# 中学生标准学术能力基础性测试 2020 年 2 月测试

## 数学试卷（B 版）

扫码查成绩

**本试卷共 150 分，考试时间 90 分钟。**

**一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1．已知集合 $A=\{1,2\}, B=\{1,3\}$，若全集 $U=A\cup B$，则 $\complement_U(A\cap B)=$

A．$\varnothing$　　B．$\{1\}$　　C．$\{2,3\}$　　D．$\{1,2,3\}$

2．已知幂函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(4,2)$，则 $f(2)=$

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$2\sqrt{2}$　　D．4

3．已知方程 $\lg x+\sqrt{x}=0$ 的根为 $x_0$，则下列说法正确的是

A．$x_0\in(0,1)$　　B．$x_0\in(1,10)$　　C．$x_0\in(10,100)$　　D．$x_0\in(100,+\infty)$

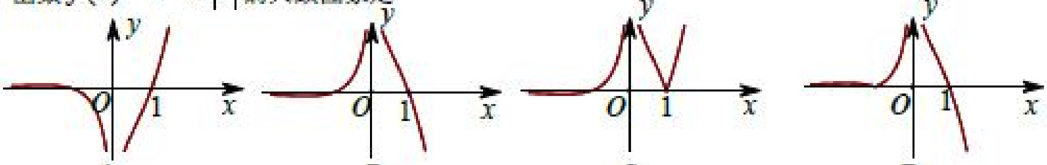
4．抛掷一枚质地均匀的骰子 2 次，则 2 次点数之和为 6 的概率为

A．$\dfrac{1}{11}$　　B．$\dfrac{1}{36}$　　C．$\dfrac{5}{36}$　　D．$\dfrac{1}{6}$

5．已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=x^2+c$（$c$ 为常数），则 $f(-1)=$

A．1　　B．2　　C．$-2$　　D．$-1$

6．函数 $f(x)=e^x\cdot\ln|x|$ 的大致图象是




A　　B　　C　　D

7．已知$a>0$，$b>0$，则“$1<\frac{a}{b}<2$”是“$a^2+a=3b^2+2b$”的

A．充分不必要条件　　　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

8．对于任意闭区间$I$，用$M_I$表示函数$f(x)=x|x-2|$在$I$上的最大值．已知实数$a>1$，若$M_{[a,2a]}=2M_{[0,a]}$，则$a$的值为

A．$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　B．$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

C．$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$或$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$　　　　D．前三个答案都不对

**二、填空题：本大题共6小题，多空题每小题9分，单空题每小题6分，共45分．**

9．已知函数$f(x)=\frac{\sqrt{2x-1}}{|x-2|}$，则$f(5)=$________；函数$f(x)$的定义域为________．

10．已知向量$\boldsymbol{a}=(1,3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,t)$，$t\in\mathbf{R}$．若向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线，则$t=$\_\_\_\_\_；若$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则$t=$_____．

11．已知实数$a,b$满足$a+b=5$，$\log_2 a=\log_3 b$，则$a=$________，$b=$________．

12．抛掷一枚骰子10次，若结果10次都为六点，则下列说法正确的序号是____________．

① 若这枚骰子质地均匀，则这是一个不可能事件；

② 若这枚骰子质地均匀，则这是一个小概率事件；

③ 这枚骰子质地一定不均匀．

13．已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$，对任意实数$x,y$满足：$f(x+y)=f(x)f(y)$．若$x\in(0,+\infty)$时，$0<f(x)<1$恒成立，则满足不等式$f(x^2-4)<1$的实数$x$的取值范围是__________．

14．设正数$x,y$满足$x^6+y^2+\frac{2x}{y}=4x^2$，则$x+2y=$________．

**三、解答题：本大题共 4 小题，共 57 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.**

15.（12 分）已知方程 $x^2+bx+c=0$ 的两个根是 $2,3$ .

（1）求实数 $b,c$ 的值；

（2）求不等式 $cx^2-bx+1\le 0$ 的解集.

16.（15 分）已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=kx+\log_9(9^x+1),(k\in\mathbf{R})$.

（1）若 $k=0$，求函数 $f\left(x\right)$ 的值域；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 是偶函数，求实数 $k$ 的值.



17.（15 分）已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足：$|\boldsymbol{a}|=2,|\boldsymbol{b}|=1$.

（1）若 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=1$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的值；

（2）设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\theta$．若存在 $t\in\mathbf{R}$，使得 $|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|=1$，求 $\cos\theta$ 的取值范围.

18.（15 分）已知函数 $f(x)=x^2+tx+1$（其中实数 $t>0$）.

（1）已知实数 $x_1,x_2\in[-1,1]$，且 $x_1<x_2$．若 $t=3$，试比较 $x_1f(x_1)+x_2f(x_2)$ 与 $x_1f(x_2)+x_2f(x_1)$ 的大小关系，并证明你的结论；

（2）记 $g(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)+(1-t)x}$，若存在非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$，使 $g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_n)=g(x_{n+1})\ (n\in\mathbf{N}^*)$ 成立，且 $n$ 的最大值为 $8$，求实数 $t$ 的取值范围.

THUSSAT 中学生标准学术能力测试

# 中学生标准学术能力基础性测试 2020 年 2 月测试

## 数学答案（B 版）

一．选择题：本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | A | A | C | D | A | B | B |

二、填空题：本大题共 6 小题，多空题每小题 6 分，单空题每小题 4 分，共 30 分．

9．1 ；$\left[\frac{1}{2},2\right)\cup(2,+\infty)$

10．$-3$；$\frac{1}{3}$

11．$a=2,b=3$

12．②

13．$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

14．3

三、解答题：共 38 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15.（本题满分 8 分）

解：（1）方程 $x^2+bx+c=0$ 的两个根是 2，3，

所以 $2+3=-b$，$2\times 3=c$，

$b=-5$，$c=6$；　　…………………………4 分

（2）由（1）知，不等式 $cx^2-bx+1\le 0$，即为 $6x^2+5x+1\le 0$，

所以 $(2x+1)(3x+1)\le 0$，

解得 $-\frac{1}{2}\le x\le -\frac{1}{3}$，

所以不等式的解集为 $\left\{x \middle| -\frac{1}{2}\le x\le -\frac{1}{3}\right\}$．　……………………8 分

16．（本题满分 10 分）

（1）当 $k=0$， $f(x)=\log_9(9^x+1)$，

因为 $9^x+1>1$，所以 $\log_9(9^x+1)>0$，

即函数 $f\left(x\right)$ 的值域为 $\left(0,+\infty\right)$ ； ……………………………4 分

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 是偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，

所以 $-kx+\log_9(9^{-x}+1)=kx+\log_9(9^x+1)$，

即 $-2kx=\log_9(9^x+1)-\log_9(9^{-x}+1)$，

即 $-2kx=\log_9(9^x+1)-\log_9\left(\dfrac{9^x+1}{9^x}\right)$，

即 $-2kx=\log_9 9^x$，

解得 $-2kx=x$ 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

所以 $k=-\dfrac{1}{2}$. ……………………………10 分

17．（本题满分 10 分）

（1）若 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\bullet(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=1$，则 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=1$

又因为 $|\boldsymbol{a}|=2$， $|\boldsymbol{b}|=1$，所以 $4+\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}-2=1$，

所以 $\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}=-1$； ………………………………………………4 分

（2）若 $|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|=1$，则 $\boldsymbol{a}^2+2t\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}+t^2\boldsymbol{b}^2=1$，

又因为 $|\boldsymbol{a}|=2$， $|\boldsymbol{b}|=1$，所以 $t^2+2(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})t+3=0$，

即 $t^2+4t\cos\theta+3=0$， ……………………………………7 分

所以 $\Delta=16\cos^2\theta-12\geq0$；

所以 $\cos\theta\geq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\cos\theta\leq-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\cos\theta\in\left[-1,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$. ……………………………………10 分

18.（本题满分 10 分）

（1）$x_1f(x_1)+x_2f(x_2)-x_1f(x_2)-x_2f(x_1)=(x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2))$，…………2 分

因为$t=3$时，$f(x)=x^2+3x+1$在$[-1,1]$上单调递增.

由$x_1,x_2\in[-1,1]$，且$x_1<x_2$，所以$f(x_1)<f(x_2)$，

所以$(x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2))>0$，

即$x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_1f(x_2)+x_2f(x_1)$.　　　　…………………………4 分

（2）因为存在非负实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$，使$g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_n)=g(x_{n+1})$，

且$n$的最大为$8$，所以

$$\begin{cases}9g(x)_{\min}>g(x)_{\max},\\8g(x)_{\min}\le g(x)_{\max},\end{cases}$$ …………………………6 分

下面求$g(x)=\dfrac{x^2+tx+1}{x^2+x+1}$，$x\in[0,+\infty)$的最值，

当$x=0$时，$g(0)=1$，

当$x>0$时，$g(x)=\dfrac{x^2+tx+1}{x^2+x+1}=1+\dfrac{(t-1)x}{x^2+x+1}=1+\dfrac{t-1}{x+\frac{1}{x}+1}$，

因为$x+\dfrac{1}{x}+1\ge 3$，所以$0<\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}+1}\le\dfrac{1}{3}$，

①当$t=1$时，$g(x)=1$，不合题意；

②当$0<t<1$时，$\dfrac{t-1}{3}\le\dfrac{t-1}{x+\frac{1}{x}+1}<0$，所以函数$g(x)$的值域为$\left[\dfrac{t+2}{3},1\right]$，可得

$$\begin{cases}3t+6>1,\\\dfrac{8t+16}{3}\le 1,\end{cases}$$

所以$-\dfrac{5}{3}<t\le-\dfrac{13}{8}$（不符，舍去）；　　　　………………………………8 分

③当$t>1$时，$0<\dfrac{t-1}{x+\frac{1}{x}+1}\le\dfrac{t-1}{3}$，函数$g(x)$的值域为$\left[1,\dfrac{t+2}{3}\right]$，可得

$$\begin{cases} 9 > \dfrac{t+2}{3}, \\ 8 \le \dfrac{t+2}{3}, \end{cases}$$

所以 $22 \le t < 25$；

综上所述，正实数 $t$ 的取值范围是 $\left[22, 25\right)$． ······································10 分