2017 年全国高中数学联合竞赛一试试题（A 卷）

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分.

1. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，对任意实数 x 有 $f(x+3)\cdot f(x-4)=-1$. 又当 $0\le x<7$ 时，$f(x)=\log_2(9-x)$，则 $f(-100)$ 的值为________.

2. 若实数 x,y 满足 $x^2+2\cos y=1$，则 $x-\cos y$ 的取值范围是________.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{10}=1$，$F$ 为 C 的上焦点，A 为 C 的右顶点，P 是 C 上位于第一象限内的动点，则四边形 $OAPF$ 的面积的最大值为________.

4. 若一个三位数中任意两个相邻数码的差均不超过 1，则称其为“平稳数”. 平稳数的个数是________.

5. 正三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB=1$, $AP=2$，过 AB 的平面 α 将其体积平分，则棱 PC 与平面 α 所成角的余弦值为________.

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，点集 $K=\{(x,y)\mid x,y=-1,0,1\}$. 在 K 中随机取出三个点，则这三点中存在两点之间距离为 $\sqrt{5}$ 的概率为________.

7. 在 ΔABC 中，M 是边 BC 的中点，N 是线段 BM 的中点. 若 $\angle A=\frac{\pi}{3}$，ΔABC 的面积为 $\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的最小值为________.

8. 设两个严格递增的正整数数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足：$a_{10}=b_{10}<2017$，对任意正整数 n，有 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，$b_{n+1}=2b_n$，则 a_1+b_1 的所有可能值为________.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9. （本题满分 16 分）设 k,m 为实数，不等式 $\left|x^2-kx-m\right|\le 1$ 对所有 $x\in[a,b]$ 成立. 证明：$b-a\le 2\sqrt{2}$.

10. （本题满分 20 分）设 x_1,x_2,x_3 是非负实数，满足 $x_1+x_2+x_3=1$，求

$$(x_1+3x_2+5x_3)\left(x_1+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{5}\right)$$

的最小值和最大值.

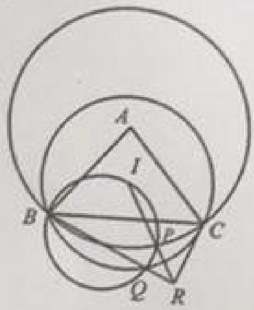
11. （本题满分 20 分）设复数 z_1,z_2 满足 $\mathrm{Re}(z_1)>0$, $\mathrm{Re}(z_2)>0$，且 $\mathrm{Re}(z_1^2)=\mathrm{Re}(z_2^2)=2$（其中 $\mathrm{Re}(z)$ 表示复数 z 的实部）.

(1) 求 $\mathrm{Re}(z_1z_2)$ 的最小值；

(2) 求 $\left|z_1+2\right|+\left|\overline{z_2}+2\right|-\left|\overline{z_1}-z_2\right|$ 的最小值.

2017年全国高中数学联合竞赛加试试题（A卷）

一、（本题满分40分） 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，I为$\triangle ABC$的内心．以A为圆心，AB为半径作圆Γ_1，以I为圆心，IB为半径作圆Γ_2，过点B、I的圆Γ_3与Γ_1、Γ_2分别交于点P、Q（不同于点B）．设IP与BQ交于点R．
证明：$BR\perp CR$．**（答题时请将图画在答卷纸上）**



二、（本题满分40分） 设数列$\{a_n\}$定义为$a_1=1$，

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+n, & 若a_n\le n, \\ a_n-n, & 若a_n>n, \end{cases} \quad n=1,2,\cdots.$$

求满足$a_r<r\le 3^{2017}$的正整数r的个数．

三、（本题满分50分） 将33×33方格纸中每个小方格染三种颜色之一，使得每种颜色的小方格的个数相等．若相邻两个小方格的颜色不同，则称它们的公共边为“分隔边”．试求分隔边条数的最小值．

四、（本题满分50分） 设m,n均是大于1的整数，$m\ge n$．$a_1,a_2,\cdots,a_n$是n个不超过m的互不相同的正整数，且$a_1,a_2,\cdots,a_n$互素．证明：对任意实数x，均存在一个i（$1\le i\le n$），使得$\|a_i x\|\ge \frac{2}{m(m+1)}\|x\|$，这里$\|y\|$表示实数$y$到与它最近的整数的距离．

2017 年全国高中数学联合竞赛一试试题（B 卷）

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分.

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=\sqrt{2}$，$a_3=\sqrt[3]{3}$，则 $\dfrac{a_1+a_{2011}}{a_7+a_{2017}}$ 的值为________.

2. 设复数 z 满足 $z+9=10\bar{z}+22i$，则 $|z|$ 的值为 $\sqrt{5}$.

3. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，若 $f(x)+x^2$ 是奇函数，$f(x)+2^x$ 是偶函数，则 $f(1)$ 的值为________.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin A=2\sin C$，且三条边 a,b,c 成等比数列，则 $\cos A$ 的值为 $\sqrt{2}/4$.

5. 在正四面体 $ABCD$ 中，E,F 分别在棱 AB,AC 上，满足 $BE=3$，$EF=4$，且 EF 与面 BCD 平行，则 $\triangle DEF$ 的面积为________.

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，点集 $K=\{(x,y)\mid x,y=-1,0,1\}$，在 K 中随机取出三个点，则这三个点两两之间距离均不超过 2 的概率为________.

7. 设 a 为非零实数，在平面直角坐标系 xOy 中，二次曲线 $x^2+ay^2+a^2=0$ 的焦距为 4，则 a 的值为________.

8. 若正整数 a,b,c 满足 $2017\ge 10a\ge 100b\ge 1000c$，则数组 (a,b,c) 的个数为 2249.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9. （本题满分 16 分）设不等式 $|2^x-a|<|5-2^x|$ 对所有 $x\in[1,2]$ 成立，求实数 a 的取值范围.

10. （本题满分 20 分）设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_{n+1}a_{n+2}-a_n^2$，$n=1,2,\cdots$.

（1）证明：数列 $\{b_n\}$ 也是等差数列；

（2）设数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的公差均是 $d\neq 0$，并且存在正整数 s,t，使得 a_s+b_t 是整数，求 $|a_1|$ 的最小值.

11. （本题满分 20 分）在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $C_1:y^2=4x$，曲线 $C_2:(x-4)^2+y^2=8$，经过 C_1 上一点 P 作一条倾斜角为 45° 的直线 l，与 C_2 交于两个不同的点 Q,R，求 $|PQ|\cdot|PR|$ 的取值范围.

2017 年全国高中数学联合竞赛加试试题（B 卷）

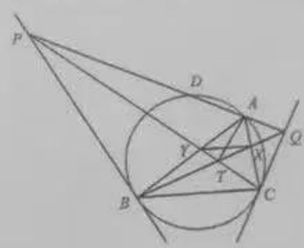
一、（本题满分 40 分）设实数 a,b,c 满足 $a+b+c=0$，令 $d=\max\{|a|,|b|,|c|\}$，证明：

$$|(1+a)(1+b)(1+c)|\geq 1-d^2.$$

二、（本题满分 40 分）给定正整数 m，证明：存在正整数 k，使得可将正整数集 N_+ 分拆为 k 个互不相交的子集 $A_1,A_2,\cdots,A_k$，每个子集 A_i 中均不存在 4 个数 a,b,c,d（可以相同），满足 $ab-cd=m$．

三、（本题满分 50 分）如图，点 D 是锐角△ABC 的外接圆 ω 上弧 BC 的中点，直线 DA 与圆 ω 过点 B,C 的切线分别相交于点 P,Q，BQ 与 AC 的交点为 X，CP 与 AB 的交点为 Y，BQ 与 CP 的交点为 T．求证：AT 平分线段 XY．

（答题时请将图画在答卷纸上）



四、（本题满分 50 分）设 $a_1,a_2,\cdots,a_{20}\in\{1,2,\cdots,5\}$，$b_1,b_2,\cdots,b_{20}\in\{1,2,\cdots,10\}$，集合 $X=\{(i,j)\,|\,1\leq i<j\leq 20,\ (a_i-a_j)(b_i-b_j)<0\}$，求 X 的元素个数的最大值．

2017年全国高中数学联合竞赛一试（A卷）参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准．填空题只设8分和0分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，**不得增加其他中间档次**.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第9小题4分为一个档次，第10、11小题5分为一个档次，**不得增加其他中间档次**.

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，共64分.

1. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，对任意实数 x 有 $f(x+3)\cdot f(x-4)=-1$. 又当 $0\le x<7$ 时，$f(x)=\log_2(9-x)$，则 $f(-100)$ 的值为________.

答案： $-\dfrac{1}{2}$.

解： 由条件知，$f(x+14)=-\dfrac{1}{f(x+7)}=f(x)$，所以

$$f(-100)=f(-100+14\times 7)=f(-2)=-\frac{1}{f(5)}=-\frac{1}{\log_2 4}=-\frac{1}{2}.$$

2. 若实数 x, y 满足 $x^2+2\cos y=1$，则 $x-\cos y$ 的取值范围是__________.

答案： $[-1, \sqrt{3}+1]$.

解： 由于 $x^2=1-2\cos y\in[-1, 3]$，故 $x\in[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

由 $\cos y=\dfrac{1-x^2}{2}$ 可知，$x-\cos y=x-\dfrac{1-x^2}{2}=\dfrac{1}{2}(x+1)^2-1$. 因此当 $x=-1$ 时，$x-\cos y$ 有最小值 -1（这时 y 可以取 $\dfrac{\pi}{2}$）；当 $x=\sqrt{3}$ 时，$x-\cos y$ 有最大值 $\sqrt{3}+1$（这时 y 可以取 π）. 由于 $\dfrac{1}{2}(x+1)^2-1$ 的值域是 $[-1, \sqrt{3}+1]$，从而 $x-\cos y$ 的取值范围是 $[-1, \sqrt{3}+1]$.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{10}=1$，$F$ 为 C 的上焦点，A 为 C 的右顶点，P 是 C 上位于第一象限内的动点，则四边形 $OAPF$ 的面积的最大值为__________.

答案： $\dfrac{3\sqrt{11}}{2}$.

解： 易知 $A(3, 0)$, $F(0, 1)$. 设 P 的坐标是 $(3\cos\theta, \sqrt{10}\sin\theta)$, $\theta\in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$S_{OAPF}=S_{\triangle OAP}+S_{\triangle OFP}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{10}\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3\cos\theta$$
$$=\frac{3}{2}(\sqrt{10}\cos\theta+\sin\theta)=\frac{3\sqrt{11}}{2}\sin(\theta+\varphi).$$

其中 $\varphi=\arctan\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. 当 $\theta=\arctan\sqrt{10}$ 时，四边形 $OAPF$ 面积的最大值为 $\dfrac{3\sqrt{11}}{2}$.

4. 若一个三位数中任意两个相邻数码的差均不超过1，则称其为“平稳数”．平稳数的个数是__________．

答案： 75．

解： 考虑平稳数$\overline{abc}$．

若$b=0$，则$a=1$, $c\in\{0,1\}$，有2个平稳数．

若$b=1$，则$a\in\{1,2\}$, $c\in\{0,1,2\}$，有$2\times3=6$个平稳数．

若$2\le b\le 8$，则$a,c\in\{b-1,b,b+1\}$，有$7\times3\times3=63$个平稳数．

若$b=9$，则$a,c\in\{8,9\}$，有$2\times2=4$个平稳数．

综上可知，平稳数的个数是$2+6+63+4=75$．

5. 正三棱锥$P-ABC$中，$AB=1$, $AP=2$，过AB的平面α将其体积平分，则棱PC与平面α所成角的余弦值为__________．

答案： $\frac{3\sqrt{5}}{10}$．

解： 设AB, PC的中点分别为K, M，则易证平面ABM就是平面α．由中线长公式知

$$AM^2=\frac{1}{2}(AP^2+AC^2)-\frac{1}{4}PC^2=\frac{1}{2}(2^2+1^2)-\frac{1}{4}\times2^2=\frac{3}{2},$$

所以$KM=\sqrt{AM^2-AK^2}=\sqrt{\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$．

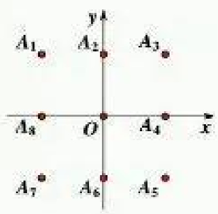
又易知直线PC在平面α上的射影是直线MK，而$CM=1$, $KC=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以

$$\cos\angle KMC=\frac{KM^2+MC^2-KC^2}{2KM\cdot MC}=\frac{\frac{5}{4}+1-\frac{3}{4}}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{10},$$

故棱PC与平面α所成角的余弦值为$\frac{3\sqrt{5}}{10}$．

6. 在平面直角坐标系xOy中，点集$K=\{(x,y)\mid x,y=-1,0,1\}$．在$K$中随机取出三个点，则这三点中存在两点之间距离为$\sqrt{5}$的概率为__________．

答案： $\frac{4}{7}$．



解： 易知K中有9个点，故在K中随机取出三个点的方式数为$C_9^3=84$种．

将K中的点按右图标记为$A_1,A_2,\cdots,A_8,O$，其中有8对点之间的距离为$\sqrt{5}$．由对称性，考虑取A_1,A_4两点的情况，则剩下的一个点有7种取法，这样有$7\times8=56$个三点组（不计每组中三点的次序）．对每个$A_i(i=1,2,\cdots,8)$，K中恰有A_{i+3},A_{i+5}两点与之距离为$\sqrt{5}$（这里下标按模8理解），因而恰有$\{A_i,A_{i+3},A_{i+5}\}(i=1,2,\cdots,8)$这8个三点组被计了两次．从而满足条件的三点组个数为$56-8=48$，进而所求概率为$\frac{48}{84}=\frac{4}{7}$．

2

7. 在 ΔABC 中，M 是边 BC 的中点，N 是线段 BM 的中点．若 $\angle A=\frac{\pi}{3}$，ΔABC 的面积为 $\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的最小值为__________．

答案：$\sqrt{3}+1$.

解：由条件知，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，$\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，故

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{8}\left(3\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right).$$

由于 $\sqrt{3}=S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|$，所以 $\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|=4$，进一步可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos A=2$，从而

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}\geq\frac{1}{8}\left(2\sqrt{3\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|^2}+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}+1.$$

当 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$，$\left|\overrightarrow{AC}\right|=2\times\sqrt[4]{3}$ 时，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的最小值为 $\sqrt{3}+1$.

8. 设两个严格递增的正整数数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足：$a_{10}=b_{10}<2017$，对任意正整数 n，有 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，$b_{n+1}=2b_n$，则 a_1+b_1 的所有可能值为__________．

答案：13, 20．

解：由条件可知：a_1, a_2, b_1 均为正整数，且 $a_1<a_2$．

由于 $2017>b_{10}=2^9\cdot b_1=512b_1$，故 $b_1\in\{1,2,3\}$．反复运用 $\{a_n\}$ 的递推关系知

$$a_{10}=a_9+a_8=2a_8+a_7=3a_7+2a_6=5a_6+3a_5=8a_5+5a_4$$
$$=13a_4+8a_3=21a_3+13a_2=34a_2+21a_1,$$

因此 $$21a_1\equiv a_{10}=b_{10}=512b_1\equiv 2b_1 \pmod{34},$$

而 $13\times21=34\times8+1$，故有

$$a_1\equiv13\times21a_1\equiv13\times2b_1=26b_1 \pmod{34}. \quad ①$$

另一方面，注意到 $a_1<a_2$，有 $55a_1<34a_2+21a_1=512b_1$，故

$$a_1<\frac{512}{55}b_1. \quad ②$$

当 $b_1=1$ 时，①，②分别化为 $a_1\equiv26 \pmod{34}$，$a_1<\frac{512}{55}$，无解．

当 $b_1=2$ 时，①，②分别化为 $a_1\equiv52 \pmod{34}$，$a_1<\frac{1024}{55}$，得到唯一的正整数 $a_1=18$，此时 $a_1+b_1=20$．

当 $b_1=3$ 时，①，②分别化为 $a_1\equiv78 \pmod{34}$，$a_1<\frac{1536}{55}$，得到唯一的正整数 $a_1=10$，此时 $a_1+b_1=13$．

综上所述，a_1+b_1 的所有可能值为 13, 20．

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9．（本题满分 16 分）设 k, m 为实数，不等式 $|x^2-kx-m|\le 1$ 对所有 $x\in[a,\ b]$ 成立．证明：$b-a\le 2\sqrt{2}$．

证明：令 $f(x)=x^2-kx-m$，$x\in[a,\ b]$，则 $f(x)\in[-1,\ 1]$．于是

$$f(a)=a^2-ka-m\le 1, \qquad ①$$

$$f(b)=b^2-kb-m\le 1, \qquad ②$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-k\cdot\frac{a+b}{2}-m\ge -1. \qquad ③$$

…………………4 分

由①＋②－2×③知，

$$\frac{(a-b)^2}{2}=f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le 4,$$

故 $b-a\le 2\sqrt{2}$． …………………16 分

10. （本题满分 20 分）设 x_1,x_2,x_3 是非负实数，满足 $x_1+x_2+x_3=1$，求

$$(x_1+3x_2+5x_3)(x_1+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{5})$$

的最小值和最大值．

解：由柯西不等式

$$(x_1+3x_2+5x_3)(x_1+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{5})\ge(\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_1}+\sqrt{3x_2}\cdot\sqrt{\frac{x_2}{3}}+\sqrt{5x_3}\cdot\sqrt{\frac{x_3}{5}})^2$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2=1,$$

当 $x_1=1,\ x_2=0,\ x_3=0$ 时不等式等号成立，故欲求的最小值为 1．

…………………5 分

因为

$$(x_1+3x_2+5x_3)(x_1+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{5})=\frac{1}{5}(x_1+3x_2+5x_3)(5x_1+\frac{5x_2}{3}+x_3)$$

$$\le\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\left((x_1+3x_2+5x_3)+(5x_1+\frac{5x_2}{3}+x_3)\right)^2$$

$$=\frac{1}{20}\left(6x_1+\frac{14}{3}x_2+6x_3\right)^2 \qquad \text{…………………10 分}$$

$$\le\frac{1}{20}(6x_1+6x_2+6x_3)^2=\frac{9}{5},$$

当 $x_1=\frac{1}{2},x_2=0,x_3=\frac{1}{2}$ 时不等式等号成立，故欲求的最大值为 $\frac{9}{5}$． ………20 分

11. （本题满分 20 分）设复数 z_1, z_2 满足 $\mathrm{Re}(z_1)>0$, $\mathrm{Re}(z_2)>0$，且 $\mathrm{Re}(z_1^2)=\mathrm{Re}(z_2^2)=2$（其中 $\mathrm{Re}(z)$ 表示复数 z 的实部）．

(1) 求 $\mathrm{Re}(z_1z_2)$ 的最小值；

(2) 求 $|z_1+2|+|\overline{z_2}+2|-|\overline{z_1}-z_2|$ 的最小值．

解：(1) 对 $k=1,2$，设 $z_k=x_k+y_k\mathrm{i}\,(x_k,y_k\in\mathbf{R})$．由条件知

$$x_k=\mathrm{Re}(z_k)>0,\ x_k^2-y_k^2=\mathrm{Re}(z_k^2)=2.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z_1z_2)&=\mathrm{Re}((x_1+y_1\mathrm{i})(x_2+y_2\mathrm{i}))=x_1x_2-y_1y_2\\&=\sqrt{(y_1^2+2)(y_2^2+2)}-y_1y_2\ge(|y_1y_2|+2)-y_1y_2\ge 2.\end{aligned}$$

又当 $z_1=z_2=\sqrt{2}$ 时，$\mathrm{Re}(z_1z_2)=2$．这表明，$\mathrm{Re}(z_1z_2)$ 的最小值为 2．

…………………5 分

(2) 对 $k=1,2$，将 z_k 对应到平面直角坐标系 xOy 中的点 $P_k(x_k,y_k)$，记 P_2' 是 P_2 关于 x 轴的对称点，则 P_1,P_2' 均位于双曲线 $C:x^2-y^2=2$ 的右支上．

设 F_1,F_2 分别是 C 的左、右焦点，易知 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$．

根据双曲线的定义，有 $|P_1F_1|=|P_1F_2|+2\sqrt{2}$，$|P_2'F_1|=|P_2'F_2|+2\sqrt{2}$，进而得

$$\begin{aligned}&|z_1+2|+|\overline{z_2}+2|-|\overline{z_1}-z_2|=|z_1+2|+|\overline{z_2}+2|-|z_1-\overline{z_2}|\\&=|P_1F_1|+|P_2'F_1|-|P_1P_2'|=4\sqrt{2}+|P_1F_2|+|P_2'F_2|-|P_1P_2'|\ge 4\sqrt{2},\end{aligned}$$

…………………15 分

等号成立当且仅当 F_2 位于线段 P_1P_2' 上（例如，当 $z_1=z_2=2+\sqrt{2}\mathrm{i}$ 时，F_2 恰是 P_1P_2' 的中点）．

综上可知，$|z_1+2|+|\overline{z_2}+2|-|\overline{z_1}-z_2|$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$．　…………20 分

2017 年全国高中数学联合竞赛加试（A 卷）
参考答案及评分标准

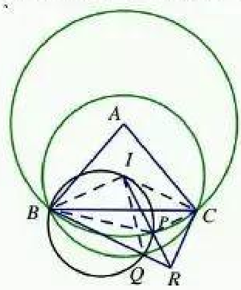
说明：

1．评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分．

2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，**不得增加其他中间档次**．

一、（本题满分 40 分） 如图，在 ΔABC 中，$AB=AC$，I 为 ΔABC 的内心．以 A 为圆心，AB 为半径作圆 Γ_1，以 I 为圆心，IB 为半径作圆 Γ_2，过点 B、I 的圆 Γ_3 与 Γ_1、Γ_2 分别交于点 P、Q（不同于点 B）．设 IP 与 BQ 交于点 R．

证明：$BR\perp CR$．**（答题时请将图画在答卷纸上）**



证明： 连接 IB，IC，IQ，PB，PC．

由于点 Q 在圆 Γ_2 上，故 $IB=IQ$，所以 $\angle IBQ=\angle IQB$．

又 B，I，P，Q 四点共圆，所以 $\angle IQB=\angle IPB$，于是 $\angle IBQ=\angle IPB$，故 $\Delta IBP\backsim\Delta IRB$，从而有 $\angle IRB=\angle IBP$，且

$$\frac{IB}{IR}=\frac{IP}{IB}.$$ ……………………10 分

注意到 $AB=AC$，且 I 为 ΔABC 的内心，故 $IB=IC$，所以

$$\frac{IC}{IR}=\frac{IP}{IC},$$

于是 $\Delta ICP\backsim\Delta IRC$，故 $\angle IRC=\angle ICP$． ……………………20 分

又点 P 在圆 Γ_1 的弧 BC 上，故 $\angle BPC=180^\circ-\frac{1}{2}\angle A$，因此

$$\begin{aligned}\angle BRC&=\angle IRB+\angle IRC=\angle IBP+\angle ICP\\&=360^\circ-\angle BIC-\angle BPC\\&=360^\circ-\left(90^\circ+\frac{1}{2}\angle A\right)-\left(180^\circ-\frac{1}{2}\angle A\right)\\&=90^\circ,\end{aligned}$$

故 $BR\perp CR$． ……………………40 分

二、(本题满分 40 分) 设数列$\{a_n\}$定义为$a_1=1$，

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+n, & 若\ a_n\le n,\\ a_n-n, & 若\ a_n>n,\end{cases}\quad n=1,2,\cdots.$$

求满足$a_r<r\le 3^{2017}$的正整数r的个数.

解：由数列的定义可知$a_1=1,a_2=2$. 假设对某个整数$r\ge 2$有$a_r=r$，我们证明对$t=1,\cdots,r-1$，有

$$a_{r+2t-1}=2r+t-1>r+2t-1,\quad a_{r+2t}=r-t<r+2t. \qquad ①$$

对t归纳证明.

当$t=1$时，由于$a_r=r\ge r$，由定义，$a_{r+1}=a_r+r=r+r=2r>r+1$，$a_{r+2}=a_{r+1}-(r+1)=2r-(r+1)=r-1<r+2$，结论成立.

设对某个$1\le t<r-1$，①成立，则由定义

$$a_{r+2t+1}=a_{r+2t}+(r+2t)=r-t+r+2t=2r+t>r+2t+1,$$

$$a_{r+2t+2}=a_{r+2t+1}-(r+2t+1)=2r+t-(r+2t+1)=r-t-1<r+2t+2,$$

即结论对$t+1$也成立. 由数学归纳法知，①对所有$t=1,2,\cdots,r-1$成立，特别当$t=r-1$时，有$a_{3r-2}=1$，从而$a_{3r-1}=a_{3r-2}+(3r-2)=3r-1$.

若将所有满足$a_r=r$的正整数r从小到大记为$r_1,r_2,\cdots$，则由上面的结论可知$r_1=1,r_2=2$，$r_{k+1}=3r_k-1$，$k=2,3,\cdots$. ……………………20 分

由此可知，$r_{k+1}-\dfrac{1}{2}=3\left(r_k-\dfrac{1}{2}\right)(k=1,\cdots,m-1)$，从而

$$r_m=3^{m-1}\left(r_1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{3^{m-1}+1}{2}.$$

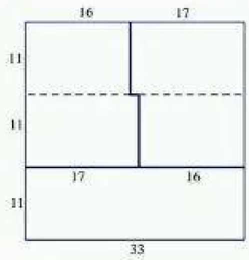
由于$r_{2018}=\dfrac{3^{2017}+1}{2}<3^{2017}<\dfrac{3^{2018}+1}{2}=r_{2019}$，在$1,2,\cdots,3^{2017}$中满足$a_r=r$的数$r$共有 2018 个，为$r_1,r_2,\cdots,r_{2018}$. ……………………30 分

由①可知，对每个$k=1,2,\cdots,2017$，$r_k+1,r_k+2,\cdots,3r_k-2$中恰有一半满足$a_r<r$. 由于$r_{2018}+1=\dfrac{3^{2017}+1}{2}+1$与$3^{2017}$均为奇数，而在$r_{2018}+1,\ \cdots,3^{2017}$中，奇数均满足$a_r>r$，偶数均满足$a_r<r$，其中的偶数比奇数少 1 个. 因此满足$a_r<r\le 3^{2017}$的正整数$r$的个数为

$$\frac{1}{2}\left(3^{2017}-2018-1\right)=\frac{3^{2017}-2019}{2}. \qquad \text{……………………40 分}$$

三、(本题满分 50 分) 将33×33方格纸中每个小方格染三种颜色之一，使得每种颜色的小方格的个数相等. 若相邻两个小方格的颜色不同，则称它们的公共边为“分隔边”. 试求分隔边条数的最小值.

解：记分隔边的条数为L. 首先，将方格纸按如图分成三个区域，分别染成三种颜色，粗线上均为分隔边，此时共有 56 条分隔边，即$L=56$. …………10 分



下面证明 $L\geq 56$．将方格纸的行从上至下依次记为 $A_1,A_2,\cdots,A_{33}$，列从左至右依次记为 $B_1,B_2,\cdots,B_{33}$．行 A_i 中方格出现的颜色数记为 $n(A_i)$，列 B_i 中方格出现的颜色个数记为 $n(B_i)$．三种颜色分别记为 c_1,c_2,c_3．对于一种颜色 c_j，设 $n(c_j)$ 是含有 c_j 色方格的行数与列数之和．记

$$\delta(A_i,c_j)=\begin{cases}1, & 若A_i行含有c_j色方格,\\ 0, & 否则,\end{cases}$$

类似地定义 $\delta(B_i,c_j)$．于是

$$\sum_{i=1}^{33}(n(A_i)+n(B_i))=\sum_{i=1}^{33}\sum_{j=1}^{3}(\delta(A_i,c_j)+\delta(B_i,c_j))$$

$$=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{33}(\delta(A_i,c_j)+\delta(B_i,c_j))=\sum_{j=1}^{3}n(c_j).$$

由于染 c_j 色的方格有 $\frac{1}{3}\cdot 33^2=363$ 个，设含有 c_j 色方格的行有 a 个，列有 b 个，则 c_j 色的方格一定在这 a 行和 b 列的交叉方格中，因此 $ab\geq 363$，从而

$$n(c_j)=a+b\geq 2\sqrt{ab}\geq 2\sqrt{363}>38,$$

故

$$n(c_j)\geq 39,\ j=1,2,3. \qquad ①$$

…………………20 分

由于在行 A_i 中有 $n(A_i)$ 种颜色的方格，因此至少有 $n(A_i)-1$ 条分隔边．同理在列 B_i 中，至少有 $n(B_i)-1$ 条分隔边．于是

$$L\geq\sum_{i=1}^{33}(n(A_i)-1)+\sum_{i=1}^{33}(n(B_i)-1)$$

$$=\sum_{i=1}^{33}(n(A_i)+n(B_i))-66 \qquad ②$$

$$=\sum_{j=1}^{3}n(c_j)-66. \qquad ③$$

…………………30 分

下面分两种情形讨论．

情形 1：有一行或一列全部方格同色．不妨设有一行全为 c_1 色，从而方格纸的 33 列中均含有 c_1 色的方格，由于 c_1 色方格有 363 个，故至少有 11 行中含有 c_1 色方格，于是

$$n(c_1)\geq 11+33=44. \qquad ④$$

由①，③及④即得

$$L\geq n(c_1)+n(c_2)+n(c_3)-66\geq 44+39+39-66=56.$$

…………………40 分

情形 2：没有一行也没有一列的全部方格同色．则对任意$1\leq i\leq 33$，均有$n(A_i)\geq 2$，$n(B_i)\geq 2$．从而由②知

$$L\geq\sum_{i=1}^{33}(n(A_i)+n(B_i))-66\geq 33\times 4-66=66>56.$$

综上所述，分隔边条数的最小值等于 56.　…………………50 分

四、（本题满分 50 分） 设m,n均是大于 1 的整数，$m\geq n$．$a_1,a_2,\cdots,a_n$是n个不超过m的互不相同的正整数，且$a_1,a_2,\cdots,a_n$互素．证明：对任意实数x，均存在一个i（$1\leq i\leq n$），使得$\|a_ix\|\geq\frac{2}{m(m+1)}\|x\|$，这里$\|y\|$表示实数$y$到与它最近的整数的距离．

证明：首先证明以下两个结论．

结论 1：存在整数$c_1,c_2,\cdots,c_n$，满足$c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_na_n=1$，并且$|c_i|\leq m$，$1\leq i\leq n$．

由于$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$，由裴蜀定理，存在整数$c_1,c_2,\cdots,c_n$，满足

$$c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_na_n=1. \qquad ①$$

下面证明，通过调整，存在一组$c_1,c_2,\cdots,c_n$满足①，且绝对值均不超过m．记

$$S_1(c_1,c_2,\cdots,c_n)=\sum_{c_i>m}c_i\geq 0,\qquad S_2(c_1,c_2,\cdots,c_n)=\sum_{c_j<-m}|c_j|\geq 0.$$

如果$S_1>0$，那么存在$c_i>m>1$，于是$c_ia_i>1$，又因为$a_1,a_2,\cdots,a_n$均为正数，故由①可知存在$c_j<0$．令

$$c_i'=c_i-a_j,\quad c_j'=c_j+a_i,\quad c_k'=c_k(1\leq k\leq n,\ k\neq i,j),$$

则

$$c_1'a_1+c_2'a_2+\cdots+c_n'a_n=1, \qquad ②$$

并且$0\leq m-a_j\leq c_i'<c_i$，$c_j<c_j'<a_i\leq m$．

因为$c_i'<c_i$，且$c_j'<m$，所以$S_1(c_1',c_2',\cdots,c_n')<S_1(c_1,c_2,\cdots,c_n)$．又$c_j'>c_j$及$c_i'>0$，故$S_2(c_1',c_2',\cdots,c_n')\leq S_2(c_1,c_2,\cdots,c_n)$．

如果$S_2>0$，那么存在$c_j<-m$，因此有一个$c_i>0$．令$c_i'=c_i-a_j$，$c_j'=c_j+a_i$，$c_k'=c_k(1\leq k\leq n,\ k\neq i,j)$，那么②成立，并且$-m<c_i'<c_i$，$c_j<c_j'<0$．与上面类似地可知$S_1(c_1',c_2',\cdots,c_n')\leq S_1(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，且$S_2(c_1',c_2',\cdots,c_n')<S_2(c_1,c_2,\cdots,c_n)$．

因为S_1与S_2均是非负整数，故通过有限次上述的调整，可得到一组$c_1,c_2,\cdots,c_n$，使得①成立，并且$S_1=S_2=0$．结论 1 获证．　…………………20 分

结论 2：（1）对任意实数a,b，均有$\|a+b\|\leq\|a\|+\|b\|$．

（2）任意整数u和实数y有$\|uy\|\leq|u|\cdot\|y\|$．

由于对任意整数u和实数x，有$\|x+u\|=\|x\|$，故不妨设$a,b\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，此时$\|a\|=|a|$，$\|b\|=|b|$. 若$ab\le 0$，不妨设$a\le 0\le b$，则$a+b\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，从而

$$\|a+b\|=|a+b|\le|a|+|b|=\|a\|+\|b\|.$$

若$ab>0$，即a,b同号. 当$|a|+|b|\le\frac{1}{2}$时，有$a+b\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，此时

$$\|a+b\|=|a+b|=|a|+|b|=\|a\|+\|b\|.$$

当$|a|+|b|>\frac{1}{2}$时，注意总有$\|a+b\|\le\frac{1}{2}$，故

$$\|a+b\|\le\frac{1}{2}<|a|+|b|=\|a\|+\|b\|.$$ ………………30 分

故（1）得证. 由（1）及$\|-y\|=\|y\|$即知（2）成立.

回到原问题，由结论 1，存在整数$c_1,c_2,\cdots,c_n$，使得$c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_na_n=1$，并且$|c_i|\le m$，$1\le i\le n$. 于是

$$\sum_{i=1}^{n}c_ia_ix=x.$$

利用结论 2 得

$$\|x\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}c_ia_ix\right\|\le\sum_{i=1}^{n}|c_i|\cdot\|a_ix\|\le m\sum_{i=1}^{n}\|a_ix\|.$$

因此

$$\max_{1\le i\le n}\|a_ix\|\ge\frac{1}{mn}\|x\|. \quad ③$$

………………40 分

若$n\le\frac{1}{2}(m+1)$，由③可知

$$\max_{1\le i\le n}\|a_ix\|\ge\frac{\|x\|}{mn}\ge\frac{2\|x\|}{m(m+1)}.$$

若$n>\frac{1}{2}(m+1)$，则在$a_1,a_2,\cdots,a_n$中存在两个相邻正整数. 不妨设a_1,a_2相邻，则

$$\|x\|=\|a_2x-a_1x\|\le\|a_2x\|+\|a_1x\|.$$

故$\|a_2x\|$与$\|a_1x\|$中有一个$\ge\frac{\|x\|}{2}\ge\frac{2\|x\|}{m(m+1)}$.

综上所述，总存在一个i（$1\le i\le n$），满足$\|a_ix\|\ge\frac{2}{m(m+1)}\|x\|$. ………50 分

2017 年全国高中数学联合竞赛一试（B 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准．填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，**不得增加其他中间档次**.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，**不得增加其他中间档次**.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分.

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=\sqrt{2}$，$a_3=\sqrt[3]{3}$，则 $\dfrac{a_1+a_{2011}}{a_7+a_{2017}}$ 的值为__________.

答案：$\dfrac{8}{9}$.

解： 数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}$，故 $\dfrac{a_1+a_{2011}}{a_7+a_{2017}}=\dfrac{a_1+a_{2011}}{q^6(a_1+a_{2011})}=\dfrac{1}{q^6}=\dfrac{8}{9}$.

2. 设复数 z 满足 $z+9=10\bar{z}+22\mathrm{i}$，则 $|z|$ 的值为__________.

答案：$\sqrt{5}$.

解： 设 $z=a+b\mathrm{i}$，$a,b\in\mathbf{R}$．由条件得

$$(a+9)+b\mathrm{i}=10a+(-10b+22)\mathrm{i}.$$

比较两边实虚部可得

$$\begin{cases}a+9=10a,\\ b=-10b+22,\end{cases}$$

解得 $a=1$，$b=2$，故 $z=1+2\mathrm{i}$，进而 $|z|=\sqrt{5}$.

3. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，若 $f(x)+x^2$ 是奇函数，$f(x)+2^x$ 是偶函数，则 $f(1)$ 的值为__________.

答案：$-\frac{7}{4}$.

解：由条件知，$f(1)+1=-\left(f(-1)+(-1)^2\right)=-f(-1)-1$, $f(1)+2=f(-1)+\frac{1}{2}$，两式相加消去 $f(-1)$，可知 $2f(1)+3=-\frac{1}{2}$，即 $f(1)=-\frac{7}{4}$.

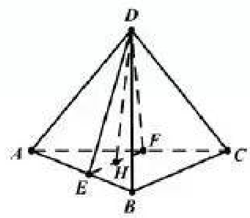
4. 在 ΔABC 中，若 $\sin A=2\sin C$，且三条边 a, b, c 成等比数列，则 $\cos A$ 的值为________.

答案：$-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

解：由正弦定理知，$\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}=2$，又 $b^2=ac$，于是 $a:b:c=2:\sqrt{2}:1$，从而由余弦定理得，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(\sqrt{2})^2+1^2-2^2}{2\times\sqrt{2}\times 1}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

5. 在正四面体 $ABCD$ 中，E, F 分别在棱 AB, AC 上，满足 $BE=3, EF=4$，且 EF 与面 BCD 平行，则 ΔDEF 的面积为__________.

答案：$2\sqrt{33}$.



解：由条件知，EF 平行于 BC. 因为正四面体 $ABCD$ 的各个面是全等的正三角形，故

$AE=AF=EF=4$, $AD=AB=AE+BE=7$.

由余弦定理得，

$$DE=\sqrt{AD^2+AE^2-2AD\cdot AE\cdot\cos 60^\circ}=\sqrt{49+16-28}=\sqrt{37},$$

同理有 $DF=\sqrt{37}$.

作等腰 ΔDEF 底边 EF 上的高 DH，则 $EH=\frac{1}{2}EF=2$，故

$$DH=\sqrt{DE^2-EH^2}=\sqrt{33},$$

于是 $S_{\Delta DEF}=\frac{1}{2}\cdot EF\cdot DH=2\sqrt{33}$.

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，点集 $K=\{(x,y)\mid x,y=-1,0,1\}$. 在 K 中随机取出三个点，则这三个点两两之间距离均不超过 2 的概率为__________.

答案：$\frac{5}{14}$.

解：注意 K 中共有 9 个点，故在 K 中随机取出三个点的方式数为 $C_9^3=84$ 种.

当取出的三点两两之间距离不超过 2 时，有如下三种情况：

（1）三点在一横线或一纵线上，有 6 种情况.

（2）三点是边长为 $1, 1, \sqrt{2}$ 的等腰直角三角形的顶点，有 $4\times 4=16$ 种情况.

（3）三点是边长为 $\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2$ 的等腰直角三角形的顶点，其中，直角顶点位于 $(0,0)$ 的有 4 个，直角顶点位于 $(\pm 1,0)$, $(0,\pm 1)$ 的各有一个，共有 8 种情况.

综上可知，选出三点两两之间距离不超过 2 的情况数为$6+16+8=30$，进而所求概率为$\frac{30}{84}=\frac{5}{14}$.

7. 设a为非零实数，在平面直角坐标系xOy中，二次曲线$x^2+ay^2+a^2=0$的焦距为 4，则a的值为________.

答案：$\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

解：二次曲线方程可写成$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a}=1$．显然必须$-a>0$，故二次曲线为双曲线，其标准方程为$\frac{y^2}{(\sqrt{-a})^2}-\frac{x^2}{(-a)^2}=1$．则$c^2=(\sqrt{-a})^2+(-a)^2=a^2-a$，注意到焦距$2c=4$，可知$a^2-a=4$，又$a<0$，所以$a=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

8. 若正整数a, b, c满足$2017\geq 10a\geq 100b\geq 1000c$，则数组$(a, b, c)$的个数为________.

答案：574.

解：由条件知$c\leq\left[\frac{2017}{1000}\right]=2$.

当$c=1$时，有$10\leq b\leq 20$．对于每个这样的正整数b，由$10b\leq a\leq 201$知，相应的a的个数为$202-10b$．从而这样的正整数组的个数为

$$\sum_{b=10}^{20}(202-10b)=\frac{(102+2)\times 11}{2}=572.$$

当$c=2$时，由$20\leq b\leq\left[\frac{2017}{100}\right]$，知$b=20$．进而$200\leq a\leq\left[\frac{2017}{10}\right]=201$，故$a=200, 201$．此时共有 2 组$(a, b, c)$.

综上所述，满足条件的正整数组的个数为$572+2=574$.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9. （本题满分 16 分）设不等式$|2^x-a|<|5-2^x|$对所有$x\in[1, 2]$成立，求实数a的取值范围.

解：设$t=2^x$，则$t\in[2, 4]$，于是$|t-a|<|5-t|$对所有$t\in[2, 4]$成立．由于

$$|t-a|<|5-t|\Leftrightarrow(t-a)^2<(5-t)^2$$
$$\Leftrightarrow(2t-a-5)(5-a)<0.$$ …………………8 分

对给定实数a，设$f(t)=(2t-a-5)(5-a)$，则$f(t)$是关于t的一次函数或常值函数．注意$t\in[2, 4]$，因此$f(t)<0$等价于

$$\begin{cases}f(2)=(-1-a)(5-a)<0,\\ f(4)=(3-a)(5-a)<0,\end{cases}$$ …………………12 分

解得$3<a<5$.

所以实数a的取值范围是$3<a<5$. …………………16 分

10. （本题满分 20 分）设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_{n+1}a_{n+2}-a_n^2, n=1,2,\cdots$.

（1）证明：数列 $\{b_n\}$ 也是等差数列；

（2）设数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的公差均是 $d\neq 0$，并且存在正整数 s, t，使得 a_s+b_t 是整数，求 $|a_1|$ 的最小值.

解：（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差是 d，则

$$\begin{aligned}b_{n+1}-b_n&=(a_{n+2}a_{n+3}-a_{n+1}^2)-(a_{n+1}a_{n+2}-a_n^2)\\&=a_{n+2}(a_{n+3}-a_{n+1})-(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)\\&=a_{n+2}\cdot 2d-(a_{n+1}+a_n)\cdot d\\&=(2a_{n+2}-a_{n+1}-a_n)\cdot d=3d^2.\end{aligned}$$

所以数列 $\{b_n\}$ 也是等差数列. ………………5 分

（2） 由已知条件及（1）的结果知 $3d^2=d$. 因为 $d\neq 0$，故 $d=\frac{1}{3}$. 这样

$$\begin{aligned}b_n&=a_{n+1}a_{n+2}-a_n^2=(a_n+d)(a_n+2d)-a_n^2\\&=3da_n+2d^2=a_n+\frac{2}{9}.\end{aligned}$$ ………………10 分

若正整数 s, t 满足 $a_s+b_t\in\mathbf{Z}$，则

$$a_s+b_t=a_s+a_t+\frac{2}{9}=a_1+(s-1)d+a_1+(t-1)d+\frac{2}{9}$$

$$=2a_1+\frac{s+t-2}{3}+\frac{2}{9}\in\mathbf{Z}.$$

记 $l=2a_1+\frac{s+t-2}{3}+\frac{2}{9}$，则 $l\in\mathbf{Z}$，且 $18a_1=3(3l-s-t+1)+1$ 是一个非零的整数，故 $|18a_1|\geq1$，从而 $|a_1|\geq\frac{1}{18}$. …………………15 分

又当 $a_1=\frac{1}{18}$ 时，有 $a_1+b_3=\frac{1}{18}+\frac{17}{18}=1\in\mathbf{Z}$.

综上所述，$|a_1|$ 的最小值为 $\frac{1}{18}$. …………………20 分

11. （本题满分 20 分）在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $C_1: y^2=4x$，曲线 $C_2: (x-4)^2+y^2=8$. 经过 C_1 上一点 P 作一条倾斜角为 $45°$ 的直线 l，与 C_2 交于两个不同的点 Q, R，求 $|PQ|\cdot|PR|$ 的取值范围.

解：设 $P(t^2, 2t)$，则直线 l 的方程为 $y=x+2t-t^2$，代入曲线 C_2 的方程得，

$$(x-4)^2+(x+2t-t^2)^2=8,$$

化简可得 $$2x^2-2(t^2-2t+4)x+(t^2-2t)^2+8=0. \qquad ①$$

由于 l 与 C_2 交于两个不同的点，故关于 x 的方程①的判别式 Δ 为正. 计算得，

$$\frac{\Delta}{4}=(t^2-2t+4)^2-2((t^2-2t)^2+8)=(t^2-2t)^2-8(t^2-2t)+16-2(t^2-2t)^2-16$$

$$=-(t^2-2t)^2+8(t^2-2t)=-(t^2-2t)(t^2-2t-8)=-t(t-2)(t+2)(t-4),$$

因此有 $$t\in(-2,0)\cup(2,4). \qquad ②$$

…………………10 分

设 Q, R 的横坐标分别为 x_1, x_2，由①知，

$$x_1+x_2=t^2-2t+4,\ x_1x_2=\frac{1}{2}((t^2-2t)^2+8),$$

因此，结合 l 的倾斜角为 $45°$ 可知，

$$|PQ|\cdot|PR|=\sqrt{2}(x_1-t^2)\cdot\sqrt{2}(x_2-t^2)=2x_1x_2-2t^2(x_1+x_2)+2t^4$$

$$=(t^2-2t)^2+8-2t^2(t^2-2t+4)+2t^4$$

$$=t^4-4t^3+4t^2+8-2t^4+4t^3-8t^2+2t^4$$

$$=t^4-4t^2+8=(t^2-2)^2+4. \qquad ③$$

…………………15 分

由②可知，$t^2-2\in(-2,2)\cup(2,14)$，故 $(t^2-2)^2\in[0,4)\cup(4,196)$，从而由③得，

$$|PQ|\cdot|PR|=(t^2-2)^2+4\in[4,8)\cup(8,200).$$ …………………20 分

注 1：利用 C_2 的圆心到 l 的距离小于 C_2 的半径，列出不等式 $\left|\frac{4+2t-t^2}{\sqrt{2}}\right|<2\sqrt{2}$，同样可以求得②中 t 的范围.

注 2：更简便的计算 $|PQ|\cdot|PR|$ 的方式是利用圆幂定理. 事实上，C_2 的圆心为 $M(4,0)$，半径为 $r=2\sqrt{2}$，故

$$|PQ|\cdot|PR|=|PM|^2-r^2=(t^2-4)^2+(2t)^2-(2\sqrt{2})^2=t^4-4t^2+8.$$