

数学试卷

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 4 页，总分 150 分，考试时间 120 分钟。

第 I 卷（选择题共 60 分）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 1\}$, $B = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $[0, 1)$ B. $(-1, 2]$ C. $(1, 2]$ D. $(0, 1)$

2. 已知直线 $l_1: ax + y - 3 = 0$ 和直线 $l_2: 3x - 2y + 3 = 0$ 垂直, 则 $a =$ ()

- A. $-\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

3. 已知圆锥的底面半径为 2, 高为 $4\sqrt{2}$, 则该圆锥的侧面积为 ()

- A. 4π B. 12π C. 16π D. $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$

4. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 \mathbb{R} 的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x(1+x)$, 则 $f(-1) =$ ()

- A. -1 B. -2 C. 2 D. 0

5. 已知 α 是第一象限角, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 $\cos 2\alpha - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} =$ ()

- A. $-\frac{13}{5}$ B. $-\frac{7}{5}$ C. $\frac{13}{5}$ D. $\frac{1}{10}$

6. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\} (a_n > 0)$ 的前 n 项和, 且 $a_1 a_3 = 16, S_1, \frac{3}{4} S_2, \frac{1}{2} S_3$ 成等差数列, 则 $S_6 =$ ()

- A. 126 B. 128 C. 254 D. 256

7. 直线 $x + y + 2 = 0$ 分别与 x 轴, y 轴交于 A, B 两点, 点 P 在圆 $(x-2)^2 + y^2 = 2$ 上, 则 $\triangle ABP$ 面积的取值范围是

- A. $[2, 6]$ B. $[4, 8]$ C. $[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$ D. $[2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$

8. 设 $a = 2\ln 0.99$, $b = \ln 0.98$, $c = \sqrt{0.96} - 1$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$
C. $b < a < c$ D. $c < b < a$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目

要求.全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_n = -n^2 + 7n$, 则下列说法正确的是 ()

- A. $\{a_n\}$ 是递增数列
 B. $a_{10} = -14$
 C. 当 $n > 4$ 时, $a_n < 0$
 D. 当 $n = 3$ 或 4 时, S_n 取得最大值

10. 已知函数 $f(x) = (2-x)e^x$, 则下列说法错误的是 ()

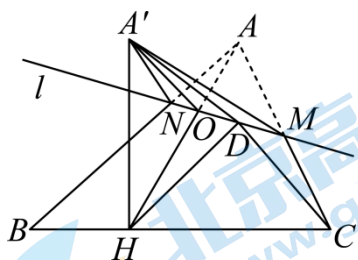
- A. $f(x)$ 的图象在 $x=2$ 处的切线斜率大于 0
 B. $f(x)$ 的最大值为 e
 C. $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增
 D. 若 $f(x) = a$ 有两个零点, 则 $a < e$

11. 已知 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3} + \varphi\right)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 为偶函数, $g(x) = \sin(\omega x + \varphi)$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $\varphi = \frac{\pi}{6}$
 B. 若 $g(x)$ 的最小正周期为 3π , 则 $\omega = \frac{2}{3}$
 C. 若 $g(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有且仅有 3 个最值点, 则 ω 的取值范围为 $\left(\frac{7}{3}, \frac{10}{3}\right]$
 D. 若 $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 ω 的最小值为 2

12. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \frac{\pi}{2}$, $AB = \sqrt{3}$, $BC = 1$, 过 AC 中点 M 的直线 l 与线段 AB 交于点 N .

将 $\triangle AMN$ 沿直线 l 翻折至 $\triangle A'MN$, 且点 A' 在平面 $BCMN$ 内的射影 H 在线段 BC 上, 连接 AH 交 l 于点 O , D 是直线 l 上异于 O 的任意一点, 则 ()



- A. $\angle A'DH \geq \angle A'DC$
 B. $\angle A'DH \leq \angle A'OH$

C. 点 O 的轨迹的长度为 $\frac{\pi}{6}$

D. 直线 $A'O$ 与平面 BCM 所成角的余弦值的最小值为 $8\sqrt{3}-13$

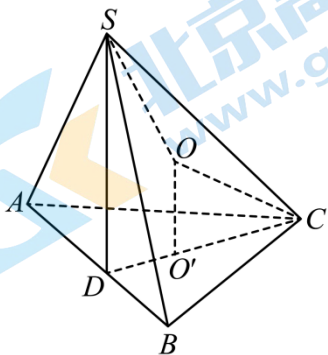
第 II 卷 (非选择题共 90 分)

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = \left(k, \frac{5}{2}\right)$, 若 $\vec{a} // \vec{b}$, 则 $k =$ _____.

14. 写出一个圆心在 $y = x$ 上, 且与直线 $y = -x$ 和圆 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 2$ 都相切的圆的方程: _____.

15. 表面积为 100π 的球面上有四点 S, A, B, C , $\triangle ABC$ 是等边三角形, 球心 O 到平面 ABC 的距离为 3, 若面 $SAB \perp$ 面 ABC , 则棱锥 $S-ABC$ 体积的最大值为 _____.



16. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{4}{3}$, $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 (n \in \mathbb{N}^*)$, 则 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2017}}$ 的整数部分是 _____.

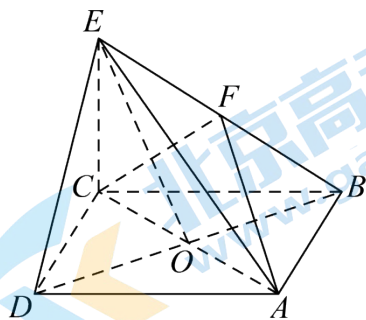
四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $c \sin \frac{A+C}{2} = b \sin C$.

(1) 求角 B ;

(2) 设 BD 是 AC 边上的高, 且 $BD = 1$, $b = \sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. 如图所示, 在四棱锥 $E-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle ADC = 60^\circ$, AC 与 BD 交于点 O , $EC \perp$ 底面 $ABCD$, F 为 BE 的中点, $AB = CE$.



(1) 求证: $DE \parallel$ 平面 ACF ;

(2) 求 AF 与平面 EBD 所成角的正弦值.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项都为正整数的等比数列, $a_1 = 3$, 且 a_3 是 a_2 与 $\frac{3}{4}a_4$ 的等差中项, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1, b_{n+1} = 2b_n + 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $k \cdot \frac{b_n + 5}{2} - a_n \geq 8n + 2k - 24$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

20. 已知点 P 到 $A(-2, 0)$ 的距离是点 P 到 $B(1, 0)$ 的距离的 2 倍.

(1) 求点 P 的轨迹方程;

(2) 若点 P 与点 Q 关于点 B 对称, 过 B 的直线与点 Q 的轨迹 Γ 交于 E, F 两点, 探索 $\overline{BE} \cdot \overline{BF}$ 是否为定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 请说明理由.

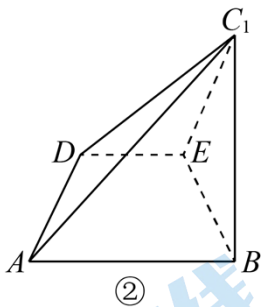
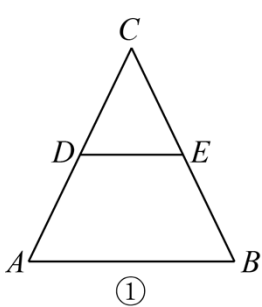
21. 已知函数 $f(x) = e^x - a \sin x - 1 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 讨论函数 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 上的单调性;

(2) 当 $a = -3$ 时, 证明: 对 $\forall x \in (0, +\infty)$, 有 $f(x) < e^x + x + 1 - 2e^{-2x}$.

22. 如图①, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 4, AB = \sqrt{13}, \cos B = \frac{\sqrt{13}}{13}$, E, D 分别为 BC, AC 的中点, 以 DE 为折

痕, 将 $\triangle DCE$ 折起, 使点 C 到达点 C_1 的位置, 且 $BC_1 = 2$, 如图②.



(1) 设平面 $ADC_1 \cap$ 平面 $BEC_1 = l$, 证明: $l \perp$ 平面 ABC_1 ;

(2) P 是棱 C_1D 的中点, 过 P, B, E 三点作该四棱锥的截面, 与 C_1A 交于点 Q , 求 $\frac{AQ}{AC_1}$;

(3) P 是棱 C_1D 上一点 (不含端点), 过 P, B, E 三点作该四棱锥的截面与平面 BEC_1 所成的锐二面角的

正切值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，求该截面将四棱锥分成上、下两部分的体积之比.

