# 育英学校高二年级第一学期数学（文）其中试卷

## 一、选择题（共 8 道小题，每小题 5 分，共 40 分，每道小题只有一个正确答案）

1. 抛物线$x^2=4y$的焦点到准线的距离为（　　）.

A. $\frac{1}{2}$　　B. $1$　　C. $2$　　D. $4$

2. 过点$(-1,-3)$且平行于直线$x-2y+3=0$的直线方程为（　　）.

A. $2x+y-1=0$　　B. $x-2y-5=0$　　C. $x-2y+7=0$　　D. $2x+y-5=0$

3. $\triangle ABC$的$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，若$a^2+b^2+\sqrt{3}ab=c^2$，则$\angle C$的大小为（　　）.

A. $150°$　　B. $135°$　　C. $120°$　　D. $60°$

4. 圆$C$的方程为$x^2+y^2+4x-2y+3=0$，则其圆心坐标及半径分别为（　　）.

A. $(2,1)$，$\sqrt{2}$　　B. $(-2,1)$，$2$　　C. $(2,1)$，$2$　　D. $(-2,1)$，$\sqrt{2}$

5. 已知两直线$m$，$n$及两个平面$\alpha$，$\beta$，给出下列四个命题，正确的命题是（　　）.

A. 若$m\parallel\alpha$，$n\parallel\alpha$则$m\parallel n$　　B. 若$\alpha\perp\beta$，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$则$m\perp n$

C. 若$\alpha\perp\beta$，$m\parallel\beta$则$m\perp\alpha$　　D. 若$\alpha\parallel\beta$，$m\parallel\alpha$则$m\parallel\beta$

6. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线方程为$y=\sqrt{3}x$，它的焦距为$8$，则此双曲线的方程为（　　）.

A. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　B. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$　　C. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　　D. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$

7. $F_1$，$F_2$是椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{7}=1$的两个焦点，$A$点是椭圆上一点，且$\angle AF_1F_2=\frac{\pi}{4}$，则$\triangle AF_1F_2$的面积为（　　）.

A. $7$　　B. $\frac{7}{4}$　　C. $\frac{7}{2}$　　D. $\frac{7\sqrt{5}}{2}$

8. 若抛物线$y=ax^2-1$上总存在两点关于直线$x+y=0$对称，则实数$a$的取值范围是（　　）.

A. $\left(0,\frac{1}{4}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$　　C. $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$

## 二、填空题（共 6 道小题，每道小题 5 分，共 30 分）

9. 如图所示，一个三棱锥的三视图是三个直角三角形，则该三棱锥的体积为__________.

10. 等差数列$\{a_n\}$满足$a_3=3$，公差$d=2$，则其通项公式$a_n=$____________，前$n$项和公式$S_n=$____________.

11. 抛物线的焦点在直线$x+4y-1=0$上，则抛物线的标准方程为____________.

12. 圆锥的底面半径等于$3cm$，其轴截面的面积等于$18\sqrt{2}$，则此圆锥侧面展开图的圆心角等于__________.

13. 已知$F_1$，$F_2$是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$在左，右焦点，$P$是椭圆上一点，若$\triangle PF_1F_2$是等腰直角三角形，则椭圆的离心率等于__________.

14. 以下关于圆锥曲线的4个命题中：

（1）方程$2x^2-5x+2=0$的两实根可分别作为椭圆和双曲线的离心率；

（2）设A，B为平面内两个定点，若$|PA|-|PB|=k(k>0)$，则动点P的轨迹为双曲线的一支；

（3）方程$kx^2+(4-k)y^2=1$表示椭圆，则k的取值范围是$(0,4)$；

（4）双曲线$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$与椭圆$\frac{x^2}{35}+y^2=1$有相同的焦点.

其中真命题的序号为__________（写出所有真命题的序号）.

## 三、解答题（共 6 道题，总分 80 分）

15. 求解下列各题

（1）正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的体对角线$AC_1$的长等于5，则棱$AA_1$的长等于3，求此四棱柱底面边长和表面积.

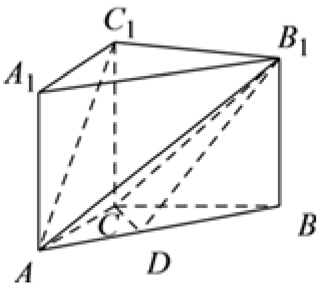
（2）一个球被一个平面所截，截面的面积等于$48\pi$，且球心到截面的距离等于球半径的一半，求这个球的表面积和体积.

16. 在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c．$2\sin C=3\cos C$.

（1）求角C的大小.

（2）若$a+b=2$，求边C的最小值.

17. 如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AC=BC$，$\angle ACB=90°$，点D是AB的中.




求证：（1）$CD\perp$平面$A_1ABB_1$.

（2）$AC_1\perp BC$.

（3）$AC_1\parallel$平面$B_1CD$.

18. 已知两点$A(2,0)$，$B(0,1)$在椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上.

（1）求椭圆C的标准方程和焦点坐标.

（2）若$P(x,y)$是椭圆上的动点，$Q(m,0)$是x轴正半轴上的一个定点，求线段PQ的长度$|PQ|$关于x的函数表达式，并求$|PQ|$的最小值.

19. 设数列$\{a_n\}$满足$a_n=3a_{n-1}+2(n\geq 2,n\in N^*)$，且$a_1=2$.

（1）求$a_2$，$a_3$，$a_4$的值.

（2）证明：数列$\{a_n+1\}$为等比数列，并求出数列$\{a_n\}$的前n项和$T_n$.

（3）若数列$b_n = \log_3(a_n + 1)$，求数列$\left\{\frac{1}{b_n b_{n+1}}\right\}$的前$n$项和$S_n$.

20. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$过点$P(-1,-1)$，$c$为椭圆的半焦距，且$c = \sqrt{2}b$.

（1）求椭圆$C$的方程.

（2）过点$P$作两条互相垂直的直线$l_1$，$l_2$，与椭圆$C$分别交于另两点$M$，$N$.

①若直线$l_1$的斜率为$-1$，求$\triangle PMN$的面积.

②若线段$MN$的中点在$x$轴上，求直线$MN$的方程.

# 育英学校高二年级第一学期数学（文）其中试卷

## 一、选择题（共 8 道小题，每小题 5 分，共 40 分，每道小题只有一个正确答案）

1. 抛物线$x^2=4y$的焦点到准线的距离为（　　）.

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 4

【答案】C

考点：抛物线的性质

2. 过点$(-1,-3)$且平行于直线$x-2y+3=0$的直线方程为（　　）.

A. $2x+y-1=0$　　B. $x-2y-5=0$　　C. $x-2y+7=0$　　D. $2x+y-5=0$

【答案】B

【解析】由条件知直线的斜率为$\frac{1}{2}$，又过$(-1,-3)$，即$y-(-3)=\frac{1}{2}[x-(-1)]$，化简得到

即$x-2y-5=0$．

故选B．

3. $\triangle ABC$的$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的对边分别为a，b，c，若$a^2+b^2+\sqrt{3}ab=c^2$，则$\angle C$的大小为（　　）.

A. $150°$　　B. $135°$　　C. $120°$　　D. $60°$

【答案】A

【解析】由余弦定理得到$\cos\angle C=\frac{a^2+b^2+c^2}{2ab}$，根据条件又$a^2+b^2-c^2=-\sqrt{3}ab$，代入上式得到

$\cos\angle C=\frac{-\sqrt{3}}{2}$，又为三角形内角故$C\in(0°,180°)$，$\therefore\angle C=150°$．

故选A．

4. 圆C的方程为$x^2+y^2+4x-2y+3=0$，则其圆心坐标及半径分别为（　　）.

A. $(2,1)$，$\sqrt{2}$　　B. $(-2,1)$，2　　C. $(2,1)$，2　　D. $(-2,1)$，$\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】圆$C:x^2+y^2+4x-2y+3=0$，化为标准式得到$(x+2)^2+(y-1)^2=2$．由标准方程的定义得到，

圆心为$(-2,1)$，半径为$\sqrt{2}$．

故选D．

5. 已知两直线m，n及两个平面α，β，给出下列四个命题，正确的命题是（　　）.

A. 若$m \parallel \alpha$，$n \parallel \alpha$则$m \parallel n$　　B. 若$\alpha \perp \beta$，$m \perp \alpha$，$n \perp \beta$则$m \perp n$

C. 若$\alpha \perp \beta$，$m \parallel \beta$则$m \perp \alpha$　　D. 若$\alpha \parallel \beta$，$m \parallel \alpha$则$m \parallel \beta$

【答案】B

【解析】A中，m与n可能相交，不一定是平行的故A错误.

B中，两条线垂直于两个垂直的平面，则两条线应是垂直关系，故B正确.

C中，m与α可能平行，故C错误.

D中，m可能在β上，此时不满足$m \parallel \beta$ D错误.

故选B．

6. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线方程为$y=\sqrt{3}x$，它的焦距为8，则此双曲线的方程为（　　）.

A. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　B. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$　　C. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　　D. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$

【答案】C

【解析】由题知$2c=8$，$\therefore c=4$．又$y=\sqrt{3}x=\frac{b}{a}x$，

$\therefore b=\sqrt{3}a$，$(a,b,c>0)$．又$a^2+b^2=c^2$，

$\therefore a^2+3a^2=16$．得$a=2$，$b=2\sqrt{3}$．故双曲线方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$．

故选C．

**点睛**：根据双曲线的渐近线方程得到$y=\sqrt{3}x=\frac{b}{a}x$，再结合$a^2+b^2=c^2$，可以求得双曲线方程。明确双曲线的焦点位置，可以确定渐近线方程为$y=\frac{b}{a}x$，根据双曲线中基本量的关系，得到$a^2+b^2=c^2$，二元二次方程组，可以求得方程。

7. $F_1$，$F_2$是椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{7}=1$的两个焦点，A点是椭圆上一点，且$\angle AF_1F_2=\frac{\pi}{4}$，则$\triangle AF_1F_2$的面积为（　　）.

A. 7　　B. $\frac{7}{4}$　　C. $\frac{7}{2}$　　D. $\frac{7\sqrt{5}}{2}$

【答案】C

【解析】试题分析：由题意$a=3$，$b=\sqrt{7}$，$c=\sqrt{2}$得$|F_1F_2|=2\sqrt{2}$，由椭圆的定义可以得到$AF_2=6-AF_1$，利用余弦定理$AF_2^2=AF_1^2+F_1F_2^2-2AF_1\cdot F_1F_2\cos45^\circ=AF_1^2-4AF_1+8=(6-AF_1)^2$，求出$AF_1=\frac{7}{2}$，故三角形$AF_1F_2$面积$S=\frac{1}{2}\times\frac{7}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7}{2}$

考点：1.椭圆的定义、标准方程；2.椭圆的性质；3.余弦定理的应用.

8. 若抛物线$y=ax^2-1$上总存在两点关于直线$x+y=0$对称，则实数a的取值范围是（　　）.

A. $\left(0,\frac{1}{4}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$　　C. $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$

【答案】D

【解析】设两个对称点为$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

线段PQ的中点为$M(x,y)$，

设直线PQ的方程为$y=x+b$，

由于P，Q两点存在，

故$\begin{cases}y=x+b\\y=ax^2-1\end{cases}$，有两组不同的实数解，

即$ax^2-x-(1+b)=0$，

$\because \triangle=1+4a(1+b)>0$．①

由中点坐标公式可得$x=\frac{x_1-x_2}{2}=\frac{1}{2a}$，

$y=x+b=\frac{1}{2a}+b$．

$\because M$在直线L上，

$\therefore O=x+y=\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}+b$，

即$b=\frac{1}{a}$，代入①解得$a>\frac{3}{4}$．

故选D．

**点睛**：本题考查的是点的对称性和抛物线结合，设两个对称点为$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，根据对称的方程可设直线PQ的方程为$y=x+b$，由于P，Q两点存在，故$\begin{cases}y=x+b\\y=ax^2-1\end{cases}$，转化为上方程有两组不同的实数解问题。

## 二、填空题（共 6 道小题，每道小题 5 分，共 30 分）

9. 如图所示，一个三棱锥的三视图是三个直角三角形，则该三棱锥的体积为__________.

【答案】$V=4$

【解析】试题分析：根据题意由于三视图，可知该几何体提的底面是直角三角形，直角边为 2，和 4，同时高为 3，那么利用三棱锥的体积公式可知，$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times4\times3=4$,故答案为 4.

考点：三视图，三棱锥体积

点评：解决该试题的关键是还原几何体，运用相应的体积公式来得到，属于基础题。

10. 等差数列$\{a_n\}$满足$a_3=3$，公差$d=2$，则其通项公式$a_n=$____________，前n项和公式$S_n=$____________.

【答案】 (1). $2n-3$， (2). $n^2-2n$

【解析】由等差数列的通项的性质得到：$a_3=3$，$d=2$．$\therefore a_n=a_3+d\cdot(n-3)=3+2n-6=2n-3$．

由等差数列前 n 项和的性质得到：$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)\ =\frac{n}{2}\cdot(-1+2n-3)=n^2-2n$ .

故$a_n=2n-3$ , $S_n=\ n^2-2n$.

11. 抛物线的焦点在直线$x+4y-1=0$上，则抛物线的标准方程为____________.

【答案】$y^2=4x$或$x^2=y$

【解析】$x+4y-1=0$与坐标轴的交点为$(1,0)$和$\left(0,\frac{1}{4}\right)$. 当抛物线焦点为$(1,0)$时，

$\frac{P}{2}=1$ , $P=2$. 故抛物线为$y^2=4x$ .

当抛物线焦点为$\left(0,\frac{1}{4}\right)$时，$\frac{P}{2}=\frac{1}{4}$ , $P=\frac{1}{2}$ .

故抛物线为$x^2=y$

12. 圆锥的底面半径等于$3cm$，其轴截面的面积等于$18\sqrt{2}$，则此圆锥侧面展开图的圆心角等于__________.

【答案】$120°$

【解析】圆锥展开后是扇形，要求扇形的圆心角先求得弧长，即圆锥的底面圆的周长，由周截面面积公式得到：

$18\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times6\times h$ , $h=6\sqrt{2}$，母线 $=\sqrt{(6\sqrt{2})^2+3^2}=9$，故$\frac{\theta}{360°}=\frac{3}{9}$ ,

得$\theta=120°$ .

13. 已知$F_1$，$F_2$是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$在左，右焦点，$P$是椭圆上一点，若$\triangle PF_1F_2$是等腰直角三角形，则椭圆的离心率等于__________.

【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$或$\sqrt{2}-1$

【解析】由$\triangle PF_1F_2$是等腰直角三角形，若$P$为直角顶点，即有$OP=OF_1$ ,

即为$b=c$，即有$a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{2}c$. 则$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

故椭圆离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$或$\sqrt{2}-1$ .

**点睛**：这个题目考考查了分类讨论的思想，已知$\triangle PF_1F_2$是等腰直角三角形，可得到要讨论哪个角是直角，若$P$为直角顶点，可得$b=c$ , 进而求得离心率。令角$F_2$为直角 , 此时$P(c,y)$ , 代入椭圆方程得到基本量的关系。

14. 以下关于圆锥曲线的4个命题中：

（1）方程$2x^2-5x+2=0$的两实根可分别作为椭圆和双曲线的离心率；

（2）设$A$，$B$为平面内两个定点，若$|PA|-|PB|=k(k>0)$，则动点$P$的轨迹为双曲线的一支；

（3）方程$kx^2+(4-k)y^2=1$表示椭圆，则$k$的取值范围是$(0,4)$；

（4）双曲线$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$与椭圆$\frac{x^2}{35}+y^2=1$有相同的焦点.

其中真命题的序号为___________（写出所有真命题的序号）.

【答案】（1）（2）（4）

【解析】（1）中$2x^2-5x+2=0$的两实根为$\frac{1}{2}$和2，可分别作为椭圆和双曲线的离心率，正确.

（2）中，由双曲线定义动点到两定点距离之差是定值，且定值小于两定点距离。知（2）正确.

（3）中，$k>0$，$4-k>0$且$k\neq 4-k$，故k的取值范围为$(0,2)\cup(2,4)$，（3）错误.

（4）中，双曲线和椭圆焦点都为$(\sqrt{34},0)$．$(-\sqrt{34},0)$，（4）正确.

故正确的选项为（1）（2）（4）。

**点睛**：这个题目的综合性较强，首先明确椭圆离心率是介于(0,1) 之间的而双曲线是大于 1 的；再就是考查双曲线的课本定义；第三个根据椭圆的基本方程得到$4-k>0$且$k\neq 4-k$，第四个根据各自的基本量的关系得到焦点坐标。

## 三、解答题（共 6 道题，总分 80 分）

15. 求解下列各题

（1）正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的体对角线$AC_1$的长等于5，则棱$AA_1$的长等于3，求此四棱柱底面边长和表面积.

（2）一个球被一个平面所截，截面的面积等于$48\pi$，且球心到截面的距离等于球半径的一半，求这个球的表面积和体积.

【答案】(1) 表面积为$16+24\sqrt{2}$，底面边长为$2\sqrt{2}$；(2) 球体积$\frac{2048}{3}\pi$，球表面积$256\pi$.

【解析】**试题分析**：（1）正四棱柱就是地面为正方形的长方体，侧棱垂直于底面，根据勾股定理可得底面边长为a，则$5=\sqrt{3^2+(\sqrt{2}a)^2}$，得$a=2\sqrt{2}$，知道长宽高，即可求得结果。

（2）由截面面积可求得截面的半径，截面圆半径$r=\sqrt{R^2-\left(\frac{1}{2}R\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}R$，再根据圆中垂面定理求得球的半径，进而得到结果。

(1)设底面边长为a，则$5=\sqrt{3^2+(\sqrt{2}a)^2}$，得$a=2\sqrt{2}$表面积$=(2\sqrt{2})^2\times 2+3\times 2\sqrt{2}\times 4=16+24\sqrt{2}$. 故底面边长为$2\sqrt{2}$. 表面积为$16+24\sqrt{2}$.

（2）设球半径为R，则截面圆半径$r=\sqrt{R^2-\left(\frac{1}{2}R\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}R$，故$48\pi=\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2$，

得$R=8$. 故球表面积$=4\pi R^2=4\pi\times 64=256\pi$. 球体积$=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{2048}{3}\pi$.

16. 在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c．$2\sin C=3\cos C$.

（1）求角C的大小.

（2）若$a+b=2$，求边C的最小值.

【答案】(1) $C=\frac{\pi}{3}$；(2) $C_{最值}=1$.

【解析】试题分析：(1) 由正余弦公式得到 $2(1-\cos^2C)=3\cos C$，再解二次方程得到余弦值，从而得角；(2) 根据余弦定理 $\cos C=\frac{1}{2}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 再结合 $a+b=2$，最终得到 $c^2=4-3ab$，再由均值不等式得到 $ab\le 1$，从而得到 $C_{最值}=1$.

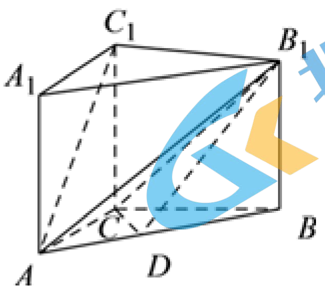
(1) $2\sin^2C=3\cos C$，则 $2(1-\cos^2C)=3\cos C$，即 $2\cos^2C+3\cos C-2=0$，

故 $\cos C=\frac{1}{2}$ 或 $-2$（舍去）．$\therefore\cos C=\frac{1}{2}$，又 $C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$.

(2) $a+b=2$，$\cos C=\frac{1}{2}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，即 $ab=(a+b)^2-2ab-c^2$，即 $c^2=4-3ab$.

又 $a+b=2\ge 2\sqrt{ab}$，故 $ab\le 1$，$\therefore c^2=4-3ab\ge 1$．故当且仅当 $a=b=1$ 时，$C_{最值}=1$，

17. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=BC$，$\angle ACB=90°$，点 $D$ 是 $AB$ 的中.




求证：(1) $CD\perp$ 平面 $A_1ABB_1$.

(2) $AC_1\perp BC$.

(3) $AC_1\parallel$ 平面 $B_1CD$.

【答案】(1)见解析；(2)见解析；(3) 见解析.

【解析】试题分析：(1) 由原图是直棱柱得到 $CD\perp AA_1$，再有 $AC=BC$，$\angle ACB=90°$，点 $D$ 是 $AB$ 的中得到 $CD\perp AB$；(2) 由 $AC\perp BC$，且 $BC_1$ 在平面 $ABC$ 内的射影为 $BC$，能证明 $AC\perp BC_1$．(3) 设 $CB_1$ 与 $C_1B$ 的交点为 $E$，连结 $DE$，由已知推导出 $DE\parallel AC_1$，由此能证明 $AC_1\parallel$ 平面 $CDB_1$．

(1) $\because CA=CB$，且 $D$ 为 $AB$ 中点，

$\therefore CD\perp AB$.

$\because$ 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，

$\therefore AA_1\perp$ 面 $ABC$，

又 $CD\subset$ 面 $ABC$，

$\therefore CD\perp AA_1$，

又 $CD\perp AB$，$AA_1\cap AB=A$，

$AA_1$，$AB\subset$ 面 $A_1ABB_1$，

$\therefore CD \perp$ 面$A_1ABB_1$.

（2）由（1）知，$A_1A \perp$ 面$ABC$，

又$BC \subset$ 面$ABC$，

$\therefore BC \perp A_1A$.

又$BC \perp AC$，$A_1A \cap AC = A$，

$A_1A$，$AC \subset$ 面$AA_1C_1C$，

$\therefore BC \perp$ 面$AA_1C_1C$，

又$AC_1 \subset$ 面$AA_1C_1C$，

$\therefore AC_1 \perp BC$.

（3）连接$BC_1$，交$CB_1$于$O$点，连接$OD$.

易知$O$为$BC_1$中点，

又$D$为$BC_1$中点，

$\therefore OD$是$BC_1A$中位线.

$\therefore AC_1 \parallel OD$

又$OD \subset$ 面$B_1CD$，

$AC_1 \not\subset$面$B_1CD$，

$\therefore AC_1 \parallel$ 面$B_1CD$.

18. 已知两点$A(2,0)$，$B(0,1)$在椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上.

（1）求椭圆$C$的标准方程和焦点坐标.

（2）若$P(x,y)$是椭圆上的动点，$Q(m,0)$是$x$轴正半轴上的一个定点，求线段$PQ$的长度$|PQ|$关于$x$的函数表达式，并求$|PQ|$的最小值.

【答案】(1) 焦点坐标为$(-\sqrt{3},0)$，$(\sqrt{3},0)$；(2) 见解析.

【解析】**试题分析**：(1) 由椭园中的已知点和$c^2=a^2-b^2$这一关系可以得到椭圆$C$标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$；(2) 直接翻译条件根据点点距离公式到得到$|PQ|=\sqrt{(x-m)^2+y^2}=\sqrt{x^2-2mx+m^2+1-\frac{x^2}{4}}$再根据二次函数和$0<m\le 2$求得式子的范围.

（1）将$A(2,0)$，$B(0,1)$代入椭圆方程，得$\frac{4}{a^2}=0$，$\frac{1}{b^2}=1$．$\therefore a^2=4$，$b^2=1$．

$c^2=a^2-b^2=3$，$c=\sqrt{3}$．故椭圆$C$标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$．焦点坐标为$(-\sqrt{3},0)$，$(\sqrt{3},0)$．

（2）$0<m\le 2$．$|PQ|=\sqrt{(x-m)^2+y^2}=\sqrt{x^2-2mx+m^2+1-\frac{x^2}{4}}$

$=\sqrt{\frac{3}{4}x^2-2mx+1+m^2}$．①$m\in\left(0,\frac{3}{2}\right]$时，$x=\frac{4}{3}$，$m\in(0,2]$．此时$x=\frac{4}{3}$时

$|PQ|_{最值}=\sqrt{\frac{3-m^2}{3}}=\frac{\sqrt{4-3m^2}}{3}$. ②$m\in\left(\frac{3}{2},2\right]$时，$x=\frac{4}{3}$，$m\in\left(2,\frac{8}{3}\right]$，此时$x=2$时，$|PQ|_{最值}=2-m$.

19. 设数列$\{a_n\}$满足$a_n=3a_{n-1}+2(n\geq 2,n\in N*)$，且$a_1=2$.

（1）求$a_2$，$a_3$，$a_4$的值.

（2）证明：数列$\{a_n+1\}$为等比数列，并求出数列$\{a_n\}$的前n项和$T_n$.

（3）若数列$b_n=\log_3(a_n+1)$，求数列$\left\{\frac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前n项和$S_n$.

【答案】(1) $a_2=8$，$a_3=26$，$a_4=80$；(2) 见解析；(3) $S_n=\frac{n}{n+1}$

【解析】**试题分析**：(1）根据$a_n=3a_{n-1}+2$这一表达式直接带入求得每一项的值；(2）构造等比数列$a_n+1=3(a_{n-1}+2)$检验首相，满足等比数列的概念；(3) $b_n=\log_n(a_n+1)=n$，$\frac{1}{b_n\cdot b_n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，裂项求和即可。

（1）$a_1=2$，$a_2=3a_1+2=8$，$a_3=3a_2+2=26$，$a_4=3a_3+2=80$.

（2）由$a_n=3a_{n-1}+2$，得$a_n+1=3(a_{n-1}+2)$，又$a_1+1=3$，可知$\{a_n+1\}$是首项为3，公比为3的等比数列.

（3）$a_n+1=3^n$，即$a_n=3^n-1$，$b_n=\log_n(a_n+1)=n$，$\therefore\frac{1}{b_n\cdot b_n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

$\therefore S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{n+1}$

**点睛**：这个题目考查了数列特定项的求法，直接带入递推公式求出即可；(2）根据要求证的式子构造数列，证明满足等比数列概念即可；(3）观察数列通项，裂项求和即可.总体来说考查了数列中的基本知识方法。

20. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$P(-1,-1)$，c为椭圆的半焦距，且$c=\sqrt{2}b$.

（1）求椭圆C的方程.

（2）过点P作两条互相垂直的直线$l_1$，$l_2$，与椭圆C分别交于另两点M，N.

①若直线$l_1$的斜率为$-1$，求$\triangle PMN$的面积.

②若线段MN的中点在x轴上，求直线MN的方程.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=1$；(2) ①$\triangle PMN$的面积为$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=2$；②直线MN的方程$y=-x$或$x=-\frac{1}{2}$.

【解析】**试题分析**：(1）由已知条件推导出$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，且 $c^2=2b^2$，由此能求出椭圆方程.

(2）设 $l_1$ 方程为 $y+1=k(x+1)$，联立$\begin{cases}y=kx+k-1\\x^2+3y^2=4\end{cases}$，得（$1+3k^2$）$x^2+6k(k-1)x+3(k-1)^2-4=0$．由此能求出△PMN 的面积.

(3）设 $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$，利用点差法能求出直线 MN 的方程为 $x+y=0$ 或 $x=\frac{1}{2}$.

（1）有条得$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，且$c^2=2b^2$，所以$a^2=3b^2$，解得$b^2=\frac{4}{3}$，$a^2=4$．故椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=1$．

（2）①设$l_1$方程$y+1=k(x+1)$联立$\begin{cases} y=kx+k-1 \\ x^2+3y^2=4 \end{cases}$，消去$y$得

$(1+3k^2)\cdot x^2+6k(k-1)x+3(k-1)^2-4=0$，

因为$P(-1,-1)$，解得$M\left(\frac{-3k^2+6k+1}{1+3k^2},\frac{3k^2+2k-1}{1+3k^2}\right)$， 当$k\neq0$时，用$-\frac{1}{k}$代替$k$，

得$N\left(\frac{k^2-6k-3}{3+k^2},\frac{-k^2-2k+3}{3+k^2}\right)$．将$k=-1$代入，得$M(-2,0)$，$N(1,1)$．

因为$P(-1,-1)$，所以$PM=\sqrt{2}$，$PN=2\sqrt{2}$，所以$\triangle PMN$的面积为$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=2$．

②设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则$\begin{cases} x_1^2+y_1^2=4 \\ x_2^2+3y_2^2=4 \end{cases}$ 两式相减得$(x_1+x_2)\cdot(x_1-x_2)+3(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$，

因为线段$MN$的中点在$x$轴上．所以$y_1+y_2=0$，从而可得$(x_1+x_2)(x_1-x_2)=0$．

若$x_1+x_2=0$，则$N(-x,-y)$，因为$PM\perp PN$，所以$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$，

得$x_1^2+y_1^2=2$，又因为$x_1^2+3y_1^2=4$，所以解得$x_1=\pm1$，

所以$M(-1,1)$，$N(1,-1)$或$M(1,-1)$，$N(-1,1)$．

所以直线$MN$的方程为$y=-x$．

若$x_1-x_2=0$，则$N(x_1-y_1)$，因为$PM\perp PN$，所以$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$．

得$y_1^2=(x_1-1)^2+1$，又因为$x_1^2+3y_1^2=4$，所以解得$x=-1$或$-\frac{1}{2}$．

经检验$x=-\frac{1}{2}$满足条件， $x=-1$不满足条件．

综上，直线$MN$的方程$y=-x$或$x=-\frac{1}{2}$．

**点睛**：本题考查椭圆方程的求法第一问根据点在椭圆上代入点坐标求得参数值，考查三角形面积的求法第二问是直角三角形，直接求直角边长即可，考查直线方程的求法，并且要有向量坐标化的意识，以及点差法的合理运用．