

2018年普通高等学校招生全国统一考试

数学（理）（北京卷）

本试卷共5页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

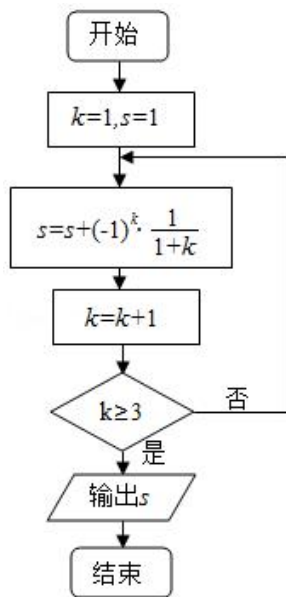
1. (5分) 已知集合  $A = \{x \mid |x| < 2\}$ ,  $B = \{-2, 0, 1, 2\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

- A.  $\{0, 1\}$       B.  $\{-1, 0, 1\}$       C.  $\{-2, 0, 1, 2\}$       D.  $\{-1, 0, 1, 2\}$

2. (5分) 在复平面内，复数  $\frac{1}{1-i}$  的共轭复数对应的点位于 ( )

- A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限

3. (5分) 执行如图所示的程序框图，输出的  $s$  值为 ( )

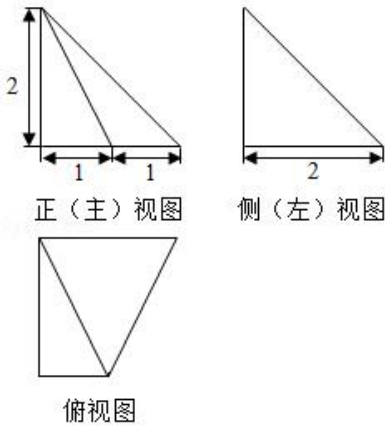


- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{5}{6}$       C.  $\frac{7}{6}$       D.  $\frac{7}{12}$

4. (5分) “十二平均律”是通用的音律体系，明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例，为这个理论的发展做出了重要贡献，十二平均律将一个纯八度音程分成十二份，依次得到十三个单音，从第二个单音起，每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于  $\sqrt[12]{2}$ 。若第一个单音的频率为  $f$ ，则第八个单音的频率为 ( )

- A.  $\sqrt[3]{2}f$       B.  $\sqrt[3]{2^2}f$       C.  $\sqrt[12]{2^5}f$       D.  $\sqrt[12]{2^7}f$

5. (5分) 某四棱锥的三视图如图所示, 在此四棱锥的侧面中, 直角三角形的个数为 ( )



- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

6. (5分) 设  $\vec{a}, \vec{b}$  均为单位向量, 则 “ $|\vec{a} - 3\vec{b}| = |3\vec{a} + \vec{b}|$ ” 是 “ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ” 的 ( )

- A. 充分而不必要条件      B. 必要而不充分条件  
C. 充分必要条件      D. 既不充分也不必要条件

7. (5分) 在平面直角坐标系中, 记  $d$  为点  $P(\cos \theta, \sin \theta)$  到直线  $x - my - 2 = 0$  的距离. 当  $\theta, m$  变化时,  $d$  的最大值为 ( )

- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

8. (5分) 设集合  $A = \{(x, y) \mid x - y \geq 1, ax + y > 4, x - ay \leq 2\}$ , 则 ( )

- A. 对任意实数  $a, (2, 1) \in A$   
B. 对任意实数  $a, (2, 1) \notin A$   
C. 当且仅当  $a < 0$  时,  $(2, 1) \notin A$   
D. 当且仅当  $a \leq \frac{3}{2}$  时,  $(2, 1) \notin A$

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

9. (5分) 设  $\{a_n\}$  是等差数列, 且  $a_1 = 3, a_2 + a_5 = 36$ , 则  $\{a_n\}$  的通项公式为\_\_\_\_\_.

10. (5分) 在极坐标系中, 直线  $\rho \cos \theta + \rho \sin \theta = a (a > 0)$  与圆  $\rho = 2 \cos \theta$  相切, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

11. (5分) 设函数  $f(x) = \cos(\omega x - \frac{\pi}{6}) (\omega > 0)$ , 若  $f(x) \leq f(\frac{\pi}{4})$  对任意的实数  $x$  都成立, 则  $\omega$  的最小值为\_\_\_\_\_.

12. (5分) 若  $x, y$  满足  $x+1 \leq y \leq 2x$ , 则  $2y-x$  的最小值是\_\_\_\_\_.
13. (5分) 能说明“若  $f(x) > f(0)$  对任意的  $x \in (0, 2]$  都成立, 则  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上是增函数”为假命题的一个函数是\_\_\_\_\_.
14. (5分) 已知椭圆  $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ , 双曲线  $N: \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ . 若双曲线  $N$  的两条渐近线与椭圆  $M$  的四个交点及椭圆  $M$  的两个焦点恰为一个正六边形的顶点, 则椭圆  $M$  的离心率为\_\_\_\_\_; 双曲线  $N$  的离心率为\_\_\_\_\_.

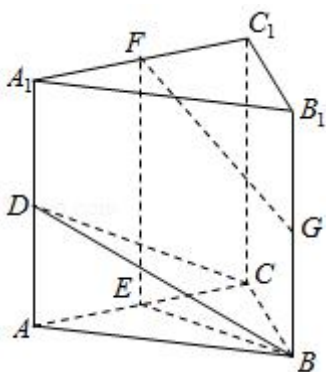
三、解答题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

15. (13分) 在  $\triangle ABC$  中,  $a=7, b=8, \cos B = -\frac{1}{7}$ .

- (I) 求  $\angle A$ ;
- (II) 求  $AC$  边上的高.

16. (14分) 如图, 在三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $CC_1 \perp$  平面  $ABC$ ,  $D, E, F, G$  分别为  $AA_1, AC, A_1C_1, BB_1$  的中点,  $AB = BC = \sqrt{5}, AC = AA_1 = 2$ .

- (I) 求证:  $AC \perp$  平面  $BEF$ ;
- (II) 求二面角  $B-CD-C_1$  的余弦值;
- (III) 证明: 直线  $FG$  与平面  $BCD$  相交.



17. (12分) 电影公司随机收集了电影的有关数据, 经分类整理得到下表:

电影类型	第一类	第二类	第三类	第四类	第五类	第六类
电影部数	140	50	300	200	800	510
好评率	0.4	0.2	0.15	0.25	0.2	0.1

好评率是指: 一类电影中获得好评的部数与该类电影的部数的比值.

假设所有电影是否获得好评相互独立.

- (I) 从电影公司收集的电影中随机选取 1 部, 求这部电影是获得好评的第四类电影的概率;
- (II) 从第四类电影和第五类电影中各随机选取 1 部, 估计恰有 1 部获得好评的概率;
- (III) 假设每类电影得到人们喜欢的概率与表格中该类电影的好评率相等. 用 “ $\xi_k=1$ ” 表示第  $k$  类电影得到人们喜欢. “ $\xi_k=0$ ” 表示第  $k$  类电影没有得到人们喜欢 ( $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ). 写出方差  $D\xi_1, D\xi_2, D\xi_3, D\xi_4, D\xi_5, D\xi_6$  的大小关系.

18. (13 分) 设函数  $f(x) = [ax^2 - (4a+1)x + 4a+3]e^x$ .

- (I) 若曲线  $y=f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线与  $x$  轴平行, 求  $a$ ;
- (II) 若  $f(x)$  在  $x=2$  处取得极小值, 求  $a$  的取值范围.

19. (14 分) 已知抛物线  $C: y^2=2px$  经过点  $P(1, 2)$ , 过点  $Q(0, 1)$  的直线  $l$  与抛物线  $C$  有两个不同的交点  $A, B$ , 且直线  $PA$  交  $y$  轴于  $M$ , 直线  $PB$  交  $y$  轴于  $N$ .

- (I) 求直线  $l$  的斜率的取值范围;
- (II) 设  $O$  为原点,  $\overrightarrow{QM} = \lambda \overrightarrow{QO}$ ,  $\overrightarrow{QN} = \mu \overrightarrow{QO}$ , 求证:  $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$  为定值.

20. (14 分) 设  $n$  为正整数, 集合  $A = \{\alpha \mid \alpha = (t_1, t_2, \dots, t_n), t_k \in \{0, 1\}, k=1, 2, \dots, n\}$ , 对于集合  $A$  中的任意元素  $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  和  $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , 记

$$M(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} [(x_1+y_1 - |x_1 - y_1|) + (x_2+y_2 - |x_2 - y_2|) + \dots + (x_n+y_n - |x_n - y_n|)]$$

- (I) 当  $n=3$  时, 若  $\alpha = (1, 1, 0)$ ,  $\beta = (0, 1, 1)$ , 求  $M(\alpha, \alpha)$  和  $M(\alpha, \beta)$  的值;
- (II) 当  $n=4$  时, 设  $B$  是  $A$  的子集, 且满足: 对于  $B$  中的任意元素  $\alpha, \beta$ , 当  $\alpha, \beta$  相同时,  $M(\alpha, \beta)$  是奇数; 当  $\alpha, \beta$  不同时,  $M(\alpha, \beta)$  是偶数. 求集合  $B$  中元素个数的最大值;
- (III) 给定不小于 2 的  $n$ , 设  $B$  是  $A$  的子集, 且满足: 对于  $B$  中的任意两个不同的元素  $\alpha, \beta$ ,  $M(\alpha, \beta) = 0$ , 写出一个集合  $B$ , 使其元素个数最多, 并说明理由.

## 数学试题答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 【分析】根据集合的基本运算进行计算即可.

【解答】解:  $A = \{x \mid |x| < 2\} = \{x \mid -2 < x < 2\}$ ,  $B = \{-2, 0, 1, 2\}$ ,

则  $A \cap B = \{0, 1\}$ ,

故选: A.

【点评】本题主要考查集合的基本运算, 根据集合交集的定义是解决本题的关键. 比较基础.

2. 【分析】利用复数的除法运算法则, 化简求解即可.

【解答】解: 复数  $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ,

共轭复数对应点的坐标  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  在第四象限.

故选: D.

【点评】本题考查复数的代数形式的乘除运算, 复数的几何意义, 是基本知识的考查.

3. 【分析】直接利用程序框图的应用求出结果.

【解答】解: 执行循环前:  $k=1, S=1$ .

在执行第一次循环时,  $S=1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

由于  $k=2 \leq 3$ ,

所以执行下一次循环.  $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ ,

$k=3$ , 直接输出  $S = \frac{5}{6}$ ,

故选: B.

【点评】本题考查的知识要点: 程序框图和循环结构的应用.

4. 【分析】利用等比数列的通项公式, 转化求解即可.

【解答】解: 从第二个单音起, 每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于  $\sqrt[3]{2}$ .

若第一个单音的频率为  $f$ ，则第八个单音的频率为： $(\sqrt[12]{2})^7 \cdot f = \sqrt[12]{2^7} f$ .

故选：D.

【点评】 本题考查等比数列的通项公式的求法，考查计算能力.

5. 【分析】 画出三视图的直观图，判断各个面的三角形的情况，即可推出结果.

【解答】 解：四棱锥的三视图对应的直观图为： $PA \perp$  底面  $ABCD$ ,

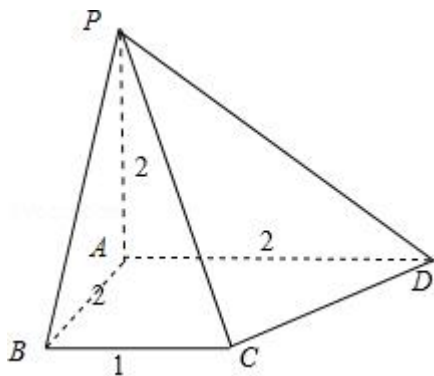
$$AC = \sqrt{5}, CD = \sqrt{5},$$

$PC = 3, PD = 2\sqrt{2}$ , 可得三角形  $PCD$  不是直角三角形.

所以侧面中有 3 个直角三角形，分别为： $\triangle PAB, \triangle PBC,$

$\triangle PAD$ .

故选：C.



【点评】 本题考查简单几何体的三视图的应用，是基本知识的考查.

6. 【分析】 根据向量数量积的应用，结合充分条件和必要条件的对应进行判断即可.

【解答】 解： $\because$  “ $|\vec{a} - 3\vec{b}| = |3\vec{a} + \vec{b}|$ ”

$$\therefore \text{平方得 } |\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} = 9|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b},$$

$$\text{即 } 1 + 9 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} = 9 + 1 + 6\vec{a} \cdot \vec{b},$$

$$\text{即 } 12\vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$$

$$\text{则 } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \text{ 即 } \vec{a} \perp \vec{b},$$

则 “ $|\vec{a} - 3\vec{b}| = |3\vec{a} + \vec{b}|$ ” 是 “ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ” 的充要条件，

故选：C.

【点评】 本题主要考查充分条件和必要条件的判断，结合向量数量积的公式进行转化是解决本题的关键。

7. 【分析】 由题意  $d = \frac{|\cos \theta - m \sin \theta - 2|}{\sqrt{1^2 + m^2}} = \frac{|\sqrt{m^2 + 1} \sin(\theta + \alpha) - 2|}{\sqrt{m^2 + 1}}$ ，当  $\sin(\theta + \alpha) = -1$  时， $d_{\max} =$

$$1 + \frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}} \leq 3. \text{ 由此能求出 } d \text{ 的最大值.}$$

【解答】 解：由题意  $d = \frac{|\cos \theta - m \sin \theta - 2|}{\sqrt{1^2 + m^2}} = \frac{|\sqrt{m^2 + 1} \sin(\theta + \alpha) - 2|}{\sqrt{m^2 + 1}}$ ，

$$\tan \alpha = \frac{1}{m} = \frac{y}{x},$$

∴ 当  $\sin(\theta + \alpha) = -1$  时，

$$d_{\max} = 1 + \frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}} \leq 3.$$

∴  $d$  的最大值为 3.

故选：C.

【点评】 本题考查点到直线的距离的最大值的求法，考查点到直线的距离公式、三角函数性质等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是中档题。

8. 【分析】 利用  $a$  的取值，反例判断  $(2, 1) \in A$  是否成立即可。

【解答】 解：当  $a = -1$  时，集合  $A = \{(x, y) \mid x - y \geq 1, ax + y > 4, x - ay \leq 2\} = \{(x, y) \mid x - y \geq 1, -x + y > 4, x + y \leq 2\}$ ，显然  $(2, 1)$  不满足， $-x + y > 4, x + y \leq 2$ ，所以  $A$  不正确；

当  $a = 4$ ，集合  $A = \{(x, y) \mid x - y \geq 1, ax + y > 4, x - ay \leq 2\} = \{(x, y) \mid x - y \geq 1, 4x + y > 4, x - 4y \leq 2\}$ ，显然  $(2, 1)$  在可行域内，满足不等式，所以  $B$  不正确；

当  $a = 1$ ，集合  $A = \{(x, y) \mid x - y \geq 1, ax + y > 4, x - ay \leq 2\} = \{(x, y) \mid x - y \geq 1, x + y > 4, x - y \leq 2\}$ ，显然  $(2, 1) \notin A$ ，所以当且仅当  $a < 0$  错误，所以  $C$  不正确；

故选：D.

【点评】 本题考查线性规划的解答应用，利用特殊点以及特殊值转化求解，避免可行域的画法，简洁明了。

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 【分析】 利用等差数列通项公式列出方程组，求出  $a_1 = 3, d = 6$ ，由此能求出  $\{a_n\}$  的通项公式。

【解答】 解：∵  $\{a_n\}$  是等差数列，且  $a_1 = 3, a_2 + a_5 = 36$ ，

$$\therefore \begin{cases} a_1=3 \\ a_1+d+a_1+4d=36 \end{cases},$$

解得  $a_1=3$ ,  $d=6$ ,

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + (n-1) \times 6 = 6n - 3.$$

$\therefore \{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 6n - 3$ .

故答案为:  $a_n = 6n - 3$ .

**【点评】** 本题考查等差数列的通项公式的求法, 考查等差数列的性质等基础知识, 考查运算求解能力, 考查函数与方程思想, 是基础题.

10. **【分析】** 首先把曲线和直线的极坐标方程转化成直角坐标方程, 进一步利用圆心到直线的距离等于半径求出结果.

**【解答】** 解: 圆  $\rho = 2\cos \theta$ ,

转化成:  $\rho^2 = 2\rho \cos \theta$ ,

进一步转化成直角坐标方程为:  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ,

把直线  $\rho(\cos \theta + \sin \theta) = a$  的方程转化成直角坐标方程为:  $x+y - a = 0$ .

由于直线和圆相切,

所以: 利用圆心到直线的距离等于半径.

$$\text{则: } \frac{|1-a|}{\sqrt{2}} = 1,$$

$$\text{解得: } a = 1 \pm \sqrt{2}. \quad a > 0$$

则负值舍去.

$$\text{故: } a = 1 + \sqrt{2}.$$

故答案为:  $1 + \sqrt{2}$ .

**【点评】** 本题考查的知识要点: 极坐标方程与直角坐标方程的互化, 直线与圆相切的充要条件的应用.

11. **【分析】** 利用已知条件推出函数的最大值, 然后列出关系式求解即可.

**【解答】** 解: 函数  $f(x) = \cos(\omega x - \frac{\pi}{6})$  ( $\omega > 0$ ), 若  $f(x) \leq f(\frac{\pi}{4})$  对任意的实数  $x$  都成立,



可得： $\omega \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , 解得  $\omega = 8k + \frac{2}{3}, k \in \mathbb{Z}, \omega > 0$

则  $\omega$  的最小值为： $\frac{2}{3}$ .

故答案为： $\frac{2}{3}$ .

**【点评】** 本题考查三角函数的最值的求法与应用，考查转化思想以及计算能力.

12. **【分析】** 作出不等式组对应的平面区域，利用目标函数的几何意义进行求解即可.

**【解答】** 解：作出不等式组对应的平面区域如图：

设  $z = 2y - x$ , 则  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$ ,

平移  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$ ,

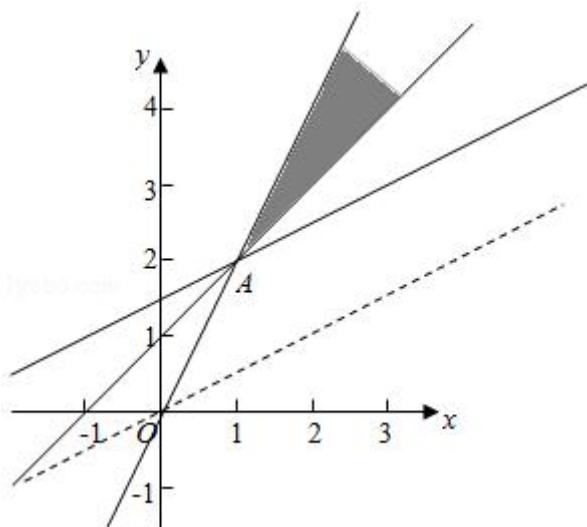
由图象知当直线  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$  经过点  $A$  时,

直线的截距最小，此时  $z$  最小，

由  $\begin{cases} x+1=y \\ y=2x \end{cases}$  得  $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ , 即  $A(1, 2)$ ,

此时  $z = 2 \times 2 - 1 = 3$ ,

故答案为：3



**【点评】** 本题主要考查线性规划的应用，利用目标函数的几何意义以及数形结合是解决本题的关键.

13. **【分析】** 本题答案不唯一，符合要求即可.

【解答】解：例如  $f(x) = \sin x$ ,

尽管  $f(x) > f(0)$  对任意的  $x \in (0, 2]$  都成立,

当  $x \in [0, \frac{\pi}{2})$  上为增函数, 在  $(\frac{\pi}{2}, 2]$  为减函数,

故答案为:  $f(x) = \sin x$ .

【点评】本题考查了函数的单调性, 属于基础题.

14. 【分析】利用已知条件求出正六边形的顶点坐标, 代入椭圆方程, 求出椭圆的离心率; 利用渐近线的夹角求解双曲线的离心率即可.

【解答】解: 椭圆  $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ , 双曲线  $N: \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ . 若双曲线  $N$  的两条渐近线与椭圆  $M$  的

四个交点及椭圆  $M$  的两个焦点恰为一个正六边形的顶点,

可得椭圆的焦点坐标  $(c, 0)$ , 正六边形的一个顶点  $(\frac{c}{2}, \frac{\sqrt{3}c}{2})$ , 可得:  $\frac{c^2}{4a^2} + \frac{3c^2}{4b^2} = 1$ , 可得

$$\frac{1}{4}e^2 + \frac{3}{4(\frac{1}{e^2}-1)} = 1, \text{ 可得 } e^4 - 8e^2 + 4 = 0, e \in (0, 1),$$

解得  $e = \sqrt{3} - 1$ .

同时, 双曲线的渐近线的斜率为  $\sqrt{3}$ , 即  $\frac{n}{m} = \sqrt{3}$ ,

可得:  $\frac{n^2}{m^2} = 3$ , 即  $\frac{m^2 + n^2}{m^2} = 4$ ,

可得双曲线的离心率为  $e = \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{m^2}} = 2$ .

故答案为:  $\sqrt{3} - 1; 2$ .

【点评】本题考查椭圆以及双曲线的简单性质的应用, 考查计算能力.

三、解答题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

15. 【分析】(I) 由正弦定理结合大边对大角进行求解即可.

(II) 利用余弦定理求出  $c$  的值, 结合三角函数的高与斜边的关系进行求解即可.

【解答】解: (I)  $\because a < b, \therefore A < B$ , 即  $A$  是锐角,

$$\because \cos B = -\frac{1}{7}, \therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7},$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ 得 } \sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{7 \times \frac{4\sqrt{3}}{7}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{则 } A = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{(II) 由余弦定理得 } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$\text{即 } 64 = 49 + c^2 + 2 \times 7 \times c \times \frac{1}{7},$$

$$\text{即 } c^2 + 2c - 15 = 0,$$

$$\text{得 } (c-3)(c+5) = 0,$$

$$\text{得 } c=3 \text{ 或 } c=-5 \text{ (舍)},$$

$$\text{则 } AC \text{ 边上的高 } h = c \sin A = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

**【点评】** 本题主要考查解三角形的应用，利用正弦定理以及余弦定理建立方程关系是解决本题的关键。

16. **【分析】** (I) 证明  $AC \perp BE$ ,  $AC \perp EF$  即可得出  $AC \perp$  平面  $BEF$ ;

(II) 建立坐标系，求出平面  $BCD$  的法向量  $\vec{n}$ ，通过计算  $\vec{n}$  与  $\vec{EB}$  的夹角得出二面角的大小；

(III) 计算  $\vec{FG}$  与  $\vec{n}$  的数量积即可得出结论。

**【解答】** (I) 证明： $\because E, F$  分别是  $AC, A_1C_1$  的中点， $\therefore EF \parallel CC_1$ ,

$$\because CC_1 \perp \text{平面 } ABC, \therefore EF \perp \text{平面 } ABC,$$

$$\text{又 } AC \subset \text{平面 } ABC, \therefore EF \perp AC,$$

$$\because AB=BC, E \text{ 是 } AC \text{ 的中点},$$

$$\therefore BE \perp AC,$$

$$\text{又 } BE \cap EF = E, BE \subset \text{平面 } BEF, EF \subset \text{平面 } BEF,$$

$$\therefore AC \perp \text{平面 } BEF.$$

(II) 解：以  $E$  为原点，以  $EB, EC, EF$  为坐标轴建立空间直角坐标系如图所示：

$$\text{则 } B(2, 0, 0), C(0, 1, 0), D(0, -1, 1),$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = (-2, 1, 0), \overrightarrow{CD} = (0, -2, 1),$$

$$\text{设平面 } BCD \text{ 的法向量为 } \vec{n} = (x, y, z), \text{ 则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -2x + y = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases}$$

令  $y=2$  可得  $\vec{n} = (1, 2, 4)$ , 又  $EB \perp$  平面  $ACC_1A_1$ ,

$\therefore \overrightarrow{EB} = (2, 0, 0)$  为平面  $CD-C_1$  的一个法向量,

$$\therefore \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{EB} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{EB}}{|\vec{n}| |\overrightarrow{EB}|} = \frac{2}{\sqrt{21} \times 2} = \frac{\sqrt{21}}{21}.$$

由图形可知二面角  $B-CD-C_1$  为钝二面角,

$\therefore$  二面角  $B-CD-C_1$  的余弦值为  $-\frac{\sqrt{21}}{21}$ .

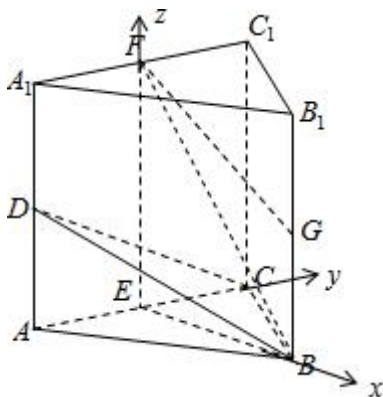
(III) 证明:  $F(0, 0, 2), \vec{G}(2, 0, 1), \therefore \overrightarrow{FG} = (2, 0, -1),$

$$\therefore \overrightarrow{FG} \cdot \vec{n} = 2 + 0 - 4 = -2 \neq 0,$$

$\therefore \overrightarrow{FG}$  与  $\vec{n}$  不垂直,

$\therefore FG$  与平面  $BCD$  不平行, 又  $FG \not\subset$  平面  $BCD$ ,

$\therefore FG$  与平面  $BCD$  相交.



**【点评】** 本题考查了线面垂直的判定, 二面角的计算与空间向量的应用, 属于中档题.

17. **【分析】** (I) 先求出总数, 再求出第四类电影中获得好评的电影的部数, 利用古典概型概率计算公式直接求解.

(II) 设事件  $B$  表示“从第四类电影和第五类电影中各随机选取 1 部, 恰有 1 部获得好评”, 第四类获得好评的有 50 部, 第五类获得好评的有 160 部, 由此能求出从第四类电影和第五类电影中各随机选取 1 部, 估计恰有 1 部获得好评的概率.

(III) 由题意知, 定义随机变量如下:  $\xi_k = \begin{cases} 0, & \text{第}k\text{类电影没有得到人们喜欢} \\ 1, & \text{第}k\text{类电影得到人们喜欢} \end{cases}$ , 则  $\xi_k$  服从两点分布, 分别求

出六类电影的分布列及方差由此能写出方差  $D\xi_1, D\xi_2, D\xi_3, D\xi_4, D\xi_5, D\xi_6$  的大小关系.

**【解答】**解: (I) 设事件  $A$  表示“从电影公司收集的电影中随机选取 1 部, 求这部电影是获得好评的第四类电影”,

总的电影部数为  $140+50+300+200+800+510=2000$  部,

第四类电影中获得好评的电影有:  $200 \times 0.25 = 50$  部,

$\therefore$  从电影公司收集的电影中随机选取 1 部, 求这部电影是获得好评的第四类电影的频率为:

$$P(A) = \frac{50}{2000} = 0.025.$$

(II) 设事件  $B$  表示“从第四类电影和第五类电影中各随机选取 1 部, 恰有 1 部获得好评”,

第四类获得好评的有:  $200 \times 0.25 = 50$  部,

第五类获得好评的有:  $800 \times 0.2 = 160$  部,

则从第四类电影和第五类电影中各随机选取 1 部, 估计恰有 1 部获得好评的概率:

$$P(B) = \frac{50 \times (800 - 160) + (200 - 50) \times 160}{200 \times 800} = 0.35.$$

(III) 由题意知, 定义随机变量如下:

$$\xi_k = \begin{cases} 0, & \text{第}k\text{类电影没有得到人们喜欢} \\ 1, & \text{第}k\text{类电影得到人们喜欢} \end{cases}$$

则  $\xi_k$  服从两点分布, 则六类电影的分布列及方差计算如下:

第一类电影:

$\xi_1$	1	0
$P$	0.4	0.6

$$E(\xi_1) = 1 \times 0.4 + 0 \times 0.6 = 0.4,$$

$$D(\xi_1) = (1 - 0.4)^2 \times 0.4 + (0 - 0.4)^2 \times 0.6 = 0.24.$$

第二类电影:

$\xi_2$	1	0
---------	---	---

$P$	0.2	0.8
-----	-----	-----

$$E(\xi_2) = 1 \times 0.2 + 0 \times 0.8 = 0.2,$$

$$D(\xi_2) = (1 - 0.2)^2 \times 0.2 + (0 - 0.2)^2 \times 0.8 = 0.16.$$

第三类电影:

$\xi_3$	1	0
$P$	0.15	0.85

$$E(\xi_3) = 1 \times 0.15 + 0 \times 0.85 = 0.15,$$

$$D(\xi_3) = (1 - 0.15)^2 \times 0.15 + (0 - 0.15)^2 \times 0.85 = 0.1275.$$

第四类电影:

$\xi_4$	1	0
$P$	0.25	0.75

$$E(\xi_4) = 1 \times 0.25 + 0 \times 0.75 = 0.25,$$

$$D(\xi_4) = (1 - 0.25)^2 \times 0.25 + (0 - 0.25)^2 \times 0.75 = 0.1875.$$

第五类电影:

$\xi_5$	1	0
$P$	0.2	0.8

$$E(\xi_5) = 1 \times 0.2 + 0 \times 0.8 = 0.2,$$

$$D(\xi_5) = (1 - 0.2)^2 \times 0.2 + (0 - 0.2)^2 \times 0.8 = 0.16.$$

第六类电影:

$\xi_6$	1	0
$P$	0.1	0.9

$$E(\xi_6) = 1 \times 0.1 + 0 \times 0.9 = 0.1,$$

$$D(\xi_6) = (1 - 0.1)^2 \times 0.1 + (0 - 0.1)^2 \times 0.9 = 0.09.$$

∴方差  $D\xi_1, D\xi_2, D\xi_3, D\xi_4, D\xi_5, D\xi_6$  的大小关系为:

$$D\xi_6 < D\xi_3 < D\xi_2 = D\xi_5 < D\xi_4 < D\xi_1.$$

**【点评】** 本题考查概率的求法，考查离散型随机变量的方差的求法，考查古典概型、两点分布等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是中档题。

18. **【分析】** (I) 求得  $f(x)$  的导数，由导数的几何意义可得  $f'(1) = 0$ ，解方程可得  $a$  的值；

(II) 求得  $f(x)$  的导数，注意分解因式，讨论  $a=0$ ， $a=\frac{1}{2}$ ， $a>\frac{1}{2}$ ， $0<a<\frac{1}{2}$ ， $a<0$ ，由极小值的定义，即可得到所求  $a$  的范围。

**【解答】** 解：(I) 函数  $f(x) = [ax^2 - (4a+1)x + 4a+3]e^x$  的导数为

$$f'(x) = [ax^2 - (2a+1)x + 2]e^x.$$

由题意可得曲线  $y=f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线斜率为 0，

$$\text{可得 } (a - 2a - 1 + 2)e = 0, \text{ 且 } f(1) = 3e \neq 0,$$

解得  $a=1$ ；

$$(II) f(x) \text{ 的导数为 } f'(x) = [ax^2 - (2a+1)x + 2]e^x = (x-2)(ax-1)e^x,$$

若  $a=0$  则  $x<2$  时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$  递增； $x>2$ ， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$  递减。

$x=2$  处  $f(x)$  取得极大值，不符题意；

若  $a>0$ ，且  $a=\frac{1}{2}$ ，则  $f'(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2e^x \geq 0$ ， $f(x)$  递增，无极值；

若  $a>\frac{1}{2}$ ，则  $\frac{1}{a}<2$ ， $f(x)$  在  $(\frac{1}{a}, 2)$  递减；在  $(2, +\infty)$ ， $(-\infty, \frac{1}{a})$  递增，

可得  $f(x)$  在  $x=2$  处取得极小值；

若  $0<a<\frac{1}{2}$ ，则  $\frac{1}{a}>2$ ， $f(x)$  在  $(2, \frac{1}{a})$  递减；在  $(\frac{1}{a}, +\infty)$ ， $(-\infty, 2)$  递增，

可得  $f(x)$  在  $x=2$  处取得极大值，不符题意；

若  $a<0$ ，则  $\frac{1}{a}<2$ ， $f(x)$  在  $(\frac{1}{a}, 2)$  递增；在  $(2, +\infty)$ ， $(-\infty, \frac{1}{a})$  递减，

可得  $f(x)$  在  $x=2$  处取得极大值，不符题意。

综上所述， $a$  的范围是  $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 。

**【点评】** 本题考查导数的运用：求切线的斜率和极值，考查分类讨论思想方法，以及运算能力，属于中档题。

19. 【分析】(I) 将  $P$  代入抛物线方程, 即可求得  $p$  的值, 设直线  $AB$  的方程, 代入椭圆方程, 由  $\Delta > 0$ , 即可求得  $k$  的取值范围;

(II) 根据向量的共线定理即可求得  $\lambda = 1 - y_M$ ,  $\mu = 1 - y_N$ , 求得直线  $PA$  的方程, 令  $x=0$ , 求得  $M$  点坐标, 同理求得  $N$  点坐标, 根据韦达定理即可求得  $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$  为定值.

【解答】解: (I)  $\because$  抛物线  $C: y^2 = 2px$  经过点

$P(1, 2)$ ,  $\therefore 4 = 2p$ , 解得  $p=2$ ,

设过点  $(0, 1)$  的直线方程为  $y=kx+1$ ,

设  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$

$$\text{联立方程组可得} \begin{cases} y^2 = 4x \\ y = kx + 1 \end{cases}$$

消  $y$  可得  $k^2x^2 + (2k-4)x + 1 = 0$ ,

$\therefore \Delta = (2k-4)^2 - 4k^2 > 0$ , 且  $k \neq 0$  解得  $k < 1$ ,

且  $k \neq 0$ ,  $x_1 + x_2 = -\frac{2k-4}{k^2}$ ,  $x_1x_2 = \frac{1}{k^2}$ ,

又  $\because PA, PB$  要与  $y$  轴相交,  $\therefore$  直线  $l$  不能经过点  $(1, -2)$ , 即  $k \neq -3$ ,

故直线  $l$  的斜率的取值范围  $(-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, 1)$ ;

(II) 证明: 设点  $M(0, y_M)$ ,  $N(0, y_N)$ ,

则  $\overrightarrow{QM} = (0, y_M - 1)$ ,  $\overrightarrow{QO} = (0, -1)$

因为  $\overrightarrow{QM} = \lambda \overrightarrow{QO}$ , 所以  $y_M - 1 = -y_M - 1$ , 故  $\lambda = 1 - y_M$ , 同理  $\mu = 1 - y_N$ ,

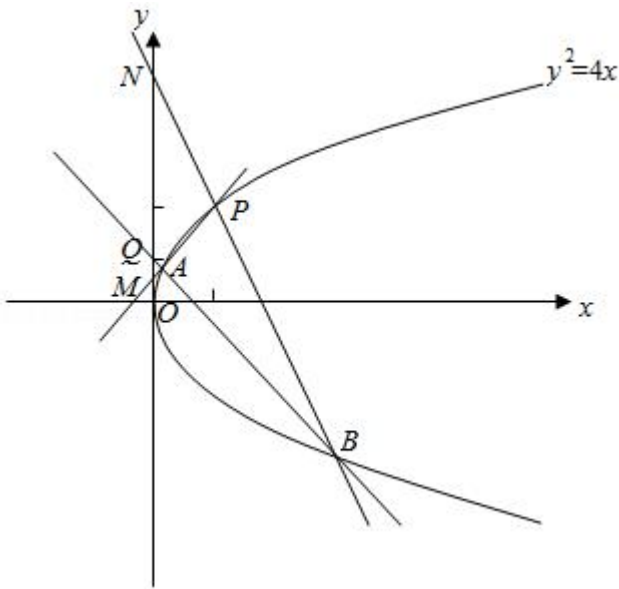
$$\text{直线 } PA \text{ 的方程为 } y - 2 = \frac{2 - y_1}{1 - x_1} (x - 1) = \frac{2 - y_1}{\frac{y_1^2}{4}} (x - 1) = \frac{4}{2 + y_1} (x - 1),$$

令  $x=0$ , 得  $y_M = \frac{2y_1}{2+y_1}$ , 同理可得  $y_N = \frac{2y_2}{2+y_2}$ ,



$$\begin{aligned} \text{因为 } \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} &= \frac{1}{1-y_M} + \frac{1}{1-y_N} = \frac{2+y_1}{2-y_1} + \frac{2+y_2}{2-y_2} = \frac{8-2y_1y_2}{(2-y_1)(2-y_2)} = \frac{8-2(kx_1+1)(kx_2+1)}{1-k(x_1+x_2)+k^2x_1x_2} \\ &= \frac{8-[k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1]}{1-k(x_1+x_2)+k^2x_1x_2} = \frac{8-2(1+\frac{4-2k}{k}+1)}{1-\frac{4-2k}{k}+1} = \frac{4-2 \times \frac{4-2k}{k}}{2-\frac{4-2k}{k}} = 2, \end{aligned}$$

$\therefore \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 2$ ,  $\therefore \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$  为定值.



**【点评】** 本题考查抛物线的方程，直线与抛物线的位置关系，考查韦达定理的应用，考查转化思想，计算能力，属于中档题.

20. **【分析】** (I) 直接根据定义计算.

(II) 注意到 1 的个数的奇偶性，根据定义反证证明.

(III) 根据抽屉原理即可得证.

**【解答】** 解：(I)  $M(a, a) = 1+1+0=2$ ,  $M(a, \beta) = 0+1+0=1$ .

(II) 考虑数对  $(x_k, y_k)$  只有四种情况：(0, 0)、(0, 1)、(1, 0)、(1, 1)，相应的

$$\frac{x_k + y_k - |x_k - y_k|}{2} \text{ 分别为 } 0, 0, 0, 1,$$

所以 B 中的每个元素应有奇数个 1,

所以 B 中的元素只可能为 (上下对应的两个元素称之为互补元素) :

(1, 0, 0, 0)、(0, 1, 0, 0)、(0, 0, 1, 0)、(0, 0, 0, 1),

(0, 1, 1, 1)、(1, 0, 1, 1)、(1, 1, 0, 1)、(1, 1, 1, 0),

对于任意两个只有 1 个 1 的元素  $\alpha$ ,  $\beta$  都满足  $M(\alpha, \beta)$  是偶数,

所以四元集合  $B = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$  满足 题意,

假设  $B$  中元素个数大于等于 4, 就至少有一对互补元素,

除了这对互补元素之外还有至少 1 个含有 3 个 1 的元素  $\alpha$ ,

则互补元素中含有 1 个 1 的元素  $\beta$  与之满足  $M(\alpha, \beta) = 1$  不合题意,

故  $B$  中元素个数的最大值为 4.

(III)  $B = \{(0, 0, 0, \dots, 0), (1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), (0, 0, 1, \dots, 0), \dots,$   
 $(0, 0, 0, \dots, 1)\},$

此时  $B$  中有  $n+1$  个元素, 下证其为最大.

对于任意两个不同的元素  $\alpha, \beta$ , 满足  $M(\alpha, \beta) = 0$ , 则  $\alpha, \beta$  中相同位置上的数字不能同时为 1,

假设存在  $B$  有多于  $n+1$  个元素, 由于  $\alpha = (0, 0, 0, \dots, 0)$  与任意元素  $\beta$  都有  $M(\alpha, \beta) = 0$ ,

所以除  $(0, 0, 0, \dots, 0)$  外至少有  $n+1$  个元素含有 1,

根据元素的互异性, 至少存在一对  $\alpha, \beta$  满足  $x_i = y_i = 1$ , 此时  $M(\alpha, \beta) \geq 1$  不满足题意,

故  $B$  中最多有  $n+1$  个元素.

**【点评】** 本题主要考查集合的含义与表示、集合的运算以及集合之间的关系. 综合性较强, 难度较大.