

2021 北京丰台高一（上）期末

数 学

2021.01

考 生 须 知	<p>1. 答题前，考生务必先将答题卡上的学校、年级、班级、姓名、准考证号用黑色字迹签字笔填写清楚，并认真核对条形码上的准考证号、姓名，在答题卡的“条形码粘贴区”贴好条形码。</p> <p>2. 本次考试所有答题均在答题卡上完成。选择题必须使用 2B 铅笔以正确填涂方式将各小题对应选项涂黑，如需改动，用橡皮擦除干净后再选涂其它选项。非选择题必须使用标准黑色字迹签字笔书写，要求字体工整、字迹清楚。</p> <p>3. 请严格按照答题卡上题号在相应答题区内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试卷、草稿纸上答题无效。</p> <p>4. 本试卷满分共 100 分，作答时长 90 分钟。</p>
------------------	---

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x < 2\}$ ， $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ，则 $A \cap B =$

(A) $\{-2, -1, 0\}$

(B) $\{-2, -1, 0, 1\}$

(C) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

(D) $\{x | -2 \leq x < 2\}$

2. 若 $a > b$ ， $c < 0$ ，则下列不等式成立的是

(A) $ac^2 > bc^2$

(B) $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

(C) $a + c < b + c$

(D) $a > b - c$

3. 已知命题 $p: \forall x \in [0, \pi]$ ， $\cos x \geq -1$ ，则命题 p 的否定为

(A) $\exists x \in [0, \pi]$ ， $\cos x < -1$

(B) $\exists x \in [0, \pi]$ ， $\cos x \leq -1$

(C) $\forall x \notin [0, \pi]$ ， $\cos x \geq -1$

(D) $\forall x \notin [0, \pi]$ ， $\cos x < -1$

4. 下列函数是奇函数的是

(A) $f(x) = 2^x$

(B) $f(x) = \log_2 x$

(C) $f(x) = x^2$

(D) $f(x) = x^3$

5. 已知 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, 则 $\tan \alpha$ 的值为

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $-\frac{3}{4}$

(C) $\frac{4}{3}$

(D) $-\frac{4}{3}$

6. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x > 1$ ”是“ $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ”的

(A) 充分不必要条件

(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

7. 函数 $f(x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{6})$ 在区间 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为

(A) -2

(B) 1

(C) $\sqrt{3}$

(D) 2

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x} - 1, & x > 0, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的零点个数为

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

9. 已知指数函数 $y = a^x$ 是减函数, 若 $m = a^2$, $n = 2^a$, $p = \log_a 2$, 则 m, n, p 的大小关系是

(A) $m > n > p$

(B) $n > m > p$

(C) $n > p > m$

(D) $p > n > m$

10. 已知函数 $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2x + 1$, $g_1(x) = \log_a x (a > 1)$, $g_2(x) = kx (k > 0)$, 则下列结论正确的是

(A) 函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的图象有且只有一个公共点

(B) $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, 当 $x > x_0$ 时, 恒有 $g_1(x) > g_2(x)$

(C) 当 $a = 2$ 时, $\exists x_0 \in (0, +\infty)$, $f_1(x_0) < g_1(x_0)$

(D) 当 $a = \frac{1}{k}$ 时, 方程 $g_1(x) = g_2(x)$ 有解

第二部分 (非选择题共 60 分)

二、填空题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分.

11. $\tan \frac{5\pi}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 函数 $f(x) = \log_{0.5}(3x - 2)$ 的定义域为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. $3 \times 2^{-1} - \log_2 8 + (27)^{\frac{1}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 若函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的一个零点为 $x = \frac{\pi}{6}$, 则 $\varphi = \underline{\hspace{2cm}}$.

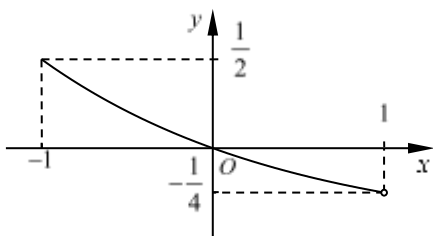
15. 一种药在病人血液中的量保持在 1500mg 以上时才有疗效, 而低于 500mg 时病人就有危险. 现给某病人的静脉注射了这种药 2500mg, 如果药在血液中以每小时 20% 的比例衰减, 设经过 x 小时后, 药在病人血液中的量为 y mg.

(1) y 关于 x 的函数解析式为 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 要使病人没有危险, 再次注射该药的时间不能超过 $\underline{\hspace{2cm}}$ 小时. (精确到 0.1)

(参考数据: $0.2^{0.3} \approx 0.6170$, $0.8^{2.3} \approx 0.5986$, $0.8^{7.2} \approx 0.2006$, $0.8^{7.3} \approx 0.1916$)

16. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 其图象如图所示. 函数 $g(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的偶函数, 满足 $g(x+2) = g(x)$, 且当 $x \in [-1, 0]$ 时, $g(x) = f(x)$. 给出下列三个结论:



① $g(1) = \frac{1}{2}$;

② 不等式 $g(x) > 0$ 的解集为 \mathbf{R} ;

③ 函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $[2k, 2k+1]$, $k \in \mathbf{Z}$.

其中所有正确结论的序号是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

注: 本题给出的结论中, 有多个符合题目要求. 全部选对得 4 分, 不选或有错选得 0 分, 其他得 2 分.

三、解答题共 4 小题，共 36 分.

17. 记不等式 $a-x \leq 0 (a \in \mathbf{R})$ 的解集为 A ，不等式 $x^2 - 2x - 3 > 0$ 的解集为 B .

(I) 当 $a=1$ 时，求 $A \cup B$ ；

(II) 若 $A \cap \complement_{\mathbf{R}} B \neq \emptyset$ ，求实数 a 的取值范围.

18. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边，其终边与单位圆 $\odot O$ 的交点为 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

(I) 求 $\sin \alpha$ ， $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ 的值；

(II) 若 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，求函数 $f(x) = \sin(x \sin \alpha - \alpha)$ 的最小正周期和单调递增区间.

19. 已知函数 $f(x) = a \cdot 2^x + b$ 的图象过原点，且 $f(1) = 1$.

(I) 求实数 a, b 的值；

(II) 若 $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $f(x) > m$ ，请写出 m 的最大值；

(III) 判断并证明函数 $y = \frac{1}{f(x)}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性.

20. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 I ，如果存在区间 $[m, n] \subseteq I$ ，使得 $f(x)$ 在区间 $[m, n]$ 上是单调函数且值域为 $[m, n]$ ，那么称 $f(x)$ 在区间 $[m, n]$ 上具有性质 P .

(I) 分别判断函数 $f(x) = \cos x$ 和 $g(x) = x^3$ 在区间 $[-1, 1]$ 上是否具有性质 P ；（不需要解答过程）

(II) 若函数 $h(x) = \sqrt{x} + a$ 在区间 $[m, n]$ 上具有性质 P ，

(i) 求实数 a 的取值范围；

(ii) 求 $n - m$ 的最大值.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

2021 北京丰台高一（上）期末数学

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	A	A	D	B	A	C	C	B	D

二、填空题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分.

11. 1 12. $\{x|x > \frac{2}{3}\}$ 13. $\frac{3}{2}$
 14. $-\frac{\pi}{3}$ 15. $y = 2500 \times 0.8^x, x \in [0, +\infty)$; 7.2 16. ①③

三、解答题共 4 小题，共 36 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

17. (本小题 9 分)

解: (I) 由 $a - x \leq 0$ 得, $x \geq a$, 所以 $A = \{x|x \geq a\}$;

由 $x^2 - 2x - 3 > 0$ 得, $x < -1$ 或 $x > 3$, 所以 $B = \{x|x < -1, \text{ 或 } x > 3\}$;

当 $a = 1$ 时, $A = \{x|x \geq 1\}$,

所以 $A \cup B = \{x|x \geq 1, \text{ 或 } x < -1\}$5 分

(II) 由 (I) 知, $A = \{x|x \geq a\}$, $\complement_{\mathbb{R}} B = \{x|-1 \leq x \leq 3\}$,

因为 $A \cap \complement_{\mathbb{R}} B \neq \emptyset$,

所以 $a \leq 3$, 所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 3]$9 分

18. (本小题 9 分)

解: (I) 依题意知 $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

所以 $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$4 分



(II) 由 (I) 知, $\sin \alpha = \frac{1}{2}$,

因为 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\alpha = \frac{\pi}{6}$,

所以 $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6})$,

令 $z = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}$, 由 $x \in \mathbf{R}$ 得, $z \in \mathbf{R}$, 且 $y = \sin z$ 的最小正周期为 2π ,

即 $\sin(z + 2\pi) = \sin z$, 于是 $\sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6} + 2\pi) = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6})$,

所以 $\sin(\frac{1}{2}(x + 4\pi) - \frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6})$,

由周期函数的定义可知, 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 4π .

(在求周期时, 直接用公式 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ 获得答案的, 同样给分)

由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 得, $-\frac{2\pi}{3} + 4k\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[-\frac{2\pi}{3} + 4k\pi, \frac{4\pi}{3} + 4k\pi], k \in \mathbf{Z}$ 9分

19. (本小题 9 分)

解: (I) 因为 $f(x) = a \cdot 2^x + b$ 的图象过原点, 且 $f(1) = 1$,

所以 $\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$ 3分

(II) m 的最大值为-1.5分

(III) 由 (I) 知, $f(x) = 2^x - 1$, 所以 $y = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2^x - 1}$,

所以 $y = \frac{1}{f(x)}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是单调递减函数, 证明如下:

令 $g(x) = \frac{1}{2^x - 1}$, $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$g(x_1) - g(x_2) = \frac{1}{2^{x_1} - 1} - \frac{1}{2^{x_2} - 1} = \frac{(2^{x_2} - 1) - (2^{x_1} - 1)}{(2^{x_1} - 1)(2^{x_2} - 1)} = \frac{2^{x_2} - 2^{x_1}}{(2^{x_1} - 1)(2^{x_2} - 1)}$$

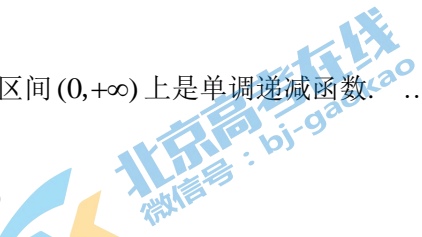
因为 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

所以 $2^{x_1} < 2^{x_2}, 2^{x_1} > 1, 2^{x_2} > 1$,

所以 $\frac{2^{x_2} - 2^{x_1}}{(2^{x_1} - 1)(2^{x_2} - 1)} > 0$, 即 $g(x_1) > g(x_2)$,

所以 $g(x) = \frac{1}{2^x - 1}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是单调递减函数,

即 $y = \frac{1}{f(x)}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是单调递减函数.9分



20. (本小题 9 分)

解: (I) 函数 $f(x) = \cos x$ 在区间 $[-1, 1]$ 上不具有性质 P ,

$g(x) = x^3$ 在区间 $[-1, 1]$ 上具有性质 P2分

(II) (i) 方法 1:

因为函数 $h(x) = \sqrt{x} + a$ 在区间 $[m, n]$ 上具有性质 P ,

则 $h(x) = x$ 在 $[0, +\infty)$ 有两个不相等的实数根 $m, n (m \geq 0)$,

即 $\sqrt{x} + a = x$ 在 $[0, +\infty)$ 有两个不相等的实数根.

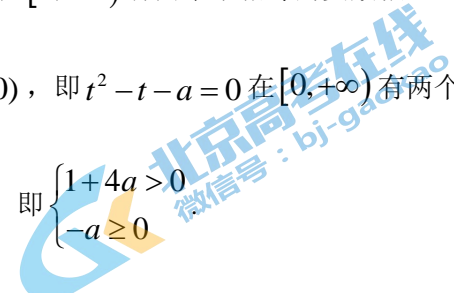
设 $\sqrt{x} = t (t \geq 0)$, 即 $t^2 - t - a = 0$ 在 $[0, +\infty)$ 有两个不相等的实数根.

所以 $\begin{cases} \Delta > 0 \\ -a \geq 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 1 + 4a > 0 \\ -a \geq 0 \end{cases}$

解得: $-\frac{1}{4} < a \leq 0$

所以, 实数 a 的取值范围 $\left(-\frac{1}{4}, 0\right]$

方法 2:



因为函数 $h(x) = \sqrt{x} + a$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增,

函数 $h(x) = \sqrt{x} + a$ 在区间 $[m, n]$ 上具有性质 P ,

则 $h(x) = x$ 在 $[0, +\infty)$ 有两个不相等的实数根 $m, n (m \geq 0)$,

即 $\sqrt{x} + a = x$ 在 $[0, +\infty)$ 有两个不相等的实数根.

设 $\sqrt{x} = t (t \geq 0)$, 即 $a = t^2 - t$ 在 $[0, +\infty)$ 有两个不相等的实数根.

所以, 实数 a 的取值范围 $\left(-\frac{1}{4}, 0\right]$.

$$(ii) \quad n - m = \sqrt{(n+m)^2 - 4mn} = \sqrt{1+4a}$$

因为 $-\frac{1}{4} < a \leq 0$, 所以当 $a = 0$ 时, $n - m$ 取最大值 1.9 分



关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯