平谷区 2019-2020 学年度第二学期质量监控试题

高三数学　　　　　　2020、3

考生须知	1. 本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试时间为 120 分钟． 2. 试题所有答案必须书写在答题卡上，在试卷上作答无效. 3. 考试结束后，将答题卡交回，试卷按学校要求保存好.

第Ⅰ卷（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 题，每题 4 分，共 40 分。

在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项

1. 已知集合 $A=\{x\,|\,x>-1\}$，集合 $B=\{x\,|\,x(x+2)<0\}$，那么 $A\cup B$ 等于

A. $\{x\,|\,x>-2\}$　　B. $\{x\,|\,-1<x<0\}$　　C. $\{x\,|\,x>-1\}$　　D. $\{x\,|\,-1<x<2\}$

2. 下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

A. $y=\sqrt{x}$　　B. $f(x)=x\sin x$　　C. $f(x)=x^2+|x|$　　D. $y=|x+1|$

3. 如果 $b<a<0$，那么下列不等式成立的是

A. $\log_2|b|<\log_2|a|$　　B. $(\frac{1}{2})^b<(\frac{1}{2})^a$　　C. $b^3>a^3$　　D. $ab<b^2$

4. 双曲线 $\frac{x^2}{m}-y^2=1\,(m>0)$ 的一条渐近线方程为 $x+2y=0$，那么它的离心率为

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

5. 设直线 l 过点 $A\ (0,-1)$，且与圆 $C:x^2+y^2-2y=0$ 相切于点 B，那么 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$

A. ±3　　B. 3　　C. $\sqrt{3}$　　D. 1

6. 将函数 $f(x)=\cos 2x$ 图象上所有点向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，如果

$g(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上单调递减，那么实数 a 的最大值为

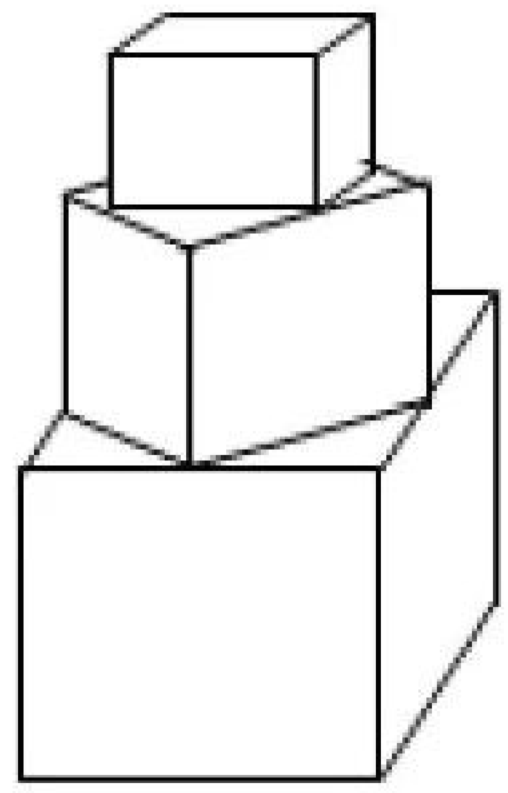
A．$\frac{\pi}{8}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$\frac{3}{4}\pi$

7. 设点 A,B,C 不共线，则“$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\perp\overrightarrow{BC}$”是“$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

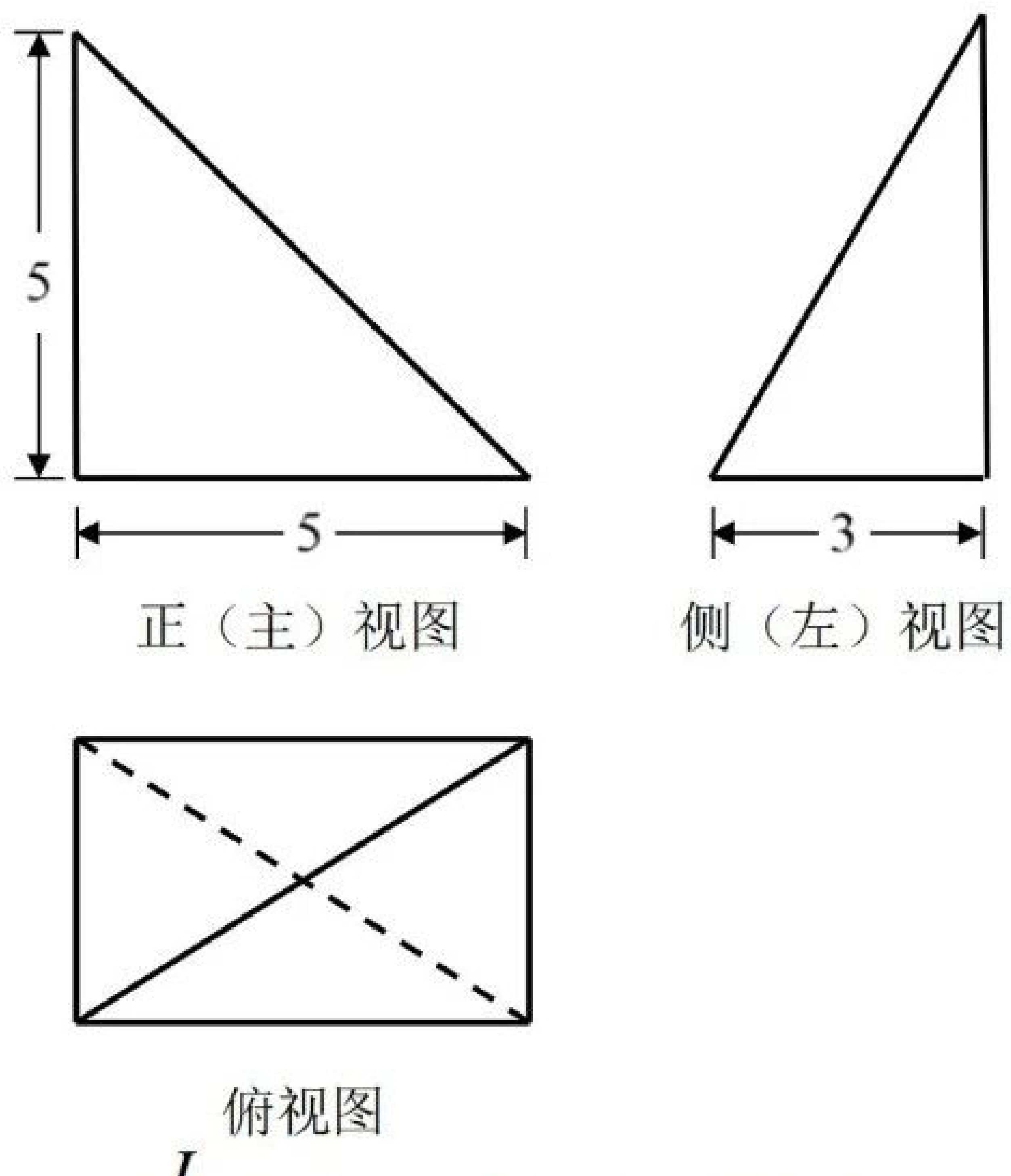
C．充分必要条件　　D．既不充分又不必要条件

8. 有一改形塔几何体由若干个正方体构成，构成方式如图所示，上层正方体下底面的四个顶点是下层正方体上底面各边的中点。已知最底层正方体的棱长为 8，如果改形塔的最上层正方体的边长小于 1，那么该塔形中正方体的个数至少是



A．8　　B．7　　C．6　　D．4

9. 某三棱锥的三视图如图所示，那么该三棱锥的表面中直角三角形的个数为



A．1

B．2

C．3

D．0

10. 在声学中，声强级 L（单位：dB）由公式 $L=10\lg(\frac{I}{10^{-12}})$ 给出，其中 I 为声强（单位：W/m^2）。若 $L_1=60dB$，$L_2=75dB$，那么 $\frac{I_1}{I_2}=$

A．$10^{\frac{4}{5}}$　　B．$10^{-\frac{4}{5}}$　　C．$-\frac{3}{2}$　　D．$10^{-\frac{3}{2}}$

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 题，每题 5 分，共 25 分。

11. 如果复数 z 满足 $i \cdot z = 1 + i$，那么 $|z| =$_____.　(i 为虚数单位).

12. 已知 $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\frac{4}{5}$，那么 $\tan\alpha \cdot \sin\alpha =$_________.

13. 设常数 $a \in R$，如果 $(x^2 + \frac{a}{x})^5$ 的二项展开式中 x 项的系数为 -80，那么 $a =$______.

14. 如果抛物线 $y^2 = 2px$ 上一点 $A(4, m)$ 到准线的距离是 6，那么 $m=$ ____.

15. 某公园划船收费标准如下：

船型	两人船（限乘 2 人）	四人船（限乘 4 人）	六人船（限乘 6 人）
每船租金（元/小时）	90	100	130

某班 16 名同学一起去该公园划船，若每人划船的时间均为 1 小时，每只租船必须坐满，租船最低总费用为___________元，租船的总费用共有__________种可能.

三、解答题共 6 题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.（本小题 14 分）

在△ABC 中，$\angle B = \frac{\pi}{3}$，$b = \sqrt{7}$，______________________

求 BC 边上的高.

从① $\sin A = \frac{\sqrt{21}}{7}$，　② $\sin A = 3\sin C$，　③ $a - c = 2$ 这三个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

17.（本小题 14 分）

为了解本学期学生参加公益劳动的情况，某校从初高中学生中抽取 100 名学生，收集了他们参加公益劳动时间（单位：小时）的数据，绘制图表的一部分如下.

人数 时间 学生类别		[0,5)	[5,10)	[10,15)	[15,20)	[20,25)	[25,30)
性别	男	6	9	10	10	9	4
	女	5	12	13	8	6	8
学段	初中	x	8	11	11	10	7
	高中						

（Ⅰ）从男生中随机抽取一人，抽到的男生参加公益劳动时间在[10,20）的概率；

（Ⅱ） 从参加公益劳动时间[25,30）的学生中抽取 3 人进行面谈，记 X 为抽到高中的人数，求 X 的分布列；

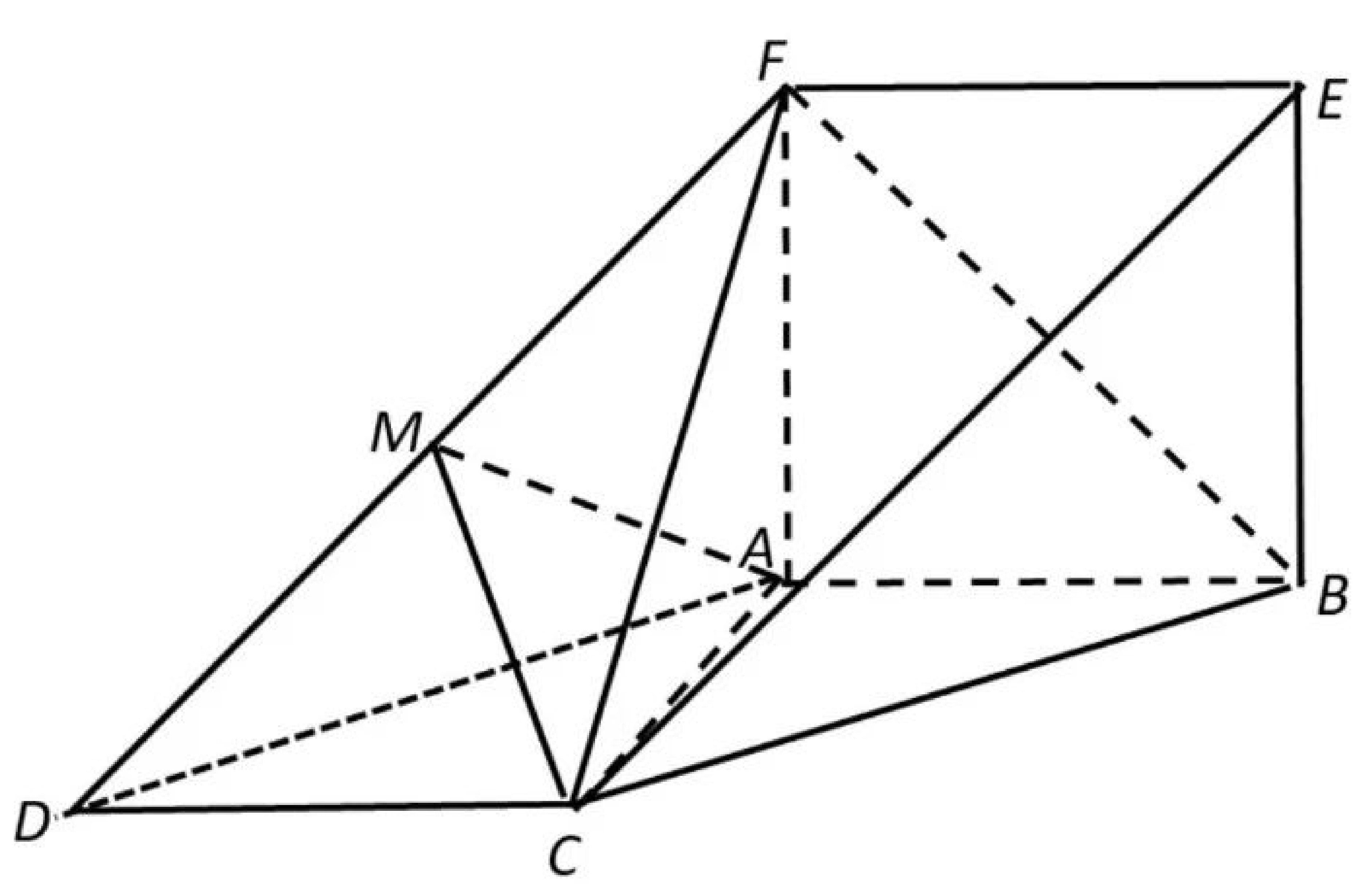
（Ⅲ）当 $x=5$ 时，高中生和初中生相比，那学段学生平均参加公益劳动时间较长.（直接写出结果）

18.（本小题 14 分）

如图，在三棱柱 $ADF-BCE$ 中，平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$，侧面 $ABCD$ 为平行四边形，侧面 $ABEF$ 为正方形，$AC\perp AB$，$AC=2AB=4$，M 为 FD 的中点。

（Ⅰ）求证：FB //平面 ACM；

（Ⅱ）求二面角 $M-AC-F$ 的大小.



19.（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{(x^2+ax-a)}{e^x}$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求 $f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 的切线方程;

（Ⅱ）求证：$f(x)$ 的极大值恒大于 0.

20.（本小题 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的两个焦点是 F_1，F_2，点 $M(\sqrt{2},1)$ 在椭圆 C 上，且 $|MF_1|+|MF_2|=4$. O 为坐标原点，直线 l 与直线 OM 平行，且与椭圆交于 A,B 两点. 连接 MA、MB 与 x 轴交于点 D，E.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程;

（Ⅱ）求证：$|\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}|$ 为定值.

21.（本小题 14 分）

记无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项中最大值为 M_n，最小值为 m_n，令 $b_n=\dfrac{M_n-m_n}{2}$，则称 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的“极差数列”.

(Ⅰ)若 $a_n=3n-2$，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和;

(Ⅱ)证明：$\{b_n\}$ 的“极差数列”仍是 $\{b_n\}$;

（Ⅲ）求证：若数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，则数列 $\{a_n\}$ 也是等差数列.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

平谷区 2019-2020 学年度第二学期质量监控

高三数学（理）试卷参考答案

一. 选择题(共 10 题，每题 4 分，共 40 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	**A**	**C**	**D**	**D**	**B**	**B**	**C**	**A**	**C**	**D**

二. 填空题（共5题，每题5分，共25分）

11. $\sqrt{2}$；　12. $-\dfrac{9}{20}$；　13. -2；　14. $\pm 4\sqrt{2}$；　15. 360，10。

注：第 14 题第一空 3 分,第二空 2 分;

三、解答题（共 6 题，共 85 分）

16.(本小题满分 14 分)

解 1：选择①

在$\triangle ABC$中，由正弦定理得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，… ……………2 分

所以$\dfrac{a}{\frac{\sqrt{7}}{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\frac{1}{2}}$，$a=2$． ………………5 分

由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$， ………………7 分

得$\sqrt{7}^2=2^2+c^2-2\times 2\times c\times\dfrac{1}{2}$.

$c^2-2c-3=0$，解得$c=3$ ………………10 分

BC边上的高$h=c\cdot\sin B=3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

BC边上的高为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. ………………14 分

解 2：选择②

在$\triangle ABC$中，由正弦定理得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin c}$， ………………2 分

又因为$\sin A=3\sin C$，所以$\dfrac{a}{3\sin C}=\dfrac{c}{\sin c}$，

所以$a=3c$， ………………5 分

由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$， ....7 分

得$\sqrt{7}^2=(3c)^2+c^2-2\times3c\times c\times\frac{1}{2}$.

$7c^2=7$，解得$c=1$. .... 10 分

BC 边上的高$h=c\cdot\sin B=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

BC 边上的高为$\frac{\sqrt{3}}{2}$. .... 14 分

解 3：选择③

在△ABC 中，由$a-c=2$，得$a=c+2$， .... 2 分

由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$， ....4 分

得$\sqrt{7}^2=(c+2)^2+c^2-2\times(c+2)\times c\times\frac{1}{2}$.4

化简$c^2+2c-3=0$，解得$c=1$. .... 10 分

BC 边上的高$h=c\cdot\sin B=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

BC 边上的高为$\frac{\sqrt{3}}{2}$. .... 14 分

17.(本小题满分 14 分)。

解：（Ⅰ）100 名学生中共有男生 48 名， .... 1 分

其中共有 20 人参加公益劳动时间在[10,20)， .... 2 分

设男生中随机抽取一人，抽到的男生参加公益劳动时间在[10,20）的事件为A，

.... 3 分

那么$P(A)=\frac{20}{48}=\frac{5}{12}$· ....4 分

（II）X 的所有可能取值为0，1，2，3. .... 5 分

所以 $P(X=0)=\frac{C_7^3}{C_{12}^3}=\frac{7}{44}$； ....6 分

$P(X=1)=\frac{C_5^1C_7^2}{C_{12}^3}=\frac{21}{44}$； .... 7 分

$$P(X=2)=\frac{C_5^2C_7^1}{C_{12}^3}=\frac{7}{22};$$ ....8 分

$$P(X=3)=\frac{C_5^3}{C_{12}^3}=\frac{1}{22}.$$ .... 9 分

所以随机变量 X 的分布列如下：

X	0	1	2	3
P	$\frac{7}{44}$	$\frac{21}{44}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$

.... 10 分

（III）初中生平均参加公益劳动时间较长。

.... 14 分

18.（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）连接 BD，与 AC 相交于 O，连接 MO. .... 1 分

$\because ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore O$ 是 BD 的中点

又 M 是 FD 的中点

$\therefore MO /\!/ FB$. .... 3 分

又 $FB\not\subset$平面 ACM，$MO\subset$平面 ACM，

$\therefore FB /\!/$平面 ACM. .... 4 分

（II）$\because$平面 $ABCD$ $\perp$平面 $ABEF$，平面 $ABCD\cap$平面 $ABEF=AB$，$AC\perp AB$，$AC\subset$平面 $ABCD$，

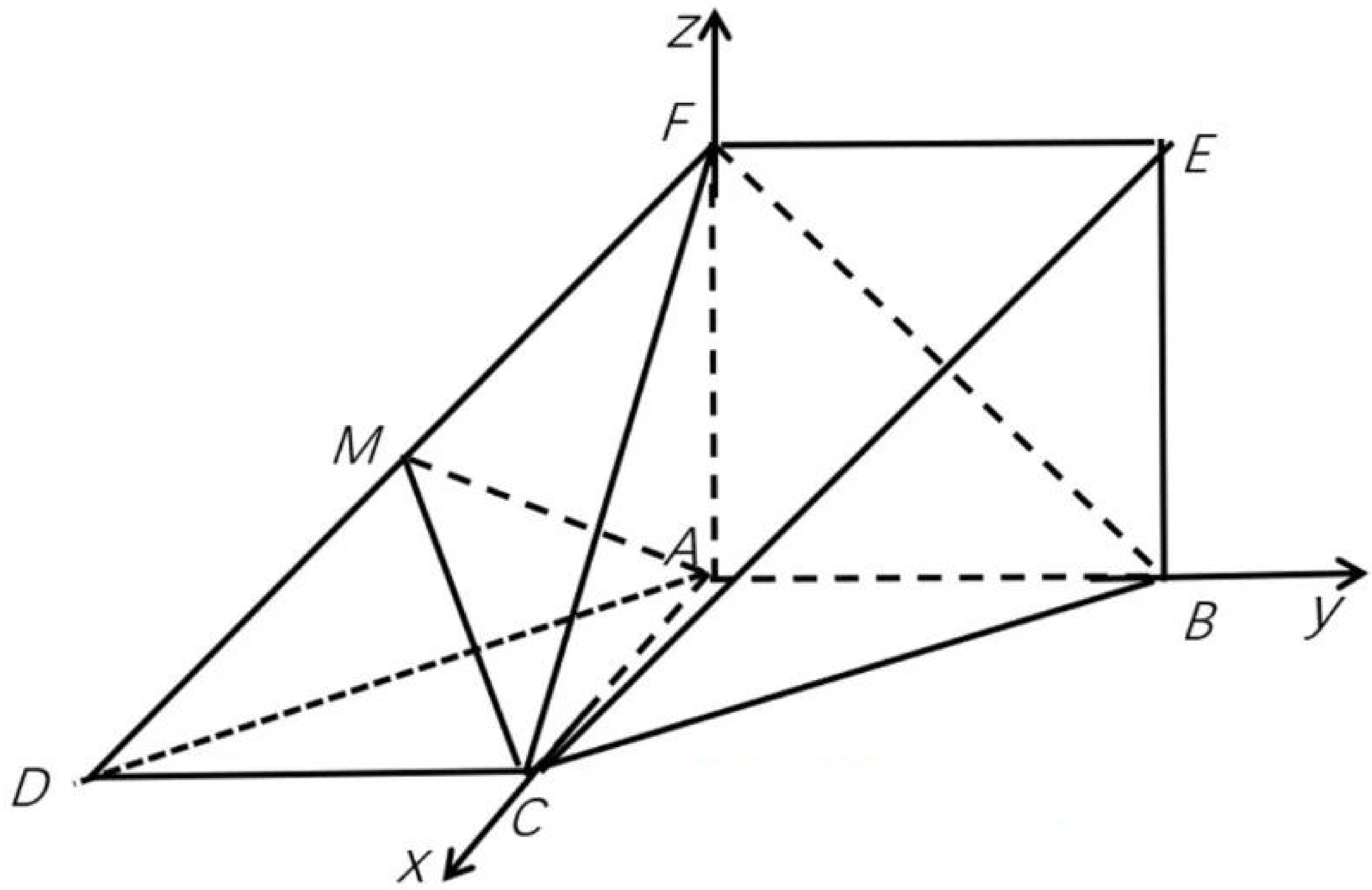
$\therefore AC\perp$平面 $ABEF$，$AC\perp AF$，

又$\because ABEF$ 为正方形，

$\therefore AF\perp AB$，如图，建立空间直角坐标系 $A-xyz$， .... 6 分

则有 $A(0,0,0)$，$C(4,0,0)$，$B(0,2,0)$，$D(4,-2,0)$，$F(0,0,2)$，

则 $M(2,-1,1)$， .... 8 分



设平面 ACM 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

因为 $\overrightarrow{AC}=(4,0,0)$，$\overrightarrow{AM}=(2,-1,1)$，所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\end{cases}$，即 $\begin{cases}4x=0,\\ 2x-y+z=0.\end{cases}$

设 $y=1$，则 $z=1$，$\boldsymbol{n}=(0,1,1)$. .... 10 分

因为 $AB\perp$ 平面 ACF

平面 ACF 的一个法向量为 $\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$， .... 11 分

故 $\left|\cos\langle\overrightarrow{AB},\boldsymbol{n}\rangle\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. .... 13 分

由图知，二面角 $M-AC-F$ 的平面角为锐角，

所以二面角 $M-AC-F$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{4}$. .... 14 分

19.（本小题满分 15 分）

解：（Ⅰ）由 $f(x)=\dfrac{(x^2+ax-a)}{e^x}$，

得 $f'(x)=\dfrac{(2x+a)e^x-(x^2+ax-a)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{-x^2-(a-2)x+2a}{e^x}$

$=\dfrac{-[x^2+(a-2)x-2a]}{e^x}$ .... 3 分

$= \dfrac{-(x+a)(x-2)}{e^x}$.

当 $a=0$ 时，$f(1)=\dfrac{1}{e}$，$f'(1)=\dfrac{1}{e}$， .... 5 分

则 $f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 的切线方程为：$y-\dfrac{1}{e}=\dfrac{1}{e}(x-1)$，

化简得：$y=\dfrac{1}{e}x$. .... 7 分

（Ⅱ）令 $f'(x)=0$，得 $x=2$，或 $x=-a$. .... 8 分

① 当 $a=-2$ 时，$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立，此时函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，

所以，函数 $f(x)$ 无极值. .... 9 分

② 当 $a>-2$ 时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-a)$	$-a$	$(-a,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

.... 11 分

$f(x)$ 的极大值为 $f(2)=\dfrac{4+a}{e^2}>0$. .... 12 分

③ 当 $a<-2$ 时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,-a)$	$-a$	$(-a,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

.... 14 分

$f(x)$ 的极大值为 $f(-a)=\dfrac{-a}{e^a}>0$，............... 14 分

综上，$f(x)$ 的极大值恒大于 0。 .... 15 分

20．（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）因为，$|PF_1|+|PF_2|=4$，由椭圆的定义得：$2a=4$，$a=2$，…………… 2 分

点 $M(\sqrt{2},1)$ 在椭圆 C 上，代入椭圆方程中，解得 $b^2=2$，

椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$。 ……………4 分

（Ⅱ）证明：设 $A(x_1,y_1),Bx_2,y_2)$，直线 AB 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，设直线 l 的方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+t$，

……………5 分

与椭圆方程联立得 $x^2+2(\frac{\sqrt{2}}{2}x+t)^2-4=0$，整理得：$2x^2+2\sqrt{2}tx+2t^2-4=0$

所以 $x_1+x_2=-\sqrt{2}t$，$x_1\cdot x_2=t^2-2$. …………… 7 分

直线 MA 的直线方程为 $y-1=\frac{y_1-1}{x_1-\sqrt{2}}(x-\sqrt{2})$,令 $y=0$，则 $x_D=-\frac{x_1-\sqrt{2}}{y_1-1}+\sqrt{2}$

…………… 9 分

同理 $x_E=-\frac{x_2-\sqrt{2}}{y_2-1}+\sqrt{2}$。…………… 10 分

$$|\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}|=|-\frac{x_1-\sqrt{2}}{y_1-1}+\sqrt{2}-\frac{x_2-\sqrt{2}}{y_2-1}+\sqrt{2}|=|2\sqrt{2}-(\frac{x_1-\sqrt{2}}{y_1-1}+\frac{x_2-\sqrt{2}}{y_2-1})|$$

$$=|2\sqrt{2}-(\frac{(x_1-\sqrt{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}x_2+t-1)+(x_2-\sqrt{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+t-1)}{(y_1-1)(y_2-1)})|$$ …………… 12 分

$$=|2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}x_1x_2-(x_1+x_2)+(t-1)(x_1+x_2-2\sqrt{2})}{(y_1-1)(y_2-1)}|$$

代入整理得：$|\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}|=2\sqrt{2}$

所以 $|\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}|$ 为定值. …………… 14 分

21．（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $\{a_n\}$ 为递增数列，所以 $b_n=\frac{3n-2-1}{2}=\frac{3}{2}(n-1)$，…………… 2 分

$\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{3}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\frac{3}{4}n^2-\frac{3}{4}n$。 …………… 4 分

（Ⅱ）因为 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\} \le \max\{a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}\}(n=1,2,3,\cdots)$，

$\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\} \ge \min\{a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}\}(n=1,2,3,\cdots)$， ……………6 分

所以 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}\}-\min\{a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}\} \ge \max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}-\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$

所以 $b_{n+1} \ge b_n (n=1,2,3,\cdots)$. …………… 8 分

又因为 $b_1 = a_1 - a_1 = 0$，

所以 $\max\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}-\min\{b_1,b_2,\cdots,b_n\} = b_n - b_1 = b_n$，

所以 $\{b_n\}$ 的“**极差数列**”仍是 $\{b_n\}$. …………… 10 分

（Ⅲ）当数列 $\{b_n\}$ 是等差数列时，设其公差为 d^*

因为 $b_n - b_{n-1} = \dfrac{M_n - m_n}{2} - \dfrac{M_{n-1}-m_{n-1}}{2} = \dfrac{M_n - M_{n-1}}{2} - \dfrac{m_n - m_{n-1}}{2} = d^*$，

根据 M_n，m_n 的定义，有以下结论：

$M_n \ge M_{n-1}$，$m_n \le m_{n-1}$，且两个不等式中至少有一个取等号 …………… 11 分

当 $d^* > 0$ 时，则必有 $M_n > M_{n-1}$，所以 $a_n = M_n > M_{n-1} \ge a_{n-1}$，

所以 $\{a_n\}$ 是一个单调递增数列，所以 $M_n = a_n$，$m_n = a_1$，

所以 $b_n - b_{n-1} = \dfrac{a_n - a_1}{2} - \dfrac{a_{n-1}-a_1}{2} = \dfrac{a_n - a_{n-1}}{2} = d^*$

所以 $a_n - a_{n-1} = 2d^*$，即 $\{a_n\}$ 为等差数列. …………… 12 分

当 $d^* < 0$ 时，则必有 $m_n < m_{n-1}$，所以 $a_n = m_n < m_{n-1} \le a_{n-1}$

所以 $\{a_n\}$ 是一个单调递减数列，所以 $M_n = a_1$，$m_n = a_n$，

所以 $b_n - b_{n-1} = \dfrac{a_1 - a_n}{2} - \dfrac{a_1 - a_{n-1}}{2} = \dfrac{a_{n-1} - a_n}{2} = d^*$

所以 $a_n - a_{n-1} = -2d^*$，即 $\{a_n\}$ 为等差数列. …………… 13 分

当 $d^* = 0$ 时，$b_n - b_{n-1} = \dfrac{M_n - m_n}{2} - \dfrac{M_{n-1}-m_{n-1}}{2} = \dfrac{M_n - M_{n-1}}{2} - \dfrac{m_n - m_{n-1}}{2} = 0$

因为 $M_n - M_{n-1}$，$m_n - m_{n-1}$ 中必有一个为 0，

根据上式，一个为 0，则另一个亦为 0，

所以 $M_n = M_{n-1}, m_n = m_{n-1}$，所以 $\{a_n\}$ 为常数数列，所以 $\{a_n\}$ 为等差数列

综上，结论得证. …………… 14 分