{3}\right\}$时，直线$l$与曲线$C$有一个交点.

故答案为：$(2,4]\cup\left\{\dfrac{4}{3}\right\}$.

17.【答案】$\dfrac{7}{9}$

【分析】由条件结合空间向量线性运算法则利用$\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}$表示向量$\overrightarrow{PD}$，根据空间向量基本定理求$x,y,z$，由此可得$x+y+z$.

【详解】因为$PM=2MC$，$MD=\dfrac{1}{3}MN$，所以$\overrightarrow{PM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{PC},\overrightarrow{MD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{MN}$，

因为N是AB的中点，所以$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{PA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PA}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}\right)=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PB}$，

所以$\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{PM}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PM}+\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}\right)=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{PM}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PN}$，

所以$\overrightarrow{PD}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\overrightarrow{PC}+\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PB}\right)=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{PA}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{PB}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{PC}$，又$\overrightarrow{PD}=x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}+z\overrightarrow{PC}$，

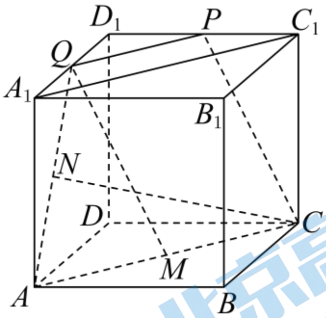
所以$x=\dfrac{1}{6},y=\dfrac{1}{6},z=\dfrac{4}{9}$，故$x+y+z=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{4}{9}=\dfrac{7}{9}$，

故答案为：$\dfrac{7}{9}$.

18.【答案】①③

【分析】对于①：根据相交直线确定唯一平面即可判断；对于②：转换顶点即可判断；对于③：建立空间直角坐标系，当$\angle QMC=90^{\circ}$时，$\overrightarrow{MQ}\bullet\overrightarrow{MC}=-\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$即可判断；对于④：当$\lambda=\frac{1}{2}$时，$Q$为$A_1D_1$的中点，过$Q$作$QP//A_1C_1$且$QP\cap D_1C_1=P$，则可证$QP//AC$，可得过$A,Q,M$三点的平面截正方体所得截面为等腰梯形$ACPQ$，再计算等腰梯形$ACPQ$的面积即可判断.

【详解】



对于①：因为$AC\cap AQ=A$，所以AC,AQ共面，设为平面α，即$C\in\alpha,Q\in\alpha$，

又因为$M\in AC$，$N\in AQ$，且$AC\in\alpha,AQ\in\alpha$，可得$M\in\alpha,N\in\alpha$，

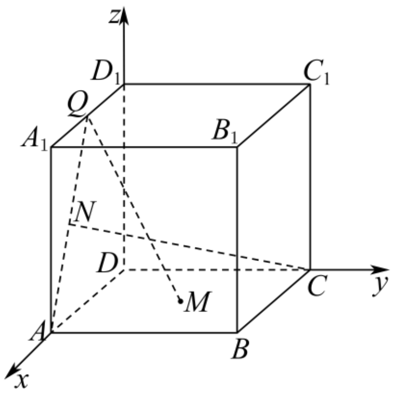
所以C,M,N,Q四点共面，故①正确；

对于②：因为三棱锥$A-DMN$的体积等于三棱锥$N-ADM$的体积，

又易知N到底面的距离等于定值$\frac{1}{2}$，而$\triangle ADM$的面积一定，

所以三棱锥$A-DMN$的体积为定值，故②错误；

对于③：建立如图所示空间直角坐标系，



所以由题知，$C(0,1,0),M(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0),A_1(1,0,1),D_1(0,0,1)$，

所以$\overrightarrow{MC}=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0),\overrightarrow{D_1A_1}=(1,0,0)$，

因为$\overrightarrow{D_1Q}=\lambda\overrightarrow{D_1A_1}$，则$\left|\overrightarrow{D_1Q}\right|=\lambda$，可得$Q(\lambda,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{MQ}=(\lambda-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)$，

当 $\angle QMC=90^{\circ}$ 时，$\overrightarrow{MQ}\bullet\overrightarrow{MC}=-\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$，

解得 $\lambda=0$，即 Q 与 D_1 重合，故③正确；

对于④：当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，Q 为 A_1D_1 的中点，

过 Q 作 $QP//A_1C_1$ 且 $QP\cap D_1C_1=P$，则 $QP=\frac{\sqrt{2}}{2},AC=\sqrt{2},AQ=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

因为 $AA_1//CC_1$，且 $AA_1=CC_1$，则 AA_1C_1C 为平行四边形，

则 $AC//A_1C_1$，可得 $QP//AC$，

所以过 A,Q,M 三点的平面截正方体所得截面为等腰梯形 $ACPQ$，

从而可得等腰梯形 $ACPQ$ 的高为 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$，

所以截面等腰梯形 $ACPQ$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2})\times\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{9}{8}$，故④错误；

故答案为：①③.

三、解答题（每题 15 分，共 60 分）

19.【答案】（1）相交，截得的弦长为 2.

（2）$x=4$ 或 $4x+3y-13=0$.

【分析】（1）利用点到直线的距离公式以及直线与圆的位置关系求解；

（2）利用直线与圆相切与点到直线的距离公式的关系求解.

【小问 1 详解】

由圆 $C:x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 可得，圆心 $C(1,-2)$，半径 $r=\frac{\sqrt{4+16+16}}{2}=3$，

圆心 $C(1,-2)$ 到直线 $l:x-y+1=0$ 的距离为 $d=\frac{|1+2+1|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}<r$，

所以直线 l 与圆 C 相交，

直线 l 被圆 C 截得的弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2$.

【小问 2 详解】

若过点 $(4,-1)$ 的直线斜率不出在，则方程为 $x=4$，

此时圆心 $C(1,-2)$ 到直线 $x=4$ 的距离为 $4-1=3=r$，满足题意；

若过点 $(4,-1)$ 且与圆 C 相切的直线斜率存在，

则设切线方程为 $y+1=k(x-4)$，即 $kx-y-4k-1=0$，

则圆心到直线 $kx-y-4k-1=0$ 的距离为 $\dfrac{|-3k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=3$，解得 $k=-\dfrac{4}{3}$，

所以切线方程为 $-\dfrac{4}{3}x-y+\dfrac{13}{3}=0$，即 $4x+3y-13=0$，

综上，过点 $(4,-1)$ 且与圆 C 相切的直线方程为 $x=4$ 或 $4x+3y-13=0$.

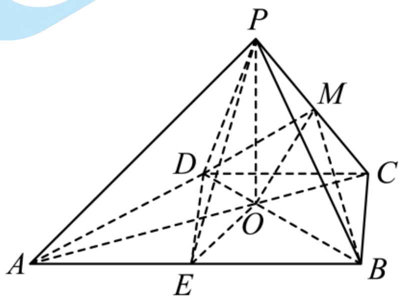
20.【答案】(1) $\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$；

(2) 45°； (3) 见解析.

【分析】(1) 由已知得到 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，利用线面垂直的性质得到 $PO\perp BD$，过 D 做 $DE\parallel BC$ 交于 AB 于 E，连接 PE，则 $\angle PDE$ 或其补角为异面直线 PD 与 BC 所成的角，利用平面几何即可得解；

(2) 连接 OE，由 $ABCD$ 为等腰梯形，所以 $OA=OB$，且 E 为 AB 中点，所以 $OE\perp AB$，又 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，$\angle PEO$ 为二面角 $P-AB-C$ 的平面角，然后求值即可；

(3) 连接 MD，MB，MO，利用 $PC\perp$ 平面 BMD，得到 $PC\perp OM$，Rt△POC 中求的 $PM=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$MC=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



【小问 1 详解】

∵$PO\perp$ 平面 $ABCD$，∴$PO\perp BD$

又 $PB\perp PD, BO=2, PO=\sqrt{2}$，

由平面几何可得：$OD=1, PD=\sqrt{3}, PB=\sqrt{6}$，

过 D 做 $DE\parallel BC$ 交于 AB 于 E，连接 PE，

则 $\angle PDE$ 或其补角为异面直线 PD 与 BC 所成的角，

∵四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，

∴$OC=OD=1$，$OB=OA=2$，$OA\perp OB$

∴ $BC=\sqrt{5}, AB=2\sqrt{2}, CD=\sqrt{2}$

又 $AB\parallel DC$∴四边形 $EBCD$ 是平行四边形.

∴ $ED=BC=\sqrt{5}, BE=CD=\sqrt{2}$

∴E 是 AB 的中点，且 $AE=\sqrt{2}$，

又 $PA=PB=\sqrt{6}$，

∴$\triangle PEA$ 为直角三角形，

∴ $PE=\sqrt{PA^2-AE^2}=\sqrt{6-2}=2$

在$\triangle PED$中，由余弦定理得$\cos\angle PDE=\dfrac{PD^2+DE^2-PE^2}{2PD\cdot DE}=\dfrac{3+5-4}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$

故异面直线 PD 与 BC 所成的角的余弦值为$\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$；

【小问 2 详解】

连接 OE，由 $ABCD$ 为等腰梯形，所以$OA=OB$，且E 为 AB 中点，

所以$OE\perp AB$，又$PO\perp$平面$ABCD$，

$\angle PEO$ 为二面角 $P-AB-C$ 的平面角，

∴$\sin\angle PE0=\dfrac{PO}{PE}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，∴$\angle PEO=45°$，

∴二面角 $P-AB-C$ 的平面角的大小为 $45°$；

【小问 3 详解】

连接 MD，MB，MO，

∵$PC\perp$平面 BMD，$OM\subset$平面 BMD，

∴$PC\perp OM$，

在 $Rt\triangle POC$ 中，$PC=PD=\sqrt{3}$，$OC=1$，$PO=\sqrt{2}$，

∴$PM=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$MC=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

∴ $\dfrac{PM}{PC}=\dfrac{2}{3}$，

故 $\lambda=\dfrac{2}{3}$时，$PC\perp$平面 BMD.

21.【答案】(1) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

(2) $m=\pm\sqrt{3}$

【分析】(1) 根据题意求出 a^2,b^2，即得答案;

(2) 联立直线和椭圆方程，可得根与系数关系式，利用弦长公式即可求得答案.

【小问 1 详解】

由题意得$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{2}=1$的焦点为$(\sqrt{3},0),(-\sqrt{3},0)$，

故椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦点为$(\sqrt{3},0),(-\sqrt{3},0)$，则$c=\sqrt{3}$；

令 $x=\sqrt{3}$，则 $\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \therefore y=\pm\frac{b^2}{a}$，

故由过椭圆 C 的右焦点且垂直于 x 轴的弦长度为 1 可得 $\frac{2b^2}{a}=1$，

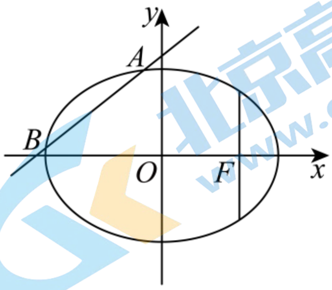
联立 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$，解得 $a^2=4, b^2=1$，

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

【小问 2 详解】

将 $y=x+m$ 代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 得 $5x^2+8mx+4(m^2-1)=0$，

需满足 $\Delta=80-16m^2>0$，即 $m^2<5$；



设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{8m}{5}, x_1x_2=\frac{4(m^2-1)}{5}$，

由 $|AB|=\frac{8}{5}$ 得 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{8}{5}$，

即 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{(-\frac{8m}{5})^2-4\cdot\frac{4(m^2-1)}{5}}=\frac{8}{5}$，解得 $m^2=3$，

故 $m=\pm\sqrt{3}$，符合题意.

22.【答案】(1) 椭圆 C 方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.（2）(i)证明见解析；(ii) $\frac{9}{2}$

【分析】

【详解】(I) 由题设 $a=2,c=1$,从而 $b^2=a^2-c^2=3$,

所以椭圆 C 方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(II)(i)由题意得 $F(1,0),N(4,0)$.

设 $A(m,n)$,则 $B(m,-n)(n\neq0)$, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……①

AF 与 BN 的方程分别为：$n(x-1)-(m-1)y=0$，

$n(x-4)-(m-4)y=0$.

$\frac{5}{2}$ 设 $M(x_0,y_0)$,则有 $n(x_0-1)-(m-1)y_0=0$,……②

$n(x_0-4)+(m-4)y_0=$"0," ……③

由②，③得

$x_0=\frac{5m-8}{2m-5}$, $y_0=\frac{3n}{2m-5}$.

所以点 M 恒在椭圆 G 上.

(ii)设 AM 的方程为 $x=xy+1$,代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 得（$3t^2+4$）$y^2+6ty-9=0$.

设 $A(x_1,y_1)$,M（x_2，y_2），则有：$y_1+y_2=\frac{-6x}{3x^2+4}$, $y_1y_2=\frac{-9}{3t^2+4}$.

$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3t^2+3}}{3t^2+4}$.

令 $3t^2+4=\lambda(\lambda\geq4)$,则

$|y_1-y_2|=\frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{\lambda-1}}{\lambda}=4\sqrt{3}\sqrt{-(\frac{1}{\lambda})^2+\frac{1}{\lambda}}=4\sqrt{3}\sqrt{-(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}$,

因为 $\lambda\geq4$，$0<\frac{1}{\lambda}\leq\frac{1}{4}$,所以当 $\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{4}$，即 $\lambda=4$，$t=0$时，

$|y_1-y_2|$有最大值 3，此时 AM 过点 F

$\triangle AMN$ 的面积 $S_{\triangle AMN}=|FN||y_1-y_2|=\frac{3}{2}|y_1-y_2|=\frac{3}{2}|y_1-y_2|$有最大值$\frac{9}{2}$.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！