2018 北大附中高二（上）期末

数　　学（理）

2018.1

本试卷共 8 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分　　（选择题　共 56 分）

一、选择题(共 14 小题，每小题 4 分，共 56 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项)

1. 设 $a\in\mathbf{R}$，则“$a>1$”是“$a^2>1$”的

（A）充分非必要条件　　（B）必要非充分条件

（C）充要条件　　（D）既非充分也非必要条件

2. 从装有 2 个红球和 2 个黑球的口袋内任取 2 个球，那么，互斥而不对立的两个事件是

（A）至少有一个黑球与都是黑球　　（B）至少有一个黑球与至少有一个红球

（C）恰有一个黑球与恰有 2 个黑球　　（D）至少有一个黑球与都是红球

3. 某学校开设 A 类选修课 3 门，B 类选修课 4 门，一位同学从中共选 3 门，若要求两类课程各至少选 1 门，则不同的选法共有

（A）30 种　　（B）31 种　　（C）35 种　　（D）60 种

4. 已知命题 $p:\exists x\in\mathbf{R}$，使 $\sin x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$；命题 $q:\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2+x+1>0$. 给出下列结论：

（A）命题 p 是真命题　　（B）命题“$\neg p\wedge q$”是真命题

（C）命题“$p\wedge q$”是真命题　　（D）命题“$\neg p\vee\neg q$”是假命题

5. 在二项式 $(x^2-\dfrac{2}{x})^6$ 的展开式中，含 x^6 的项的系数是

（A）-15　　（B）15　　（C）-60　　（D）60

6. 将五枚硬币同时抛掷在桌面上，至少出现两次正面朝上的概率是

(A) $\frac{5}{16}$　(B) $\frac{13}{16}$　(C) $\frac{21}{32}$　(D) $\frac{27}{32}$

7. $(1-2x)^5(2+x)$ 的展开式中 x^3 的项的系数是

(A) 100　(B) -100　(C) 120　(D) -120

8. 2位男生和3位女生共5位同学站成一排, 3位女生中有且只有两位女生相邻, 则不同排法的种数是

(A) 72　(B) 60　(C) 36　(D) 24

9. 若 $(3x^3+\frac{1}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中含有常数项, 则最小的正整数 n 等于

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7

10. 在 $[-1,1]$ 上随机的取一个实数 k, 则事件 "直线 $y=kx$ 与圆 $(x-5)^2+y^2=9$ 相交" 发生的概率为

(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{1}{4}$　(C) $\frac{3}{4}$　(D) $\frac{9}{16}$

11. 若 $(1-\frac{1}{3}x)^{2018}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2018}x^{2018}(x\in\mathbf{R})$, 则 $3a_1+3^2a_2+3^3a_3+\cdots+3^{2018}a_{2018}$ 的值为

(A) 2　(B) 0　(C) -1　(D) -2

12. 有下列命题:

①面积相等的三角形是全等三角形;

② "若 $xy=0$, 则 $|x|+|y|=0$" 的逆命题;

③ "若 $a>b$, 则 $a+c>b+c$" 的否命题;

④ "矩形的对角线互相垂直" 的逆否命题. 其中真命题为

(A) ①②　(B) ②③　(C) ①③　(D) ②④

13. 在一个盒子中装有红、黄、白、绿四色的小球各3个, 它们大小相同, 现在从盒中任意摸出3个小球, 每个小球被摸出的可能性都相等, 则摸出的三个小球颜色都互不相同, 这样的摸法种数为

(A) 36　(B) 108　(C) 216　(D) 648

14. 一个均匀小正方体的6个面中, 三个面上标有数字0, 两个面上标有数字1, 一个面上标有数字2. 将这个小正方

体抛掷2次，则向上的两个数字之积是0的概率为

（A）$\frac{1}{4}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）$\frac{2}{3}$　　（D）$\frac{3}{4}$

第二部分　（非选择题　共94分）

二、填空题(共6小题，每小题5分，共30分)

15. 命题“$\forall x\in \mathbf{R}, x^2-x+\frac{1}{4}\geq 0$”的否定是______.

16. 在$(\sqrt[3]{x}-\frac{2}{x})^n$的二项式中，所有项的二项式系数之和为256，则常数项等于______.

17. 从0,1,2,3,4,5中任取3个数字组成没有重复数字的三位数，其中能被5整除的概率为______（用数字作答）.

18. 有6名学生做志愿者服务，将他们分配到图书馆、科技馆、养老院和火车站这四个地方去服务，每一个地方至少有一人，则不同的分配方案有______种（用数字作答）.

19. 已知2件次品和3件正品放在一起，现需要通过检测将其区分，每次随机检测一件产品，检测后不放回，直到检测出2件次品或者检测出3件正品时检测结束，则恰好检测四次停止的概率为______（用数字作答）.

20. 对于各数互不相等的整数数组$(i_1,i_2,i_3,\cdots,i_n)$（n是不小于3的正整数），对于任意的$p,q\in\{1,2,3,\cdots,n\}$，当$p<q$时有$i_p>i_q$，则称i_p,i_q是该数组的一个“逆序”，一个数组中所有“逆序”的个数称为该数组的“逆序数”，则数组$(3,1,4,2)$中的逆序数为______；若数组$(i_1,i_2,i_3,\cdots,i_n)$中的逆序数为$n-1$，则数组$(i_n,i_{n-1},\cdots,i_1)$中的逆序数为______.

三、解答题(共5小题，共64分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

21. （本小题满分12分）

某单位从一所学校招收某类特殊人才，对20位已经选拔入围的学生进行运动协调能力和逻辑思维能力的测试，其测试结果如下表：

逻辑思维能力 / 运动协调能力	一般	良好	优秀

一般	2	2	1
良好	4	b	1
优秀	1	3	a

例如, 表中运动协调能力良好且逻辑思维能力一般的学生有4人. 由于部分数据丢失, 只知道从这20位参加测试的学生中随机抽取一位, 抽到运动协调能力或逻辑思维能力优秀的学生的概率为$\frac{2}{5}$.

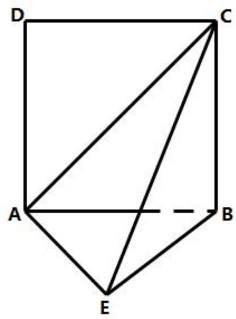
（Ⅰ）求a,b的值;

（Ⅱ）从参加测试的20位学生中任意抽取2位, 求其中至少有一位运动协调能力或逻辑思维能力优秀的学生的概率;

（III）从参加测试的20位学生中任意抽取2位, 设运动协调能力或逻辑思维能力优秀的学生人数为ξ, 求随机变量ξ的分布列.

22. （本小题满分 13 分）

已知, 如图, 在直二面角$D-AB-E$中, 四边形$ABCD$是边长为2的正方形, $AE=EB$, 且$\angle AEB=90^\circ$.



（Ⅰ）求证: $AE\perp$平面BCE;

（Ⅱ）求二面角$E-AC-B$的余弦值;

（Ⅲ）在线段AC（不包含端点）上是否存在点F, 使得EF与平面ABC所成的角为45°; 若存在, 写出$\frac{AF}{AC}$的值, 若不存在, 说明理由.

23. （本小题满分 13 分）

某电视台“挑战主持人”节目的挑战者闯第一关需要回答三个问题, 其中前两个问题回答正确各得10分, 回答不正确得0分, 第三个问题回答正确得20分, 回答不正确得-10分. 如果一个挑战者回答前两个问题正确的概率都是$\frac{2}{3}$, 回答第三个问题正确的概率为$\frac{1}{2}$, 且各题回答正确与否相互之间没有影响. 若这位挑战者回答这三个问题总分不低于10分就算闯关成功.

（Ⅰ）求至少回答对一个问题的概率；

（Ⅱ）求这位挑战者回答这三个问题的总得分 X 的分布列；

（Ⅲ）求这位挑战者闯关成功的概率.

24. （本小题满分 13 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 经过点 $(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）直线 $y=k(x-1)(k\neq 0)$ 与椭圆 C 交于 A,B 两点，点 M 是椭圆 C 的右顶点，直线 AM 与直线 BM 分别与 y 轴交于 P,Q 两点，试问在 x 轴上是否存在一个定点 N 使得 $NP\perp NQ$？若是，求出定点 N 的坐标；若不是，说明理由.

25. （本小题满分 13 分）

已知集合 $A=\{1,2,3,\cdots,2n\}(n\in\mathbf{N}^*)$. 对于 A 的一个子集 S，若存在不大于 n 的正整数 m，使得对于 S 中的任意一对元素 s_1,s_2，都有 $|s_1-s_2|\neq m$，则称 S 具有性质 P.

（Ⅰ）当 $n=8$ 时，试判断集合 $B=\{x\in A\,|\,x>7\}$ 和 $C=\{x\in A\,|\,x=3k-2,k\in\mathbf{N}^*\}$ 是否具有性质 P？并说明理由.

（Ⅱ）若 $n=1009$ 时

①若集合 S 具有性质 P，那么集合 $T=\{2019-x\,|\,x\in S\}$ 是否一定具有性质 P？并说明理由；

②若集合 S 具有性质 P，求集合 S 中元素个数的最大值.

数学试题答案

一、选择题:本大题共 14 小题,每小题 4 分,共 56 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	C	A	B	D	B	D	A	D	C
题号	11	12	13	14						
答案	C	B	B	D						

二、填空题:本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.

15. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} < 0$

16. 112

17. $\frac{9}{25}$

18. 1560

19. $\frac{3}{5}$

20. 3 ; $\frac{n^2-3n+2}{2}$

三、解答题:

21. （本小题满分 12 分）

解:(Ⅰ)因为从这 20 位参加测试的学生中随机抽取一位, 抽到运动协调能力或逻辑思维能力优秀的学生的概率为 $\frac{2}{5}$,

即 $\frac{1+1+a+3+1}{20}=\frac{2}{5}$, 得 $a=2$,

则 $b=20-(2+2+1+4+1+1+3+2)=4$.

（Ⅱ）设从参加测试的 20 位学生中任意抽取 2 位, 求其中至少有一位运动协调能力或逻辑思维能力优秀的学生为事件 A , 则 P （ A ） $=1-\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2}=\frac{62}{95}$.

（Ⅲ）随机变量 ξ 的所有可能取值为 $0,1,2$.

根据题意, $P(\xi=0)=\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2}=\frac{33}{95}$,

$P(\xi=1)=\frac{C_8^1\cdot C_{12}^1}{C_{20}^2}=\frac{48}{95}$,

$P(\xi=2)=\frac{C_8^2}{C_{20}^2}=\frac{14}{95}$.

随机变量 ξ 的分布列是:

ξ	0	1	2
P	$\frac{33}{95}$	$\frac{48}{95}$	$\frac{14}{95}$

22. （本小题满分 13 分）

解:（ Ⅰ ）证明:因为在直二面角 $D-AB-E$ 中, 四边形 $ABCD$ 是正方形,

所以 $CB \perp AB$，则 $CB \perp$ 平面 ABE，

又因为 $AE \subseteq$ 平面 ABE，所以 $CB \perp AE$，

因为 $\angle AEB = 90^\circ$，即 $BE \perp AE$，

所以 $AE \perp$ 平面 BCE .

（Ⅱ）以 A 为原点，以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$ 的方向分别为 x 轴，z 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $A-xyz$

则 $A(0,0,0)$，$C(2,0,2)$，$B(2,0,0)$，$E(1,-1,0)$.

平面 ACB 的法向量 $\vec{m}=(0,1,0)$，设平面 ACE 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

因为 $\overrightarrow{AE}=(1,-1,0)$，$\overrightarrow{CE}=(-1,-1,-2)$，

所以 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+y=0,\\ x+y+2z=0.\end{cases}$

令 $y=1$，解得 $\vec{n}=(1,1,-1)$，则 $\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以二面角 $E-AC-B$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（Ⅲ）设存在点 F，使得 EF 与平面 ABC 所成的角为 45°，且 $\dfrac{AF}{AC}=\lambda(0<\lambda<1)$，

则 $F(2\lambda,0,2\lambda)$，$\overrightarrow{EF}=(2\lambda-1,1,2\lambda)$，则有 $\cos<\vec{m},\overrightarrow{EF}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{EF}}{|\vec{m}|\cdot|\overrightarrow{EF}|}=\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$（$\lambda=0$ 舍）.

所以在线段 AC 上存在点 F，使得 EF 与平面 ABC 所成的角为 45°，$\dfrac{AF}{AC}=\dfrac{1}{2}$.

23. （本小题满分 13 分）

解:（Ⅰ）设至少回答对一个问题为事件 A，则 $P(A)=1-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{17}{18}$.

（Ⅱ）这位挑战者回答这三个问题的总得分 X 的所有可能取值为 $-10,0,10,20,30,40$.

根据题意，$P(X=-10)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$，

$P(X=0)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{2}{9}$，

$P(X=10)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9}$，

$P(X=20)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$，

$P(X=30)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{2}{9}$，

$P(X=40)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9}$.

随机变量 X 的分布列是：

X	-10	0	10	20	30	40
P	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

（III）设这位挑战者闯关成功为事件 B，则 $P(B)=\frac{2}{9}+\frac{1}{18}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{13}{18}$.

24. （本小题满分 13 分）

解：（ I ）由题意可知 $\frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1$，又 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$，$a^2=4b^2$.

解得 $a^2=4$，即 $a=2$.

所以 $b=1$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（ II ）设存在定点 $N(n,0)$ 使得 $NP\perp NQ$.

由 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ x^2+4y^2-4=0. \end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2-8k^2x+4(k^2-1)=0(k\neq 0)$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+1},x_1x_2=\frac{4(k^2-1)}{4k^2+1}$.

因为 $M(2,0)$，所以直线 AM 的方程为：$y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，则 $P(0,\dfrac{-2y_1}{x_1-2})$，

直线 BM 的方程为：$y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，则 $Q(0,\dfrac{-2y_2}{x_2-2})$．

则有 $\overrightarrow{NP}=(-n,\dfrac{-2y_1}{x_1-2})$，$\overrightarrow{NQ}=(-n,\dfrac{-2y_2}{x_2-2})$，由 $\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{NQ}=0$ 得

$n^2+\dfrac{4y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}=0$，整理得 $n^2-3=0$，故 $n=\pm\sqrt{3}$．

所以存在定点 $N(\pm\sqrt{3},0)$ 使得 $NP\perp NQ$．

25．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）当 $n=8$ 时，$A=\{1,2,3,\cdots,16\},m\le 8,(m\in\mathbf{N}^*)$，

$B=\{8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$，对于 B 中的任意两个元素 x_1,x_2，不存在 $|x_1-x_2|\ne m$，

所以集合 B 不具有性质 P．

$C=\{1,4,7,10,13,16\}$，对于 C 中的任意两个元素 x_1,x_2，存在 $|x_1-x_2|\ne 1,2,4,5,7,8$，

所以集合 C 具有性质 P．

（Ⅱ）当 $n=1009$ 时，$A=\{1,2,3,\cdots,2018\},m\le 1009(m\in\mathbf{N}^*)$，

①若集合 S 具有性质 P，那么对于 S 中的任意两个元素 x_1,x_2，存在 $|x_1-x_2|\ne m$ 成立，

集合 $T=\{T=\{2019-x\,|\,x\in S\}\}$，则对于 T 中的任意两个元素 $2019-x_1,2019-x_2(x_1,x_2\in S)$，

一定存在 $|(2019-x_1)-(2019-x_2)|=|x_1-x_2|\ne m$ 成立，

所以集合 T 一定具有性质 P．

②已知 $S\subseteq A$，设 x_1 是 S 中最小的元素，

则有 $x_1,x_1+1,x_1+2,\cdots x_1+m-1\in S$，

并且 $x_1+m,x_1+1+m,x_1+2+m,\cdots x_1+m-1+m\notin S$，

并且 $x_1+2m, x_1+1+2m, x_1+2+2m, \cdots x_1+m-1+2m \in S$，

以此类推…

$x_1+2km, x_1+1+2km, x_1+2+2km, \cdots x_1+m-1+2km \in S$，并且

$x_1+(2k+1)m, x_1+1+(2k+1)m, x_1+2+(2k+1)m, \cdots x_1+m-1+(2k+1)m \notin S(k \in \mathbf{N})$.

因为要求集合 S 中元素个数的最大值, 不妨从集合 A 中排除不满足条件的元素.

令 $1 \in S$，则有

$1+2km, 2+2km, 3+2km, \cdots m+2km \in S$，并且

$1+(2k+1)m, 2+(2k+1)m, 3+(2k+1)m, \cdots m+(2k+1)m \notin S(k \in \mathbf{N})$.

故集合 A 中的元素被分为两部分, 从 1 开始以 m 个数为一组进行分组, 第一组的元素在集合 S 中, 第二组的元素不在集合 S 中, 第三组的元素在集合 S 中, 第四组的元素不在集合 S 中, 以此类推, 一直到集合 A 中没有元素.

所以集合 S 中元素最多的理想状态是集合 A 中属于集合 S 中的元素比不属于集合 S 中的元素多出一整组（m 个），即有 $(k+2)$ 组元素在集合 S 中, $(k+1)$ 组元素不在集合 S 中, 此时满足 $(2k+3)m=2018(k \in \mathbf{N})$.

因为 $2k+3$ 是奇数, 2018 是偶数, 所以 m 为偶数, 则有 $(2k+3)\dfrac{m}{2}=1009(k \in \mathbf{N})$.

然而 1009 是质数, 不存在满足上式的 k,m，理想状态不存在.

接下来，令集合 A 中属于集合 S 中的元素比不属于集合 S 中的元素多 $(m-1)$ 个，此时满足 $(2k+3)\cdot m-1=2018(k \in \mathbf{N})$，即 $(2k+3)\cdot m=2019$, 此时显然 m 越大, 集合 S 中元素越多.

取 $k=0$，得 $m=673$，此时集合 S 中元素最多, 为 $673\times 2-1=1345$.

所以, 集合 S 中元素个数的最大值是 1345.