高三数学考试(理科)

考生注意:

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共150分。考试时间120分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{x\in \mathbf{N}|x\leqslant 2\}$,则 $A\cup B=$

A. $\{2,3\}$　　B. $\{0,1,2,3\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{1,2,3\}$

2. $\frac{2-4i}{i}=$

A. $-4-2i$　　B. $-4+2i$　　C. $-2-4i$　　D. $4-2i$

3. 设 $a=e^{0.01}$,$b=\log_{\pi}e$,$c=\ln\frac{1}{\pi}$,则

A. $a>c>b$　　B. $a>b>c$　　C. $b>a>c$　　D. $c>a>b$

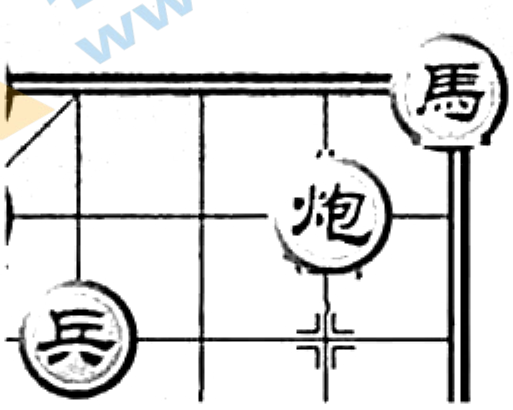
4.《周髀算经》中有这样一个问题:冬至、小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种这十二个节气,自冬至日起,其日影长依次成等差数列,立春当日日影长为9.5尺,立夏当日日影长为2.5尺,则春分当日日影长为

A. 4.5尺　　B. 5尺　　C. 5.5尺　　D. 6尺

5. 函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x-\frac{13}{3}$ 的极大值点为

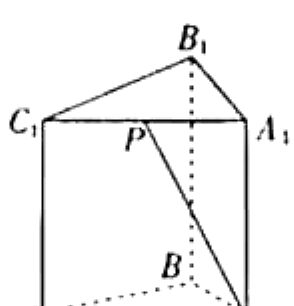
A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. $\frac{7}{3}$

6. 象棋,亦作"象棋"、中国象棋,中国传统棋类益智游戏,在中国有着悠久的历史,属于二人对抗性游戏的一种.由于用具简单,趣味性强,象棋成为流行极为广泛的棋艺活动.中国象棋是中国棋文化也是中华民族的文化瑰宝.某棋局的一部分如图所示,若不考虑这部分以外棋子的影响,且"马"和"炮"不动,"兵"只能往前走或左右走,每次只能走一格,从"兵""吃掉""马"的最短路线中随机选择一条路线,则该路线能顺带"吃掉""炮"的概率为



A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{3}{4}$

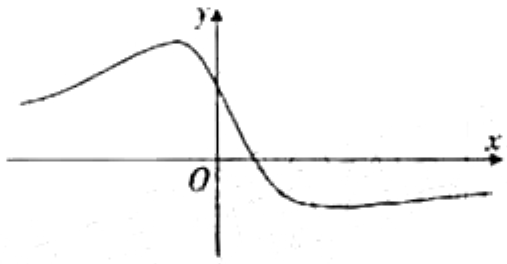
7. 如图,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AC=CC_1$,P 是 A_1C_1 的中点,则异面直线 BC 与 AP 所成角的余弦值为



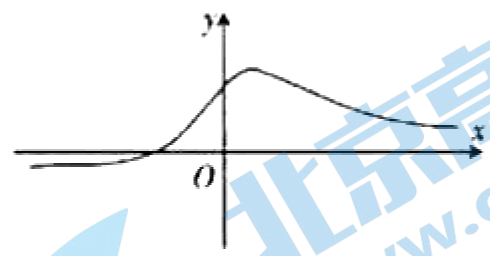
A. 0　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{10}$

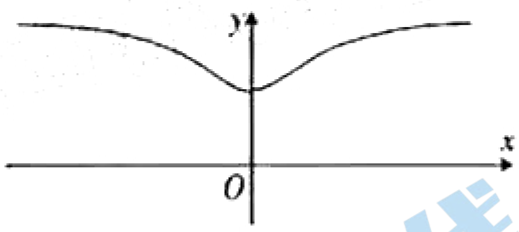
8. 函数 $f(x)=\frac{ax+1}{x^2+1}$ 的大致图象不可能是



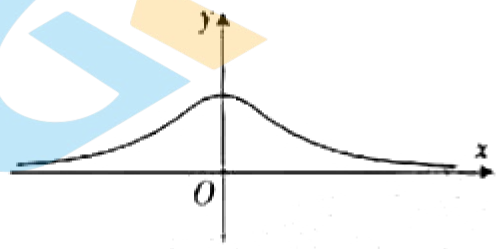
A



B



C

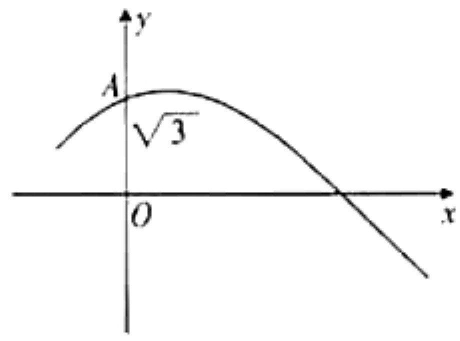


D

9. 在 $(x-\frac{a}{x^2})^5$ 的展开式中，x^2 的系数是 -10，则 $a=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

10. 函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)+\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则 $\varphi=$



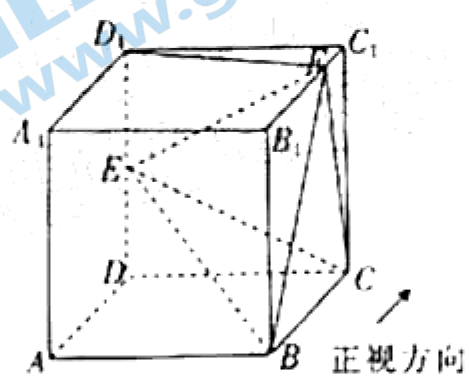
A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $-\frac{\pi}{3}$

C. $-\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

11. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，直线 $x-c=0$ 与双曲线 C 的一个交点为点 P，与双曲线 C 的一条渐近线交于点 Q，O 为坐标原点，若 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OF_2}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OQ}$，则双曲线 C 的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{3}$

12. 如图，E 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱 DD_1 的中点，F 是棱 B_1C_1 上的动点，现有下列命题：①存在点 F 使得 $CF\perp EB$；②存在点 F 使得 $D_1F//BE$；③存在点 F 使得 $\triangle BEF$ 的正视图和侧视图的面积相等；④四面体 $EBFC$ 的体积为定值. 其中所有正确命题的序号为



A. ①③④　　B. ①③

C. ③④　　D. ①②④

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 向量 $\boldsymbol{a}=(3,x)$，$\boldsymbol{b}=(4,2)$. 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $x=$ ____▲____.

14. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q>0$，其前 n 项和为 S_n，且 $S_2=6$，$S_3=14$，则 $a_1=$ ____▲____

15. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}2x-y\leq 2,\\ x+y\geq 2,\\ x-y\geq -1,\end{cases}$ 则 $z=\frac{y}{x+2}$ 的最大值为 ____▲____

16. 已知圆 $C:x^2+(y+1)^2=16$，P 是圆 C 上的动点. 若 $A(0,1)$，线段 PA 的垂直平分线与直线 PC 相交于点 Q，则点 Q 的轨迹方程是 ____▲____；若 $M(2,1)$，则 $|MQ|+|QC|$ 的最大值为 ____▲____.（本题第一空 3 分，第二空 2 分）

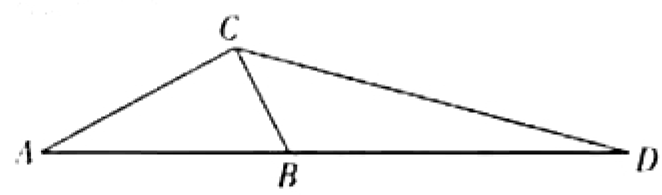
三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

三角测量法是在地面上选定一系列的点，并构成相互连接的三角形，由已知的点观察各方向的水平角，再测定起始边长，以此边长为基线，即可推算各点坐标的一种测量方法. 在实际测量中遇到高大障碍物的测量，需要跨越时的测量，无法得到平距的测量都需要用到三角测量法. 如图，为测量横截面为直角三角形的某模型的平面图$\triangle ABC$，由于实际情况，$Rt\triangle ABC$（$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$）的边和角无法测量，以下为可测量数据：①$BD=2$；②$CD=\sqrt{3}-1$；③$\angle BDC=\frac{\pi}{6}$；④$\angle BCD=\frac{\pi}{4}$. 以上可测量数据中至少需要几个可以推算出 $Rt\triangle ABC$ 的面积？请选择一组并写出推算过程.

注：若选择不同的组合分别作答，则按第一个作答计分.

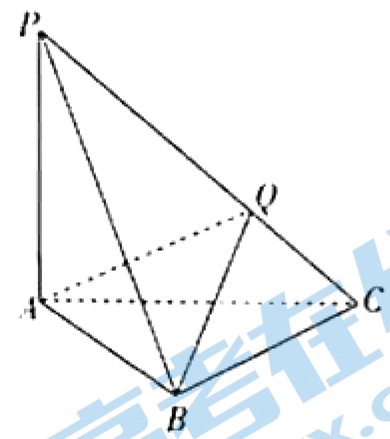


18.（12 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 为等边三角形，$PA=AB=2$，$PB=PC=2\sqrt{2}$.

（1）证明：$BC\perp PA$.

（2）若$\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{QC}$，求二面角 $B-AQ-C$ 的余弦值.



19.（12 分）

数独是源自 18 世纪瑞士的一种数学游戏，玩家需要根据 9×9 盘面上的已知数字，推理出所有剩余空格的数字，并满足每一行、每一列、每一个粗线宫（3×3）内的数字均含 1～9，且不重复. 数独爱好者小明打算报名参加“丝路杯”全国数独大赛初级组的比赛.

（1）赛前小明在某数独 APP 上进行了一段时间的训练，每天解题的平均速度 y（秒/题）与训练天数 x（天）有关，经统计得到如下数据：

x（天）	1	2	3	4	5	6	7
y（秒/题）	910	800	600	440	300	240	210

现用 $y=a+\frac{b}{x}$ 作为回归方程模型，请利用表中数据，求出该回归方程（a，b 用分数表示）.

（2）小明和小红在数独 APP 上玩“对战赛”，每局两人同时开始解一道数独题，先解出题的人获胜，不存在平局，两人约定先胜 3 局者赢得比赛. 若小明每局获胜的概率为 $\frac{2}{3}$，且各局之间相互独立，设比赛 X 局后结束，求随机变量 X 的分布列及期望.

参考数据（其中 $t_i=\frac{1}{x_i}$）：

$\sum_{i=1}^{7} t_i y_i$	$\bar{t}$	$\sum_{i=1}^{7} t_i^2 - 7\times\bar{t}^2$
1750	0.37	0.55

参考公式：对于一组数据 $(u_1,v_1),(u_2,v_2),\cdots,(u_n,v_n)$，其回归直线 $\hat{v}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{\beta}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}u_iv_i-n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^{n}u_i^2-n\bar{u}^2}$，$\hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u}$.

20.（12 分）

已知函数 $f(x)=(x^2-2ax)\ln x+ax$.

(1)若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与直线 $2x-y+1=0$ 平行，求实数 a 的值；

(2)当 $x\in(0,\sqrt{e})$ 时，$f(x)\geq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

21.（12 分）

已知抛物线 C：$x^2=2py(p>0)$ 上的点 $P(x_0,1)$ 到其焦点 F 的距离为 2.

(1)求抛物线 C 的方程及点 F 的坐标.

(2)过抛物线 C 上一点 Q 作圆 M：$x^2+(y-3)^2=4$ 的两条斜率都存在的切线，分别与抛物线 C 交于异于点 Q 的 A，B 两点. 证明：直线 AB 与圆 M 相切.

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.［选修 4－4：坐标系与参数方程］(10 分)

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\cos\alpha,\\ y=-1+\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1)求曲线 C_1 的普通方程与曲线 C_2 的直角坐标方程；

(2)设点 $M(1,0)$，若曲线 C_1，C_2 相交于 A，B 两点，求 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}$ 的值.

23.［选修 4－5：不等式选讲］(10 分)

已知函数 $f(x)=|x-4|$.

(1)求不等式 $f(x)+f(5-x)\leq 5$ 的解集；

(2)设函数 $g(x)=f(x)-f(x+2)$ 的最大值为 M. 若 $a+b=M$，且 $a>0$，$b>0$，求 $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{4b-4}$ 的最小值.

高三数学考试参考答案(理科)

1. B　因为 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{0,1,2\}$，所以 $A\cup B=\{0,1,2,3\}$.

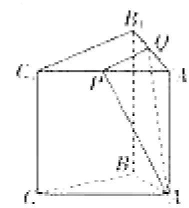
2. A　$\frac{2-4i}{i}=-4-2i$.

3. B　因为 $a=e^{0.1}>1$，$b=\log_{\pi}e\in(0,1)$，$c=\ln\frac{1}{\pi}<0$，所以 $a>b>c$.

4. D　设十二节气自冬至日起的日影长构成的等差数列为 $\{a_n\}$，则立春当日日影长为 $a_4=9.5$，立夏当日日影长为 $a_{10}=2.5$，所以春分当日日影长为 $a_7=\frac{1}{2}(a_4+a_{10})=6$.

5. B　因为 $f'(x)=x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$，$(4,+\infty)$ 上单调递增，在 $[2,4]$ 上单调递减，故 $f(x)$ 的极大值点为 2.

6. C　由题意可知，"兵""吃掉""马"的最短路线中，横走三步，竖走两步，相当于"横横横竖竖"五个汉字排成一列，有 $C_5^2=10$ 条路线. 其中能顺带"吃掉""炮"的路线，分两步，第一步，"横横竖"三个汉字排成一列；第二步，"横竖"两个汉字排成一列，共有 $C_3^1\times C_2^1=6$ 条路线. 故所求概率为 $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.



7. D　如图，取 A_1B_1 的中点 Q，连接 PQ，AQ.

因为 $BC/\!/PQ$，所以 $\angle APQ$ 即异面直线 BC 与 AP 所成的角.

设 $AC=CC_1=2$，则 $AP=AQ=\sqrt{5}$，$PQ=1$，故 $\cos\angle APQ=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$.

8. C　当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的大致图象如选项 A 所示；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的大致图象如选项 B 所示；当 $a=0$ 时，$f(x)$ 的大致图象如选项 D 所示.

9. D　$(x-\frac{a}{x^2})^5$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}(-a)^r x^{-2r}=C_5^r(-a)^r x^{5-3r}$.

令 $5-3r=2$，得 $r=1$. 由 $C_5^1(-a)^1=-10$，得 $a=2$.

10. A　因为 $f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)+\cos(\omega x+\varphi)=2\sin(\omega x+\varphi+\frac{\pi}{6})$，所以 $f(0)=2\sin(\varphi+\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$. 因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi+\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$，所以 $\varphi+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，即 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

11. B　因为 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OF_2}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OQ}$，所以 $\overrightarrow{F_2P}=2\overrightarrow{PQ}$，所以 $\overrightarrow{F_2P}=\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2Q}$.

所以 $\frac{b}{a}=\frac{2}{3}\times\frac{bc}{a}$，得 $2c=3b$，故 $e=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

12. A　设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，以 D 为坐标原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系(图略)，则 $B(2,2,0)$，$E(0,0,1)$，$C(0,2,0)$，$D_1(0,0,2)$. 设 $F(t,2,2)$，$t\in[0,2]$，则 $\overrightarrow{CF}=(t,0,2)$，$\overrightarrow{EB}=(2,2,-1)$.

若 $CF\perp EB$，则 $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{EB}=2t-2=0$，$t=1$，即当 F 为 B_1C_1 的中点时，$CF\perp EB$，故①正确；

因为 $\overrightarrow{D_1F}=(t,2,0)$，$\overrightarrow{EB}=(2,2,-1)$，所以不存在点 F 使得 $D_1F/\!/BE$，故②错误；

当 F 与 B_1 重合时，$\triangle BEF$ 的正视图和侧视图的面积相等，故③正确；

因为点 E 到平面 BFC 的距离为定值，$\triangle BFC$ 的面积也为定值，所以四面体 $EBFC$ 的体积为定值，故④正确.

13. -6　因为 $a\perp b$，所以 $4\times3+2x=0$，得 $x=-6$.

14. 2　因为 $a_3=S_3-S_2=8=a_1q^2$，$S_2=a_1+a_1q=6$，所以 $\frac{a_1q^2}{a_1+a_1q}=\frac{4}{3}$.

所以 $3q^2-4q-4=0$，得 $q=2$ 或 $-\frac{2}{3}$(舍去)，故 $a_1=2$.

15. $\frac{4}{5}$　作出可行域(图略)，可知点 $(3,4)$ 与点 $(-2,0)$ 连线的斜率最大，故 $z_{max}=\frac{4-0}{3-(-2)}=\frac{4}{5}$.

16. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$；6　因为线段 PA 的垂直平分线与直线 PC 相交于点 Q，所以 $|QA|=|PQ|$.

所以$|QA|+|QC|=|PQ|+|QC|=|PC|=4>|AC|$，所以点$Q$的轨迹是以$A$，$C$为焦点，4为长轴长的椭圆，故点$Q$的轨迹方程是$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$. 因为$|QA|+|QC|=4$，$|QC|=4-|QA|$，所以$|MQ|+|QC|=|MQ|-|QA|+4$. 因为$|MQ|-|QA|\leq|MA|$，所以$(|MQ|+|QC|)_{max}=|MA|+4=6$.

17. 解：至少需要3个可测量数据. …………………………………………………… 2分

选择组合一：①③④或②③④

在$\triangle BCD$中，因为$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$， …………………………………………… 3分

所以$BC=\sqrt{2}$. …………………………………………………………………………… 5分

因为$\tan\angle ABC=\tan(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})=2+\sqrt{3}$，$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$， ……………………………………………… 8分

所以$AC=BC\cdot\tan\angle ABC=2\sqrt{2}+\sqrt{6}$. …………………………………………………… 10分

故$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=2+\sqrt{3}$. …………………………………………………………… 12分

选择组合二：①②③

在$\triangle BCD$中，因为$BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cdot\cos\angle BDC=2$， ………………………………… 3分

所以$BC=\sqrt{2}$. …………………………………………………………………………… 4分

结合正弦定理$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$， ……………………………………… 5分

可求得$\angle BCD=\frac{\pi}{4}$，$\angle CBD=\frac{7\pi}{12}$. ………………………………………………………… 7分

因为$\tan\angle ABC=\tan(\pi-\frac{7\pi}{12})=2+\sqrt{3}$，$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$， ………………………………………… 9分

所以$AC=2\sqrt{2}+\sqrt{6}$， ……………………………………………………………………… 11分

故$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=2+\sqrt{3}$. …………………………………………………………… 12分

选择组合三：①②④

在$\triangle BCD$中，因为$\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$， ……………………………………………… 3分

所以$\sin\angle CBD=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. ………………………………………………………… 4分

因为$\angle CBD$为钝角，所以$\angle CBD=\frac{7\pi}{12}$. …………………………………………………… 6分

因为$\tan\angle ABC=\tan(\pi-\frac{7\pi}{12})=2+\sqrt{3}$，$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$， ………………………………………… 9分

所以$AC=2\sqrt{2}+\sqrt{6}$， ……………………………………………………………………… 11分

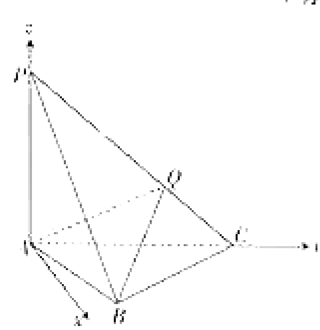
故$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=2+\sqrt{3}$. …………………………………………………………… 12分

18.（1）证明：因为$PA=AB=AC=2$，$PB=PC=2\sqrt{2}$，所以$PA^2+AB^2=PB^2$，$PA^2+AC^2=PC^2$，所以$PA\perp AB$，$PA\perp AC$. ……………………………………………………………………………… 2分

因为$AB\cap AC=A$，所以$PA\perp$平面ABC. ………………………………………………………… 3分

因为$BC\subset$平面ABC，所以$BC\perp PA$. ……………………………………………………………… 4分

（2）解：如图，以A为坐标原点，建立空间直角坐标系$A-xyz$，则$B(\sqrt{3},1,0)$，$C(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，$Q(0,\frac{4}{3},\frac{2}{3})$，所以$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{AQ}=(0,\frac{4}{3},\frac{2}{3})$， …………………………………………………………………………………… 6分



取平面CAQ的一个法向量为$m=(1,0,0)$， ……………………………… 7分

设平面BAQ的法向量为$n=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}x+y=0,\\ n\cdot\overrightarrow{AQ}=\frac{4}{3}y+\frac{2}{3}z=0,\end{cases}$ 令$x=1$，得$n=(1,-\sqrt{3},2\sqrt{3})$， …………… 9分

则 $\cos\langle m,n\rangle=\frac{|m\cdot n|}{|m||n|}=\frac{1}{\sqrt{1+3+12}}=\frac{1}{4}$， …………………………………………… 10 分

因为二面角 $B-AQ-C$ 为锐角，

所以二面角 $B-AQ-C$ 的余弦值为 $\frac{1}{4}$. …………………………………………… 12 分

19. 解：(1)因为 $y=a+\frac{b}{x}$，$t_i=\frac{1}{x_i}$，所以 $y=a+bt$. …………………………………………… 1 分

因为 $\bar{y}=\frac{910+880+690+440+300+240+210}{7}=500$， …………………………………………… 2 分

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}t_iy_i-7\bar{t}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{7}t_i^2-7\bar{t}^2}=\frac{1750-7\times0.37\times500}{0.55}=\frac{455}{0.55}=\frac{9100}{11}$， …………………………………………… 3 分

所以 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=500-\frac{9100}{11}\times0.37=\frac{2133}{11}$. …………………………………………… 4 分

所以 $\hat{y}=\frac{2133}{11}+\frac{9100}{11}t$. …………………………………………… 5 分

所以所求回归方程为 $\hat{y}=\frac{2133}{11}+\frac{9100}{11x}$. …………………………………………… 6 分

(2)随机变量 X 的可能取值为 3，4，5。

$P(X=3)=(\frac{2}{3})^3+(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{3}$. …………………………………………… 8 分

$P(X=4)=C_3^1(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+C_3^1(\frac{1}{3})^2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{10}{27}$， …………………………………………… 9 分

$P(X=5)=C_4^2(\frac{2}{3})^2\times(\frac{1}{3})^2\times\frac{2}{3}+C_4^2(\frac{1}{3})^2\times(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{3}=\frac{8}{27}$. …………………………………………… 10 分

所以随机变量 X 的分布列为

X	3	4	5
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{8}{27}$

$EX=3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{10}{27}+5\times\frac{8}{27}=\frac{107}{27}$. …………………………………………… 12 分

20. 解：(1)因为 $f'(x)=(2x-2a)\ln x+x-a=(x-a)(2\ln x+1)$， …………………………………………… 2 分

所以 $f'(1)=1-a=2$，所以 $a=-1$. …………………………………………… 4 分

(2)当 $x\in(0,\sqrt{e})$ 时，$f(x)=(x^2-2ax)\ln x+ax\geq0$ 等价于 $(x-2a)\ln x+a\geq0$，

即 $(2\ln x-1)a\leq x\ln x$. …………………………………………… 5 分

因为 $x\in(0,\sqrt{e})$，所以 $2\ln x-1<0$，所以 $a\geq\frac{x\ln x}{2\ln x-1}$. …………………………………………… 7 分

令 $g(x)=\frac{x\ln x}{2\ln x-1}$，$x\in(0,\sqrt{e})$，

则 $g'(x)=\frac{(\ln x+1)(2\ln x-1)-2\ln x}{(2\ln x-1)^2}=\frac{(\ln x-1)(2\ln x+1)}{(2\ln x-1)^2}$. …………………………………………… 8 分

令 $g'(x)=0$，得 $x=e^{-\frac{1}{2}}$ 或 e（舍去），

所以 $g(x)$ 在 $(0,e^{-\frac{1}{2}})$ 上单调递增，在 $(e^{-\frac{1}{2}},\sqrt{e})$ 上单调递减， …………………………………………… 10 分

所以 $g(x)_{max}=g(e^{-\frac{1}{2}})=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{4}=\frac{1}{4\sqrt{e}}$，所以 $a\geq\frac{1}{4\sqrt{e}}$（或 $a\geq\frac{\sqrt{e}}{4e}$）. …………………………………………… 12 分

21. 解：(1)由抛物线定义知，$|PF|=1+\frac{p}{2}=2$，$p=2$. …………………………………………… 2 分

所以抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$，焦点为 $F(0,1)$. …………………………………………… 4 分

(2)圆 M 的圆心 $M(0,3)$，半径 $r=2$，

设 $Q(x_1,\frac{x_1^2}{4})$，$A(x_2,\frac{x_2^2}{4})$，$B(x_3,\frac{x_3^2}{4})$ $(x_1\neq x_2\neq x_3)$， …………………………………………… 5 分

所以直线 QA 的方程为 $y-\frac{x_2^2}{4}=\frac{\frac{x_1^2}{4}-\frac{x_2^2}{4}}{x_1-x_2}(x-x_2)$，即 $(x_1+x_2)x-4y-x_1x_2=0$. ………………………… 6 分

因为直线 QA 与圆 M 相切，所以 $\frac{|x_1x_2+12|}{\sqrt{(x_1+x_2)^2+16}}=2$. ………………………… 7 分

所以 $(x_1^2-4)x_2^2+16x_1x_2+80-4x_1^2=0$,

同理可得 $(x_1^2-4)x_3^2+16x_1x_3+80-4x_1^2=0$. ………………………… 8 分

所以 x_2,x_3 是方程 $(x_1^2-4)x^2+16x_1x+80-4x_1^2=0$ 的两根，

所以 $x_2+x_3=-\frac{16x_1}{x_1^2-4}$，$x_2x_3=\frac{80-4x_1^2}{x_1^2-4}$. ………………………… 9 分

又因为直线 AB 的方程为 $(x_2+x_3)x-4y-x_2x_3=0$. ………………………… 10 分

所以圆 M 的圆心 $M(0,3)$ 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|x_2x_3+12|}{\sqrt{(x_2+x_3)^2+16}}=\frac{\left|\frac{80-4x_1^2}{x_1^2-4}+12\right|}{\sqrt{\left(-\frac{16x_1}{x_1^2-4}\right)^2+16}}=\frac{\left|\frac{8x_1^2+32}{x_1^2-4}\right|}{\left|\frac{4(x_1^2+4)}{x_1^2-4}\right|}=2$

$=r$，所以直线 AB 与圆 M 相切. ………………………… 12 分

22. 解：(1) 因为曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\cos\alpha,\\ y=-1+\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），

所以曲线 C_1 是以 $(1,-1)$ 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆.

所以曲线 C_1 的普通方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$. ………………………… 2 分

因为曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\rho\cos\theta-\rho\sin\theta=1$,

所以曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x-y-1=0$. ………………………… 5 分

(2) 因为点 $M(1,0)$ 在直线 C_2 上，所以直线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），

代入 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$，得 $t^2+\sqrt{2}t-1=0$. ………………………… 7 分

设 A,B 所对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=-\sqrt{2}$，$t_1t_2=-1<0$. ………………………… 8 分

所以 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=\frac{|MA|+|MB|}{|MA||MB|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1||t_2|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{2+4}}{1}=\sqrt{6}$.

即 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=\sqrt{6}$. ………………………… 10 分

23. 解：(1) 因为 $f(x)+f(5-x)\leqslant 5$，所以 $|x-4|+|x-1|\leqslant 5$.

当 $x<1$ 时，由 $4-x+1-x\leqslant 5$，得 $x\geqslant 0$，所以 $0\leqslant x<1$; ………………………… 1 分

当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，由 $4-x+x-1\leqslant 5$，得 $3\leqslant 5$，所以 $1\leqslant x\leqslant 4$; ………………………… 2 分

当 $x>4$ 时，由 $x-4+x-1\leqslant 5$，得 $x\leqslant 5$，所以 $4<x\leqslant 5$. ………………………… 3 分

综上所述，所求不等式的解集为 $[0,5]$. ………………………… 5 分

(2) 因为 $g(x)=f(x)-f(x+2)=|x-4|-|x-2|\leqslant|(x-4)-(x-2)|=2$,

所以 $g(x)_{max}=2$，即 $a+b=2$. ………………………… 7 分

因为 $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{4b+4}=\frac{1}{4}(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{4b+4})(a+1+b+1)$

$=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{4}+\frac{b+1}{a+1}+\frac{a+1}{4b+4})\geqslant\frac{1}{4}(1+\frac{1}{4}+2\sqrt{\frac{b+1}{a+1}\cdot\frac{a+1}{4b+4}})=\frac{1}{4}(\frac{5}{4}+1)=\frac{9}{16}$.

当且仅当 $\frac{b+1}{a+1}=\frac{a+1}{4b+4}$，即 $a=\frac{5}{3}$，$b=\frac{1}{3}$ 时等号成立.

所以 $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{4b+4}$ 的最小值为 $\frac{9}{16}$. ………………………… 10 分