数学试题参考答案

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。

1. B　2. C　3. A　4. C　5. B　6. D　7. B　8. D

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

9. AC　10. BC　11. BCD　12. AD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 61π　14. $\frac{1}{3}$, -3　15. $\sin \pi x$　16. 32

四、解答题：共70分。

17. 解：

(1) 由题设得 $a_{n+2}+a_{n+1}=3a_{n+1}+3a_n=3(a_{n+1}+a_n)$，且 $a_n+a_{n+1}\neq 0$.

因此数列 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 是首项为 a_1+a_2，公比为3的等比数列.

(2) 由(1)知 $a_n+a_{n+1}=(a_1+a_2)3^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}$，于是 $a_{n+1}-\frac{3^n}{2}=-(a_n-\frac{3^{n-1}}{2})$.

又 $a_1-\frac{1}{2}=0$，故 $a_n-\frac{3^{n-1}}{2}=0$.

因此 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{3^{n-1}}{2}$.

18. 解：

(1) 在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle ABD=\dfrac{1+(\frac{3}{2})^2-1}{2\times 1\times\frac{3}{2}}=\frac{3}{4}$.

由题设得 $\angle BDC=\angle ABD$，所以 $\cos\angle BDC=\frac{3}{4}$.

在 $\triangle CBD$ 中，由余弦定理得 $BC^2=1+1-2\cos\angle BDC=\frac{1}{2}$，故 $BC=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 设 $\angle BDC = \alpha$，则 $BC = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$AB = 2\cos\alpha$.

由已知得 $\cos\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}$，即 $2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} + 2\sin\dfrac{\alpha}{2} - 1 = 0$.

解得 $\sin\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$（舍去），$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

故 $\cos\alpha = \sqrt{3} - 1$，即 $\cos\angle BDC = \sqrt{3} - 1$.

19. 解：

用 A_i 表示事件"设备在一天的运转中，部件 i 需要调整"，$i = 1,2,3$.

(1) 用 A 表示事件"设备在一天的运转中，部件 1,2 中至少有 1 个需要调整".

则 $\overline{A} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}$，且 $\overline{A_1}$，$\overline{A_2}$ 相互独立.

从而 $P(\overline{A}) = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}) = P(\overline{A_1})(\overline{A_2}) = (1-0.1)(1-0.2) = 0.72$，

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0.28$.

(2) X 的可能取值为 0,1,2,3.

$P(X=0) = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = (1-0.1)(1-0.2)(1-0.3) = 0.504$，

$$\begin{aligned}P(X=1) &= P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)\\ &= P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)\\ &= P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)\\ &= 0.10\times0.80\times0.70 + 0.90\times0.20\times0.70 + 0.90\times0.80\times0.30\\ &= 0.398,\end{aligned}$$

$P(X=3) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0.1\times0.2\times0.3 = 0.006$，

$$\begin{aligned}P(X=2) &= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=3)]\\ &= 1 - (0.504 + 0.398 + 0.006)\\ &= 0.092.\end{aligned}$$

X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.504	0.398	0.092	0.006

X 的数学期望

$$\begin{aligned}EX &= 0\times P(X=0) + 1\times P(X=1) + 2\times P(X=2) + 3\times P(X=3)\\ &= 0\times0.504 + 1\times0.398 + 2\times0.092 + 3\times0.006\\ &= 0.6.\end{aligned}$$

20. 解：

(1) 四棱锥共有 5 个顶点，5 个面. 四棱锥所有面角之和等于 4 个三角形内角之和再加上 1 个四边形内角之和.

所以四棱锥的总曲率为 $5\times2\pi - 4\times\pi - 2\pi = 4\pi$.

(2) 设多面体顶点数为 V，棱数为 E，面数为 F.

多面体的总曲率 $= V\times2\pi -$ 多面体所有面角之和

$= V\times2\pi -$ 多面体的所有面的内角之和.

多面体的面均为多边形，由多边形的内角和公式可知，多面体的所有面的内角之和的计算过程中，每条棱都计算了两次，所以多面体的所有面的内角之和等于 $2E\times\pi - F\times2\pi$，从而多面体的总曲率为

$V\times2\pi - 2E\times\pi + F\times2\pi = (V - E + F)\times2\pi = 4\pi$.

因此，这类多面体的总曲率是常数.

21. 解：

(1) 当 $BF\perp AF$ 时，$|BF| = b\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2} - 1} = \dfrac{b^2}{a}$，由已知得 $\dfrac{b^2}{a} = a + c$.

又 $c^2 = a^2 + b^2$，故 $2a^2 + ac - c^2 = 0$，解得 $\dfrac{c}{a} = -1$（舍去），$\dfrac{c}{a} = 2$.

所以 C 的离心率为 2.

(2) 由(1) 得 $c = 2a, b = \sqrt{3}a$.

设 $B(x_0, y_0)$, 则 $x_0 > 0, y_0 > 0$, 且 $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{3a^2} = 1$, 即 $y_0^2 = 3x_0^2 - 3a^2$.

当 $x_0 \neq c$ 时, $\tan\angle BAF = \frac{y_0}{x_0 + a}$, $\tan\angle BFA = \frac{-y_0}{x_0 - c}$.

所以 $\tan 2\angle BAF = \frac{2\tan\angle BAF}{1 - \tan^2\angle BAF} = \frac{2(x_0 + a)y_0}{(x_0 + a)^2 - y_0^2} = \frac{2(x_0 + a)y_0}{-2(x_0 + a)(x_0 - 2a)} = \frac{-y_0}{x_0 - c}$.

因此, $\tan 2\angle BAF = \tan\angle BFA$, 即 $\angle BFA = 2\angle BAF$.

当 $x_0 = c$ 时, 由已知得 $\angle BFA = 2\angle BAF$.

综上, $\angle BFA = 2\angle BAF$.

22. 解:

(1) $f'(x) = e^x - \cos x + \sin x$;

(ⅰ) 当 $x \in (-\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}]$ 时, $-\sin x - \cos x \geqslant 0$, 故 $f(x) \geqslant 0$;

(ⅱ) 当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 时, $-\cos x + \sin x < -1$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 而 $f(0) = 0$, 故 $f(x) \geqslant 0$;

(ⅲ) 当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$;

(ⅳ) 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $1 + x > \cos x + \sin x$. 设 $h(x) = e^x - x - 1$, 则当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $h'(x) = e^x - 1 > 0$, 故 $h(x)$ 单调递增, $h(0) = 0$, 所以 $f(x) > h(x) > 0$.

(2) 设 $k(x) = (g(x) - 2 - ax)' = g'(x) - a = e^x + \cos x - \sin x - a$, 则 $k'(x) = f(x)$, 由(1) 知, 当 $x \in (-\frac{5\pi}{4}, +\infty)$ 时, $k'(x) \geqslant 0$, $k(x)$ 在 $(-\frac{5\pi}{4}, +\infty)$ 单调递增, $k(0) = 2 - a$.

(ⅰ) 若 $a > 2$, $k(0) < 0$, $k(\ln a + 1) > 0$, 故存在唯一 $x_0 \in (0, \ln a + 1)$, 使得 $k(x_0) = 0$. 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $k(x) < 0$, $g(x) - 2 - ax$ 单调递减, 而 $g(0) - 2 - a \times 0 = 0$, 故 $g(x_0) - 2 - ax_0 < 0$;

(ⅱ) 若 $0 < a < 2$, $k(0) > 0$, $k(-\pi) < 0$, 故存在唯一 $x_1 \in (-\pi, 0)$, 使得 $k(x_1) = 0$, 当 $x \in (x_1, 0)$ 时, $k(x) > 0$, $g(x) - 2 - ax$ 单调递增, 而 $g(0) - 2 - a \times 0 = 0$, 故 $g(x_1) - 2 - ax_1 < 0$;

(ⅲ) 若 $a \leqslant 0$, $g(-\frac{\pi}{2}) - 2 - a(-\frac{\pi}{2}) < 0$;

(ⅳ) 若 $a = 2$, $k(x)$ 单调递增, $k(0) = 0$.

当 $x \in (-\frac{5\pi}{4}, 0)$ 时, $k(x) < 0$, $g(x) - 2 - 2x > 0$;

当 $x \in (-\infty, -2)$ 时, $g(x) - 2 - 2x > 0$;

当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $k(x) > 0$, $g(0) - 2 - 2 \times 0 = 0$, 故 $g(x) - 2 - 2x > 0$.

综上 $a = 2$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索 "K12 教育+互联网+大数据" 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 "衔接和桥梁纽带" 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。