2021 北京西城高三（上）期末

数　　学

2021.1

本试卷共 5 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

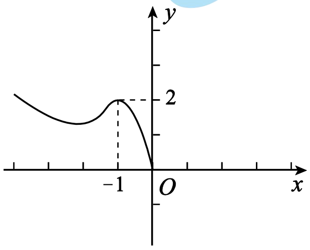
（1）已知集合 $A=\{x\mid -1<x<3\}$，$B=\{x\mid 0<x\leqslant 4\}$，则 $A\cup B=$

（A）$(0,3)$　　（B）$(-1,4)$　　（C）$(0,4]$　　（D）$(-1,4]$

（2）在复平面内，复数 z 所对应的点的坐标为 $(1,-1)$，则 $z\cdot\bar{z}=$

（A）2　　（B）$-2\mathrm{i}$　　（C）$\sqrt{2}$　　（D）$2\mathrm{i}$

（3）已知 $f(x)$ 为奇函数，其局部图象如图所示，那么



（A）$f(2)=2$　　（B）$f(2)=-2$

（C）$f(2)>-2$　　（D）$f(2)<-2$

（4）已知 $A(4,8)$，$B(2,4)$，$C(3,y)$ 三点共线，则 y 的值为

（A）4　　（B）5　　（C）6　　（D）7

（5）已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的焦距等于实轴长的 2 倍，则其渐近线的方程为

（A）$y=\pm\sqrt{3}x$　　（B）$y=\pm 2x$　　（C）$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$　　（D）$y=\pm\dfrac{1}{2}x$

（6）已知半径为 2 的圆经过点 $(1,0)$，其圆心到直线 $3x-4y+12=0$ 的距离的最小值为

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（7）已知函数 $f(x)=\sin 2x,\ x\in[a,b]$，则“$b-a\geqslant\dfrac{\pi}{2}$”是“$f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　　　（D）既不充分也不必要条件

（8）被誉为信息论之父的香农提出了一个著名的公式：$C=W\log_2(1+\frac{S}{N})$，其中 C 为最大数据传输速率，单位为 bit / s；W 为信道带宽，单位为 Hz；$\frac{S}{N}$ 为信噪比. 香农公式在 5G 技术中发挥着举足轻重的作用. 当 $\frac{S}{N}=99$，$W=2000\text{Hz}$ 时，最大数据传输速率记为 C_1；当 $\frac{S}{N}=9999$，$W=3000\text{Hz}$ 时，最大数据传输速率记为 C_2，则 $\frac{C_2}{C_1}$ 为

（A）1　　（B）$\frac{5}{2}$　　（C）$\frac{15}{4}$　　（D）3

（9）设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域为 D，若存在非零实数 $c\in D$，使得 $f(c)+g(c)=0$，则称函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 D 上具有性质 P.

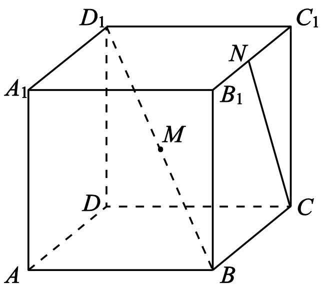
现有三组函数：

① $f(x)=x$，$g(x)=x^2$　　② $f(x)=2^{-x}$，$g(x)=-e^x$　　③ $f(x)=-x^2$，$g(x)=2^x$

其中具有性质 P 的是

（A）①②　　（B）①③　　（C）②③　　（D）①②③

（10）在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N 分别为 BD_1,B_1C_1 的中点，点 P 在正方体的表面上运动，且满足 $MP\perp CN$，则下列说法正确的是



（A）点 P 可以是棱 BB_1 的中点　　（B）线段 MP 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

（C）点 P 的轨迹是正方形　　（D）点 P 轨迹的长度为 $2+\sqrt{5}$

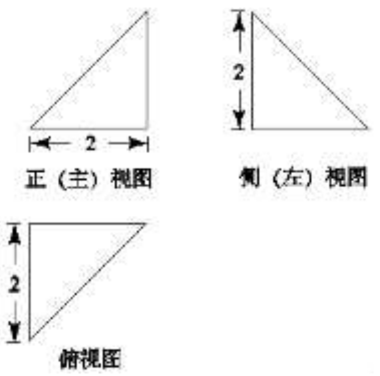
第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）$(x-2)^5$ 的展开式中 x 的系数是_______.

（12）数列 $\{a_n\}$ 是公差为 -2 的等差数列，记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 a_1,a_3,a_4 成等比数列，则 $a_1=$_______；$S_n=$_______.

（13）一个三棱锥的三视图如图所示，该三棱锥中最长棱的长度为________.



（14）已知抛物线 $C: y^2 = 2px\,(p>0)$ 的焦点为 F，过点 $M(-1,4)$ 作 y 轴的垂线交抛物线 C 于点 A，且满足 $|AF| = |AM|$，则抛物线 C 的方程为________；设直线 AF 交抛物线 C 于另一点 B，则点 B 的纵坐标为_______.

（15）炎炎夏日，冰激凌成为非常受欢迎的舌尖上的味道.某商店统计了一款冰激凌 6 月份前 6 天每天的供应量和销售量，结果如下表：

	6 月 1 日	6 月 2 日	6 月 3 日	6 月 4 日	6 月 5 日	6 月 6 日
供应量	90	100	90	100	90	100
销售量	80	90	85	80	90	85

记 $V(t)$ 为 6 月 t 日冰激凌的供应量，$W(t)$ 为 6 月 t 日冰激凌的销售量，其中 $t=1,2,\cdots,30$.用销售指数

$P(t,n)=\dfrac{W(t)+W(t+1)+\cdots+W(t+n-1)}{V(t)+V(t+1)+\cdots+V(t+n-1)}\times 100\%$，$(n\geq 1, n\in \mathbf{N})$ 来评价从 6 月 t 日开始连续 n 天的冰激凌的销售情况. 当 $n=1$ 时，$P(t,1)$ 表示 6 月 t 日的日销售指数.

给出下列四个结论：

① 在 6 月 1 日至 6 日这 6 天中，$P(4,1)$ 最小，$P(5,1)$ 最大；

② 在 6 月 1 日至 6 日这 6 天中，日销售指数越大，说明该天冰激凌的销售量越大；

③ $P(1,3)=P(4,3)$；

④ 如果 6 月 7 日至 12 日冰激凌每天的供应量和销售量与 6 月 1 日至 6 日每天的供应量和销售量对应相等，则对任意 $t\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$，都有 $P(t,6)=P(1,12)$.

其中所有正确结论的序号是_______.

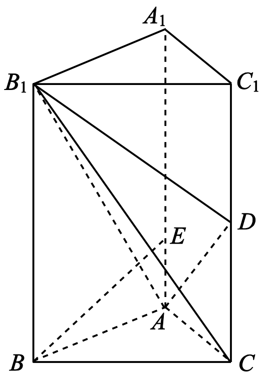
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB=AC=2$， $AA_1=4$， $AB\perp AC$， $BE\perp AB_1$ 交 AA_1 于点 E， D 为 CC_1 的中点.

（I）求证： $BE\perp$ 平面 AB_1C；

（II）求二面角 $C-AB_1-D$ 的余弦值.



（17）（本小题 13 分）

已知△ABC 的面积为 $4\sqrt{2}$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求：

（I） b 和 c 的值；

（II） $\sin(A-B)$ 的值.

条件①: $a=6$, $\cos C=-\dfrac{1}{3}$； 条件②: $A=C$, $\cos B=-\dfrac{7}{9}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 14 分）

防洪工程对防洪减灾起着重要作用，水库是我国广泛采用的防洪工程之一，既有滞洪作用又有蓄洪作用.北京地区 2010 年至 2019 年每年汛末（10 月 1 日）水库的蓄水量数据如下：

年份	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
蓄水量（亿立方米）	11.25	13.25	13.58	17.4	12.4	12.1	18.3	26.5	34.3	34.1

（I）从 2010 年至 2019 年的样本数据中随机选取连续两年的数据，求这两年蓄水量数据之差的绝对值小于 1 亿立方米的概率；

（II）从 2014 年至 2019 年的样本数据中随机选取两年的数据，设 X 为蓄水量超过 33 亿立方米的年份个数，求随机变量 X 的分布列和数学期望；

（III）由表中数据判断从哪年开始连续三年的水库蓄水量方差最大？（结论不要求证明）

（19）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=x^3-x$.

（I）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,\ f(1))$ 处的切线方程；

（II）求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值；

（III）设函数 $t(x)=\dfrac{f(x)}{x\sin x}-2$，$x\in(0,\pi)$，试判断 $t(x)$ 的零点个数，并证明你的结论.

（20）（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

（I）求椭圆 C 的离心率和长轴长；

（II）已知直线 $y=kx+2$ 与椭圆 C 有两个不同的交点 A,B，P 为 x 轴上一点. 是否存在实数 k，使得 $\triangle PAB$ 是以点 P 为直角顶点的等腰直角三角形？若存在，求出 k 的值及点 P 的坐标；若不存在，说明理由.

（21）（本小题 15 分）

对于数列$\{a_n\}$，定义$a_n^* = \begin{cases} 1, & a_{n+1} \geqslant a_n, \\ -1, & a_{n+1} < a_n. \end{cases}$设$\{a_n^*\}$的前$n$项和为$S_n^*$.

（I）设$a_n = \dfrac{n}{2^n}$，写出a_1^*，a_2^*，a_3^*，a_4^*；

（II）证明：“对任意$n \in \mathbf{N}^*$，有$S_n^* = a_{n+1} - a_1$”的充要条件是“对任意$n \in \mathbf{N}^*$，有$|a_{n+1} - a_n| = 1$”；

（III）已知首项为 0，项数为$m+1(m \geqslant 2)$的数列$\{a_n\}$满足：

①对任意$1 \leqslant n \leqslant m$且$n \in \mathbf{N}^*$，有$a_{n+1} - a_n \in \{-1, 0, 1\}$；②$S_m^* = a_m$.

求所有满足条件的数列$\{a_n\}$的个数.

2021 北京西城高三（上）期末数学

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）D（2）A（3）C（4）C

（5）A（6）B（7）B（8）D

（9）B（10）D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）80 （12）8， $-n^2+9n$

（13）$2\sqrt{3}$ （14） $y^2=4x$， -1

（15）①④

注：第（12）和（14）题第一空 3 分,第二空 2 分.第（15）题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（I）因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，所以 $AA_1\perp$ 平面 ABC，

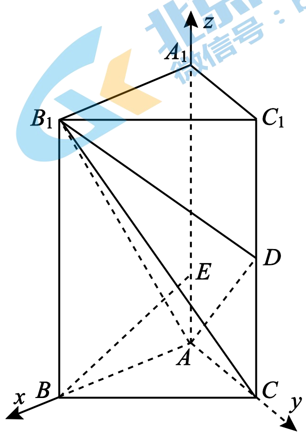
所以 $AA_1\perp AC$ ....1 分

因为 $AC\perp AB$， $AB\cap AA_1=A$，所以 $AC\perp$ 平面 AA_1B_1B ....3 分

因为 $BE\subset$ 平面 AA_1B_1B，所以 $AC\perp BE$ ....4 分

因为 $BE\perp AB_1$， $AC\cap AB_1=A$，

所以 $BE\perp$ 平面 AB_1C ....5 分



（II）由（I）知 AB,AC,AA_1 两两垂直，

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$．

则 $A(0,0,0)$，$B_1(2,0,4)$，$D(0,2,2)$，$B(2,0,0)$．

...............7 分

设 $E(0,0,a)$，所以 $\overrightarrow{AD}=(0,2,2)$，$\overrightarrow{AB_1}=(2,0,4)$，$\overrightarrow{BE}=(-2,0,a)$，

因为 $\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{BE}$，所以 $4a-4=0$，即 $a=1$ ....8 分

所以平面 AB_1C 的一个法向量为 $\overrightarrow{BE}=(-2,0,1)$． ....9 分

设平面 AB_1D 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0.\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}2y+2z=0,\\ 2x+4z=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y=-z,\\ x=-2z.\end{cases}$ ……………10 分

令 $z=-1$，则 $x=2,y=1$，

所以平面 AB_1D 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,1,-1)$ ……………11 分

所以 $\cos<\overrightarrow{BE},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BE}|}=\dfrac{-5}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{30}}{6}$ ……………12 分

由已知，二面角 $C-AB_1-D$ 为锐角，

所以二面角 $C-AB_1-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$ ……………13 分

（17）（共 13 分）

若选择条件①：

解：（I）在 $\triangle ABC$ 中，因为 $\cos C=-\dfrac{1}{3}$，

所以 $C\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$， $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ……………2 分

因为 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=4\sqrt{2}$， $a=6$，所以 $b=2$ ……………4 分

由余弦定理， $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=48$， ……………5 分

所以 $c=4\sqrt{3}$ ……………6 分

（II）由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$， 可得 $\dfrac{6}{\sin A}=\dfrac{2}{\sin B}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$ ……………7 分

所以 $\sin A=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$， $\sin B=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$ ……………9 分

因为 $A,B\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$， $\cos B=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$ ……………11 分

所以 $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{5\sqrt{3}}{9}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{9}=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$ ……………13 分

若选择条件②：

解：（I）在 $\triangle ABC$ 中，因为 $A=C$，所以 $a=c$.

因为 $\cos B=-\frac{7}{9}$，所以 $B\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$ ……….2 分

因为 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}c^2\times\frac{4\sqrt{2}}{9}=4\sqrt{2}$，

所以 $a=c=3\sqrt{2}$ …………….4 分

由余弦定理，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=64$，所以 $b=8$…………….6 分

（II）由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

所以 $\sin A=\frac{a}{b}\sin B=\frac{3\sqrt{2}}{8}\times\frac{4\sqrt{2}}{9}=\frac{1}{3}$…………….8 分

因为 $A\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$…………….10 分

所以 $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

$=\frac{1}{3}\times(-\frac{7}{9})-\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{4\sqrt{2}}{9}=-\frac{23}{27}$…………….13 分

（18）（共 14 分）

解：（I）设事件 A 为“连续两年的蓄水量数据之差的绝对值小于1亿立方米”，

从 2010 年到 2019 年的样本数据中随机选取连续两年共有 9 种可能，…2 分

由图表可知，事件 A 包含“2011 年和 2012 年”，“2014 年和 2015 年”，“2018 年和 2019 年”…………..3 分

所以 $P(A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$…………….4 分

（II）由表可知，2014 到 2019 年的样本数据中，蓄水量超过 33 亿立方米有 2 年，蓄水量不超过 33 亿立方米有 4 年.

随机变量 X 的所有可能取值为 0，1，2…………….5 分

$P(X=0)=\frac{C_2^0\cdot C_4^2}{C_6^2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$，$P(X=1)=\frac{C_2^1\cdot C_4^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$，

$P(X=2)=\frac{C_2^2\cdot C_4^0}{C_6^2}=\frac{1}{15}$…………….8 分

所以随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

…………….9 分

所以 $E(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$……………11 分

（III）从 2016 年开始连续三年的水库蓄水量方差最大……………14 分

（19）（共 15 分）

解：（I）由 $f(x)=x^3-x$，得 $f'(x)=3x^2-1$． ……………1 分

因为 $f(1)=0$， $f'(1)=2$， ……………3 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=2x-2$…………4 分

（II）令 $f'(x)=0$，得 $3x^2-1=0$，解得 $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

当 x 变化时， $f(x)$ 和 $f'(x)$ 变化情况如下表：

x	$(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗

……………7 分

所以， $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$，单调递增区间是 $(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})$，

$(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$；

$f(x)$ 在 $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 处取得极大值 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$，在 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 处取得极小值 $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

……………9 分

（III） $x\in(0,\pi)$, $t(x)=0$，即 $\frac{x^2-1}{\sin x}-2=0$，

等价于 $x^2-1-2\sin x=0$ ……………10 分

设 $g(x)=x^2-1-2\sin x$, $x\in(0,\pi)$，则 $g'(x)=2x-2\cos x$.

①当 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi)$ 时， $g'(x)>0$， $g(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{2},\pi)$ 上单调递增.

又 $g(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{4}-3<0$， $g(\pi)=\pi^2-1>0$，

所以 $g(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{2},\pi)$ 上有一个零点……………11 分

②当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时,设 $h(x)=g'(x)=2x-2\cos x$.

$h'(x)=2+2\sin x>0$，所以 $g'(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增.........12 分

又 $g'(0)=-2<0$， $g'(\frac{\pi}{2})=\pi>0$，

所以存在 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$， 使得 $g'(x_0)=0$.

所以，当 $x\in(0,x_0)$ 时， $g'(x)<0$， $g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,\frac{\pi}{2})$ 时， $g'(x)>0$， $g(x)$ 单调递增...............13 分

又 $g(0)=-1<0$， $g(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{4}-3<0$，

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上无零点...............14 分

综上所述，函数 $t(x)$ 在定义域内只有一个零点...............15 分

（20）（共 15 分）

解：（I）由题意： $a^2=4$， $b^2=2$，所以 $a=2$...............1 分

因为 $a^2=b^2+c^2$， 所以 $c^2=2$， $c=\sqrt{2}$ ....2 分

所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ....3 分

所以椭圆 C 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$， 长轴长为 4...............4 分

（II）联立 $\begin{cases} y=kx+2, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 消 y 整理得： $(2k^2+1)x^2+8kx+4=0$...............5 分

因为直线与椭圆交于 A,B 两点，故 $\Delta>0$， 解得 $k^2>\frac{1}{2}$...............6 分

设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$， 则 $x_1+x_2=\frac{-8k}{2k^2+1}$， $x_1x_2=\frac{4}{2k^2+1}$ ....8 分

设 AB 中点 $G(x_0,y_0)$，

则 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-4k}{2k^2+1}$， $y_0=kx_0+2=\frac{2}{2k^2+1}$，

故 $G(\frac{-4k}{2k^2+1},\frac{2}{2k^2+1})$ ....9 分

假设存在 k 和点 $P(m,0)$，使得△PAB 是以 P 为直角顶点的等腰直角三角形，

则 $PG\perp AB$，故 $k_{PG}\cdot k_{AB}=-1$，

所以 $\dfrac{\frac{2}{2k^2+1}}{\frac{-4k}{2k^2+1}-m}\times k=-1$，解得 $m=\dfrac{-2k}{2k^2+1}$，故 $P(\dfrac{-2k}{2k^2+1},0)$…………10 分

又因为 $\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$.

所以 $(x_1-m,y_1)\cdot(x_2-m,y_2)=0$，即 $(x_1-m)(x_1-m)+y_1y_2=0$.

整理得 $(k^2+1)x_1x_2+(2k-m)(x_1+x_2)+m^2+4=0$.

所以 $(k^2+1)\cdot\dfrac{4}{2k^2+1}-(2k-m)\cdot\dfrac{8k}{2k^2+1}+m^2+4=0$，……………12 分

代入 $m=\dfrac{-2k}{2k^2+1}$，整理得 $k^4=1$，即 $k^2=1$……………14 分

当 $k=-1$时，P 点坐标为 $(\dfrac{2}{3},0)$；当 $k=1$时，P 点坐标为 $(-\dfrac{2}{3},0)$.

此时，△PAB 是以 P 为直角顶点的等腰直角三角形……………15 分

（21）（共 15 分）

解：（I）因为 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_2=\dfrac{1}{2}$，$a_3=\dfrac{3}{8}$，$a_4=\dfrac{1}{4}$，$a_5=\dfrac{5}{32}$，

根据题意可得 $a_1^*=1$，$a_2^*=-1$，$a_3^*=-1$，$a_4^*=-1$……………4 分

（II）必要性：对 $n=1$，有 $S_1^*=a_2-a_1$，因此 $|a_2-a_1|=|S_1^*|=|a_1^*|=1$……5 分

对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2$，有 $S_n^*=a_{n+1}-a_1$，$S_{n-1}^*=a_n-a_1$，

两式作差，得 $S_n^*-S_{n-1}^*=a_{n+1}-a_n$，即 $a_n^*=a_{n+1}-a_n$，

因此 $|a_{n+1}-a_n|=|a_n^*|=1$……………7 分

综上，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $|a_{n+1}-a_n|=1$.

充分性：若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $|a_{n+1}-a_n|=1$，则 $a_n^*=a_{n+1}-a_n$，

所以 $S_n^*=a_1^*+a_2^*+\cdots+a_n^*=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1}-a_1$.

综上，“对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$S_n^*=a_{n+1}-a_1$”的充要条件是“对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，

$|a_{n+1}-a_n|=1$”……………10 分

（III）构造数列$\{b_n\}$：$b_1=0$，$b_{n+1}-b_n=\begin{cases} a_{n+1}-a_n, & |a_{n+1}-a_n|=1, \\ 1, & a_{n+1}-a_n=0. \end{cases}$

则对任意$1\leqslant n\leqslant m$且$n\in\mathbf{N}^*$，有$b_n^*=a_n^*$，$|b_{n+1}-b_n|=1$.

结合（II）可知，$S_m^*=a_1^*+a_2^*+\cdots+a_m^*=b_1^*+b_2^*+\cdots+b_m^*=b_{m+1}-b_1=b_{m+1}$.

又$S_m^*=a_m$，因此$b_{m+1}=a_m$.

设$a_2-a_1,a_3-a_2,\cdots,a_{m+1}-a_m$中有$k$项为$0$，

则$a_{m+1}=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{m+1}-a_m)$

$=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_{m+1}-b_m)-k$

$=b_{m+1}-k$

$=a_m-k$.

即$a_{m+1}-a_m=-k$.

因为$a_{m+1}-a_m\in\{-1,0,1\}$，所以$k=0$或1……………13分

若$k=0$，则$a_{m+1}-a_m=0$，

与$a_2-a_1,a_3-a_2,\cdots,a_{m+1}-a_m$中有$0$项为$0$，即$k=0$矛盾，不符题意.

若$k=1$，则$a_{m+1}-a_m=-1$.

所以，当$a_{m+1}-a_m=-1$，$a_2-a_1,a_3-a_2,\cdots,a_m-a_{m-1}$中有一项为$0$，其余$m-2$项为$\pm1$时，数列$\{a_n\}$满足条件.

$a_2-a_1,a_3-a_2,\cdots,a_m-a_{m-1}$中有一项为$0$，共$m-1$种取法；其余$m-2$项每项

有1或-1两种取法，

所以，满足条件的数列$\{a_n\}$的个数为$(m-1)\cdot2^{m-2}$……………15分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。