高 三 数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $z(\mathrm{i}-\mathrm{i}^2)=1$，则 $\bar{z}-z=$

A. i　　B. $-\mathrm{i}$　　C. 1　　D. -1

2. 已知全集 $U=\{x|x^2-4x-12<0\}$，若集合 M 满足 $\complement_U M=\{x|-1<x<2\}$，则

A. $2\notin M$　　B. $6\in M$

C. $M\subseteq\{x|2\leqslant x<6\}$　　D. $\{x|-2<x\leqslant -1\}\subseteq M$

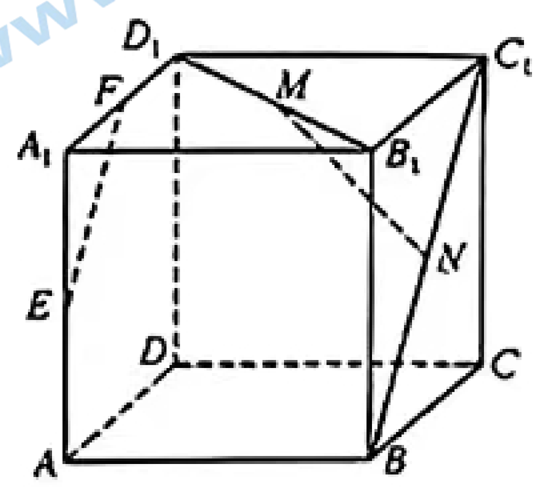
3. 已知 $\boldsymbol{a}=(4,-5)$，$\boldsymbol{b}=(m,1)$，$\boldsymbol{c}=(2,3)$，若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，则 $m=$

A. 3　　B. 2　　C. [illegible]　　D. 0

4. 某校高三年级 1 000 名学生参加了市教体局组织的高考模拟考试，其中数学考试成绩 $X\sim N(100,\sigma^2)$（$\sigma>0$，试卷满分为 150 分），且数学成绩在 80 分到 120 分之间的人数约为总人数的 $\frac{3}{4}$，则此次考试中数学成绩不低于 120 分的学生人数约为

A. 300　　B. 250　　C. 125　　D. 100

5. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F,M,N 分别为 AA_1，A_1D_1，B_1D_1，BC_1 的中点，则异面直线 EF 与 MN 所成的角为



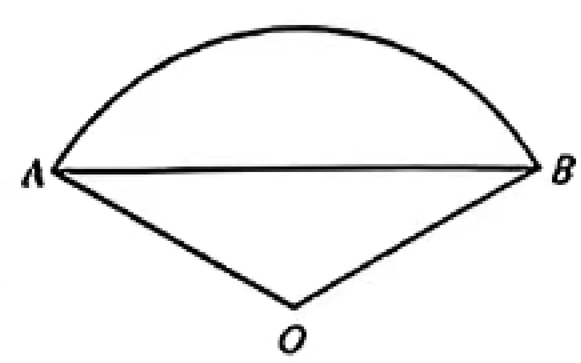
A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 90°

6.《梦溪笔谈》是我国科技史上的杰作，其中收录了扇形弧长的近似计算公式：$l_{\overset{\frown}{AB}}=\text{弦}+\dfrac{2\times\text{矢}^2}{\text{径}}$。如图，公式中"弦"是指扇形中 $\overset{\frown}{AB}$ 所对弦 AB 的长，"矢"是指 $\overset{\frown}{AB}$ 所在圆 O 的半径与圆心 O 到弦的距离之差，"径"是指扇形所在圆 O 的直径。若扇形的面积为 $\frac{16\pi}{3}$，扇形的半径为 4，利用上面公式，求得该扇形的弧长的近似值为



A. $\sqrt{3}+1$　　B. $2\sqrt{3}+1$　　C. $3\sqrt{3}+1$　　D. $4\sqrt{3}+1$

7. 设 T_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项积，若 $a_n=-2a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，且 $a_3+a_5=-20$，当 T_n 取得最小值时，$n=$

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

8. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$，对 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)=f(2-x)$，$f(2+x)+f(2-x)=0$. 设 $g(x)=(x-1)f(x)$，若 $g(5)=4$，则 $g(2\,022)+g(2\,023)=$

A. $-2\,020$　　B. $-2\,022$　　C. $-2\,024$　　D. $-2\,026$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 若 $a<b<0$，则

A. $a^2<b^2$　　B. $ab>b^2$　　C. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$　　D. $\frac{a+1}{a}>\frac{b+1}{b}$

10. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$，则

A. 4π 为 $f(x)$的一个周期

B. $f(x)$在区间$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$上单调递增

C. 直线 $x=-\frac{7\pi}{6}$是 $f(x)$的图象的一条对称轴

D. 将 $f(x)$的图象向右平移$\frac{2\pi}{3}$个单位长度，所得到的函数图象关于原点对称

11. 已知 F_1，F_2 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，以 F_2 为圆心，4 为半径的圆与 C 的一条渐近线切于点 P，过 F_1 的直线 l 与 C 交于 A，B 两个不同的点，若 C 的离心率 $e=\frac{5}{3}$，则

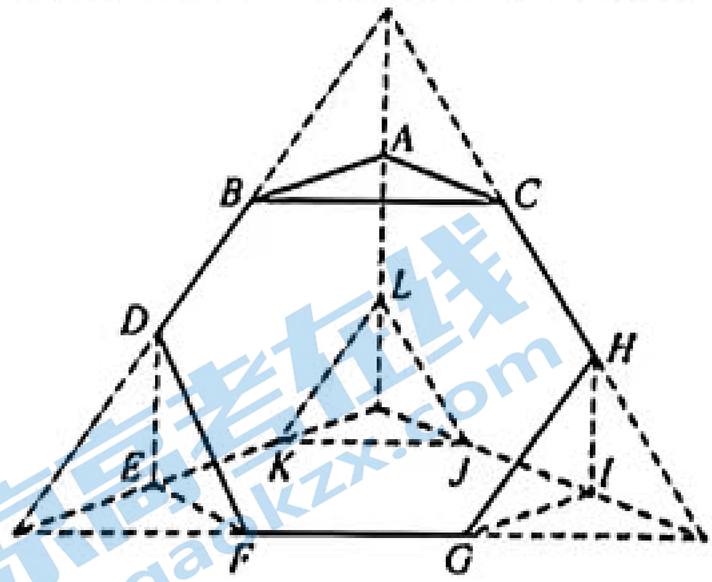
A. $|PF_1|=2\sqrt{13}$

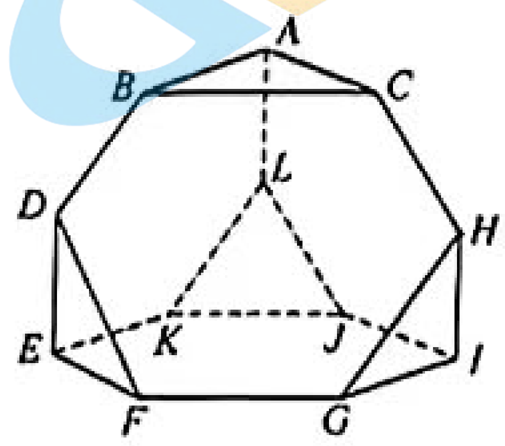
B. $|AB|$的最小值为$\frac{32}{3}$

C. 若$|AF_2|=7$，则$|AF_1|=13$

D. 若 A，B 同在 C 的左支上，则直线 l 的斜率 $k\in\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$

12. 截角四面体是由四面体经过适当的截角，即截去四面体的四个顶点处的小棱锥所得的多面体. 如图，将棱长为 6 的正四面体沿棱的三等分点作平行于底面的截面，得到所有棱长均为 2 的截角四面体，则





A. 直线 KL 与平面 ABC 所成角为 $60°$　　B. $AF=2\sqrt{5}$

C. 该截角四面体的表面积为 $28\sqrt{3}$　　D. 该截角四面体外接球的表面积为 22π

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在$\left(x+\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^6$(其中 a 为大于零的常数)的展开式中，若常数项为 60，则 $a=$________.

14. 已知 F 为抛物线 E：$y^2=4x$ 的焦点，A，B，C 为 E 上的三点，若$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，则$|\overrightarrow{AF}|+|\overrightarrow{BF}|+|\overrightarrow{CF}|=$________.

15. 甲、乙两位同学进行象棋比赛，采用五局三胜制（当一人赢得三局时，该同学获胜，比赛结束）. 根据以往比赛成绩，每局比赛中甲获胜的概率都是 $p(0<p<1)$，且各局比赛结果相互独立. 若甲以 3∶1 获胜的概率不高于甲以 3∶2 获胜的概率，则 p 的取值范围为____________.

16. 已知函数 $f(x)=4a^x-x^4\ln a(a>0$ 且 $a\neq1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个极值点 x_1,x_2，则实数 a 的取值范围为__________。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

某新能源汽车销售部对今年 1 月至 7 月的销售量进行统计与分析，因不慎丢失一些数据，现整理出如下统计表与一些分析数据：

月份	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月
月份代号 x	1	2	3	4	5	6	7
销售量 y(单位:万辆)	15.6	m	n	s	37.7	39.6	44.5

其中 $\bar{y}=31.2$.

(1)若 m,n,s 成递增的等差数列，求从 7 个月的销售量中任取 1 个，月销售量不高于 27 万辆的概率；

(2)若 $\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2=670.48$，$x$ 与 y 的样本相关系数 $r=0.99$，求 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，并预测今年 8 月份的销售量（$\hat{b}$ 精确到 0.1）.

附：相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$，线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

参考数据：$\sqrt{7}\approx2.65$，$\sqrt{670.48}\approx25.89$.

18.（本小题满分 12 分）

记△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $3\sin^2B=\sin^2A+\sin^2C$.

(1)若△ABC 的面积为 $\frac{1}{3}b^2$，求 $\tan B$；

(2)若 $b=2$，$\cos B=\frac{2}{3}$，求△ABC 的周长.

19.（本小题满分 12 分）

在递增的等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，且 a_2,a_3+1,a_6-3 成等比数列.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

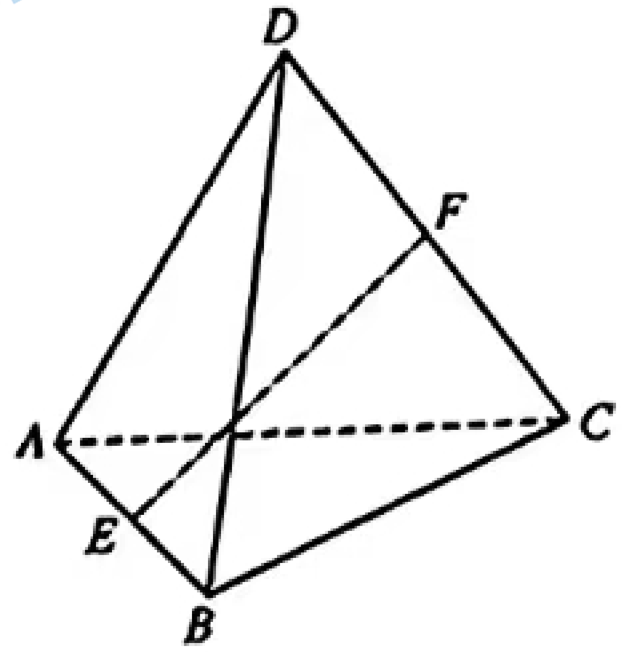
(2)令 $b_n=\begin{cases}1,n\text{ 为奇数},\\a_n,n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 记 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_n>2\,024$，求 n 的最小值.

20.（本小题满分 12 分）

如图，在四面体 $ABCD$ 中，$\triangle ACD$ 是边长为 2 的等边三角形，$BD=2$，$AB=\sqrt{2}$，$\angle ADB=\angle CDB$，点 E，F 分别为 AB，DC 的中点.

(1)证明：平面 $ACD\perp$ 平面 ABC；

(2)求直线 EF 与平面 ABD 所成角的正弦值.



21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，且点 $A(-1,-3)$ 在 C 上.

(1)求 C 的方程；

(2)设 O 为坐标原点，直线 OA 与 C 交于另一点 B，与直线 OA 平行的直线交 C 于 P，Q 两点，直线 AP 与 BQ 交于点 D，证明：直线 OD 的斜率为定值.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x(a+\ln x)-ax^2(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2)若 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上仅有一个零点，求 a 的取值范围.

高三数学参考答案、提示及评分细则

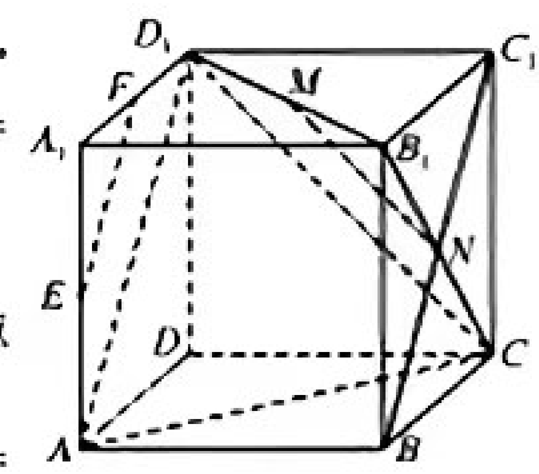
1. A　由题意得 $z=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$，则 $\bar{z}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$，所以 $\bar{z}-z=i$. 故选 A.

2. D　由题意得 $U=\{x|-2<x<6\}$，又 $\complement_U M=\{x|-1<x<2\}$，所以 $M=\{x|-2<x\leqslant -1$，或 $2\leqslant x<6\}$，所以 $2\in M$，$6\notin M$，M 不是 $\{x|2\leqslant x<6\}$ 的子集，$\{x|-2<x\leqslant -1\}\subseteq M$，所以 ABC 错误，D 正确. 故选 D.

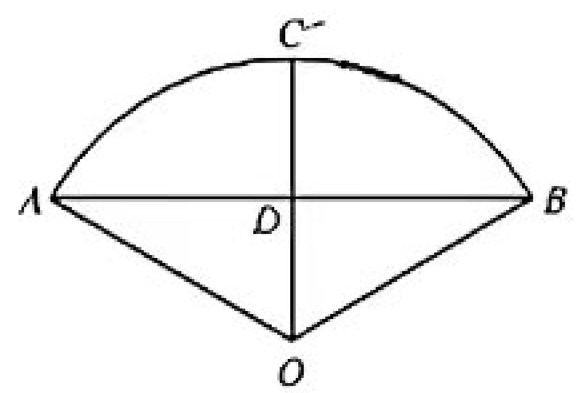
3. B　由题意得，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4+m,-4)$，由 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp \boldsymbol{c}$，得 $2(4+m)-3\times 4=0$，解得 $m=2$. 故选 B.

4. C　因为 $X\sim N(100,\sigma^2)$，所以 $p(X\geqslant 120)=p(X\leqslant 80)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{8}$，故此次考试中数学成绩不低于 120 分的学生人数约为 $1\ 000\times\frac{1}{8}=125$. 故选 C.

5. C　如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，连接 B_1C，D_1C，AD_1，AC，易证 $MN\parallel CD_1$，$EF\parallel AD_1$，所以 $\angle AD_1C$ 为异面直线 EF 与 MN 所成的角或其补角. 易证 $AD_1=CD_1=AC$，即 $\triangle ACD_1$ 为等边三角形，所以 $\angle AD_1C=60^\circ$. 故选 C.



6. D　设该扇形的圆心角为 α，由扇形面积公式得 $\frac{1}{2}\times 4^2\times\alpha=\frac{16\pi}{3}$，所以 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$，取 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点 C，连接 OC，交 AB 于点 D，则 $OC\perp AB$，则 $OD=OA\cos\angle AOD=4\cos\frac{\pi}{3}=2$，$AB=2AD=2\times 4\sin\frac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$，$CD=OC-OD=2$，所以扇形的弧长的近似值为 $l_{弧}=弦+\frac{2\times 矢^2}{径}=AB+\frac{2CD^2}{2OA}=4\sqrt{3}+\frac{2\times 4}{8}=4\sqrt{3}+1$. 故选 D.



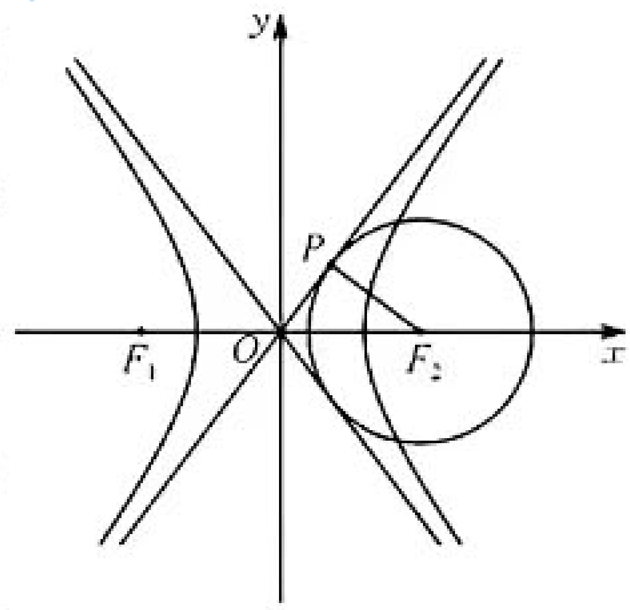
7. A　由题意，得 $a_n\neq 0$，又 $a_n=-2a_{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=-\frac{1}{2}$，所以 $\{a_n\}$ 是公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列. 因为 $a_3+a_6=-20$，所以 $\left(-\frac{1}{2}\right)^2a_1+\left(-\frac{1}{2}\right)^5a_1=-20$，解得 $a_1=-64$，所以 $a_n=-64\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，则 $a_5=-4$，$a_6=2$，$a_7=-1$，当 $n>7$ 时，$|a_n|<1$，因为 $T_6<T_5<0<T_7$，所以 T_6 最小. 故选 A.

8. B　由题意知 $f(x)=f(2-x)$，且 $f(2-x)+f(2+x)=0$，所以 $f(x)=-f(2+x)$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 4 的函数. 由 $f(2)=0$ 知，$f(2\ 022)=f(2)=0$，所以 $g(2\ 022)=2\ 021f(2\ 022)=0$；由 $g(5)=4$，得 $4f(5)=4f(1)=4$，所以 $f(1)=1$，则 $f(3)=-f(1)=-1$，所以 $g(2\ 023)=2\ 022f(2\ 023)=2\ 022f(3)=-2\ 022$，则 $g(2\ 022)+g(2\ 023)=-2\ 022$. 故选 B.

9. BCD　因为 $a<b<0$，所以 $-a>-b>0$，所以 $(-a)^2>(-b)^2$，即 $a^2>b^2$，故 A 错误；因为 $a<b<0$，所以 $ab>b^2$，故 B 正确；由 $a<b<0$，得 $\frac{a}{b}>0$，$\frac{b}{a}>0$，所以 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$，当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=b$ 时等号成立，因为 $a<b<0$，所以等号不成立，故 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$，故 C 正确；因为 $a<b<0$，所以 $ab>0$，所以 $\frac{1}{ab}\times a<\frac{1}{ab}\times b<0$，所以 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，所以 $1+\frac{1}{a}>1+\frac{1}{b}$，即 $\frac{a+1}{a}>\frac{b+1}{b}$，故 D 正确. 故选 BCD.

10. ACD　$f(x)=\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，其最小正周期为 2π，因为 $4\pi=2\times 2\pi$，所以 4π 为 $f(x)$ 的一个周期，故 A 正确；令 $-\pi+2k\pi\leqslant x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $-\frac{7\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant -\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{7\pi}{6}+2k\pi,-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$，故 B 错误；因为 $f\left(-\frac{7\pi}{6}\right)=-1$，所以直线 $x=-\frac{7\pi}{6}$ 为 $f(x)$ 的图象的一条对称轴，故 C 正确；将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度，得 $y=\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$，故其图象关于原点对称，故 D 正确. 故选 ACD.

11. ACD　设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线为 $l:bx-ay=0$，则 $F_2(c,0)$ 到直线 $l:bx-ay=0$ 的距离为 $\frac{|bc|}{\sqrt{b^2-a^2}}=b$，因为以 F_2 为圆心的圆与 l 相切于点 P，所以 $|PF_2|=b=4$，因为 $e=\frac{5}{3}$，即 $\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$，则 $c=\frac{5}{3}a$，又 $a^2-b^2=c^2$，所以 $a=3,c=5$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle PF_2O$ 中，$\cos\angle PF_2F_1=\frac{b}{c}=\frac{4}{5}$，在 $\triangle PF_2F_1$ 中，$|PF_1|^2=|F_1F_2|^2+|PF_2|^2-2|F_1F_2|\cdot|PF_2|\cos\angle PF_2F_1=100+16-2\times10\times4\times\frac{4}{5}=52$，所以 $|PF_1|=2\sqrt{13}$，故 A 正确；当直线 l 的斜率为 0 时，A,B 两点分别为双曲线的顶点，则 $|AB|=2a=6$，又 $6<\frac{32}{3}$，故 B 错误；因为 $|AF_2|=7$，又 $a+c=8$，所以 A 在 C 的右支上，所以 $|AF_1|-|AF_2|=2a=6$，所以 $|AF_1|=13$，故 C 正确；过 F_1 分别作两渐近线的平行线 l_1,l_2（其中 l_1,l_2 的斜率分别为 $\frac{4}{3},-\frac{4}{3}$），将 l_1 绕焦点 F_1 沿逆时针方向旋转到与 l_2 重合的过程中，直线与双曲线的左支有两个交点，此时直线 l 的斜率 $k>\frac{4}{3}$ 或 $k<-\frac{4}{3}$，故 D 正确. 故选 ACD.



12. BCD　由题意得，将截角四面体还原为正四面体，如图 1 所示，因为 $KL/\!/BD$，平面 $ABC/\!/$平面 $EFGHIK$，所以 KL 与平面 ABC 所成的角即为原正三棱锥的侧棱与底面所成的角，设为 θ，易求 $\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $\theta\neq60^\circ$，故 A 错误；连接 AE，AF，则 $AE/\!/BD$，所以 $AE=4$，由正四面体中对棱互相垂直，可得 $JI\perp BD$，所以 $EF\perp AE$，在直角 $\triangle AEF$ 中，$AF=\sqrt{AE^2+EF^2}=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$，所以 B 正确；由题意知，截角四面体由 4 个边长为 2 的正三角形，4 个边长为 2 的正六边形构成，所以其表面积为 $S=4\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times4+4\times6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times4=28\sqrt{3}$，故 C 正确；如图 2 所示，取上下底面的中心分别为 O_1,O_2，外接球的球心为 O，连接 OC,OG,CO_1,GO_2，因为截角四面体上、下底面的距离为 $2\sqrt{6}-\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$，设外接球的半径为 R，则 $\sqrt{R^2-O_1C^2}-\sqrt{R^2-O_2G^2}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$，即 $\sqrt{R^2-\frac{4}{3}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}-\sqrt{R^2-4}$，解得 $R^2=\frac{11}{2}$，所以外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=22\pi$，所以 D 正确. 故选 BCD.

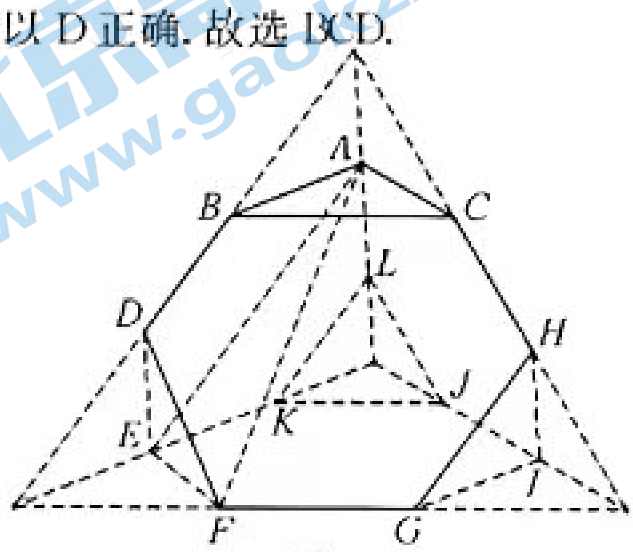


图1

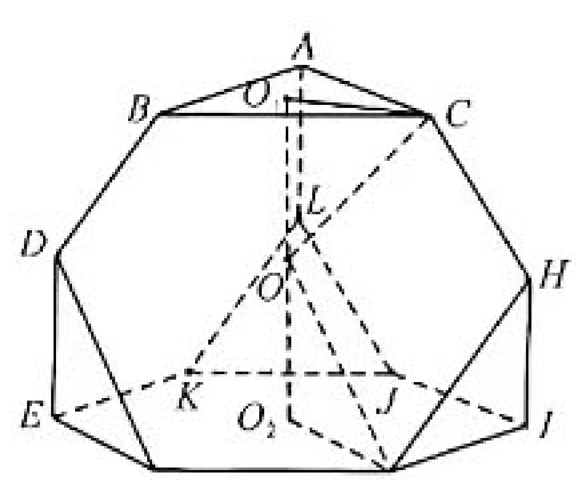


图2

13\. $\sqrt{2}$ $T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^r=a^rC_6^rx^{6-\frac{3}{2}r}$，令 $6-\frac{3}{2}r=0$，得 $r=4$，所以 $T_5=a^4C_6^4=15a^4=60$，又 $a>0$，所以 $a=\sqrt{2}$.

14\. 6 由题意知 $F(1,0)$，设 A,B,C 的横坐标分别为 x_1,x_2,x_3，由 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$，得 $1-x_1=\frac{1}{3}(x_2-x_1+x_3-x_1)$，所以 $x_1+x_2+x_3=3$，由抛物线的定义得 $|\overrightarrow{AF}|+|\overrightarrow{BF}|+|\overrightarrow{CF}|=x_1-1+x_2+1-x_3+1=x_1+x_2+x_3+3=6$.

15\. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 由题意可知，甲以 3∶1 获胜的概率为 $p_1=C_3^2p^2(1-p)p=3p^3(1-p)$，甲以 3∶2 获胜的概率为 $p_2=C_4^2p^2(1-p)^2p=6p^3(1-p)^2$，因为 $p_1\leqslant p_2$，所以 $p_1-p_2=3p^3(1-p)[1-2(1-p)]\leqslant 0$，解得 $p\leqslant\frac{1}{2}$，故 p 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

16\. $(1,e^{\frac{3}{e}})$ $f'(x)=4(a^x-x^3)\ln a$，由题意知，方程 $a^x=x^3$ 有两个不同的正实数解 x_1,x_2，所以 $a>1$，对 $a^x=x^3$ 两边取对数，得 $x\ln a=3\ln x$，令 $g(x)=x\ln a-3\ln x(x>0)$，则 $g'(x)=\ln a-\frac{3}{x}=\frac{\ln a\left(x-\frac{3}{\ln a}\right)}{x}$，当 $x=\frac{3}{\ln a}$ 时，$g'(x)=0$；当 $x>\frac{3}{\ln a}$ 时，$g'(x)>0$；当 $x<\frac{3}{\ln a}$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{3}{\ln a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{3}{\ln a},+\infty\right)$ 上单调递增，于是 $g(x)_{\min}=g\left(\frac{3}{\ln a}\right)=3-3\ln\left(\frac{3}{\ln a}\right)$. 当 $x\to 0$ 时，$g(x)\to+\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$. 要使 $g(x)$ 有两个零点，必须使 $3-3\ln\left(\frac{3}{\ln a}\right)<0$，即 $\ln\left(\frac{3}{\ln a}\right)>1=\ln e$，所以 $\frac{3}{\ln a}>e$，解得 $a<e^{\frac{3}{e}}$，故 $1<a<e^{\frac{3}{e}}$. 当 $a\in(1,e^{\frac{3}{e}})$ 时，由上面的讨论，可得 $g(x)=x\ln a-3\ln x(x>0)$ 有两个零点，设为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$. 当 $0<x<x_1$ 时，$g(x)=x\ln a-3\ln x>0$，所以 $a^x>x^3$，$f'(x)=4\ln a(a^x-x^3)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x_1<x<x_2$ 时，$g(x)=x\ln a-3\ln x<0$，所以 $a^x<x^3$，$f'(x)=4(a^x-x^3)\ln a<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>x_2$ 时，$g(x)=x\ln a-3\ln x>0$，所以 $a^x>x^3$，$f'(x)=4(a^x-x^3)\ln a>0$，$f(x)$ 单调递增. 所以 x_1,x_2 就是 $f(x)$ 的两个极值点. 综上，实数 a 的取值范围是 $(1,e^{\frac{3}{e}})$.

17\. 解：(1)因为 $\bar{y}=31.2$，所以 $\frac{15.6+m+n+s+37.7+39.6+44.5}{7}=31.2$，

所以 $m+n+s=81$，…………………………………………………… 2 分

又 m,n,s 成递增的等差数列，所以 $m+s=2n$ 且 $m<n<s$，

所以 $n=27$，且 $m<27<s$，…………………………………………………… 3 分

所以月销售量不高于 27 万辆的有 15.6，m，n，共 3 个，又基本事件总数为 7，

故所求概率 $P=\frac{3}{7}$. …………………………………………………… 5 分

(2)由表中数据可知，$\bar{x}=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}x_i=4$，$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2=28$，…………………………………… 6 分

由 $r=\frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}}=0.99$ 和 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}$，

得 $\frac{\hat{b}}{r}=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}}=\frac{\sqrt{670.48}}{\sqrt{28}}\approx\frac{25.89}{2\times 2.65}\approx 4.88$，

所以 $\hat{b}\approx 4.88r=4.88\times 0.99\approx 4.8$，…………………………………………………… 8 分

由 $\bar{x}=4$，$\bar{y}=31.2$，得 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=31.2-4.8\times 4=12.0$，

故 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=4.8x-12.0$. ………………………………………………………………… 9 分

当 $x=8$ 时，$\hat{y}=4.8\times8+12=50.4$，

所以预测今年 8 月份的销售量大约为 50.4 万辆. ………………………………………………………………… 10 分

18. 解：由 $3\sin^2B=\sin^2A+\sin^2C$ 及正弦定理，得 $3b^2=a^2+c^2$. ………………………………………… 1 分

(1)由$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{3}b^2$，得$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{3}b^2$，………………………………………………… 2 分

因为 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，所以 $ac=\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cos B}=\frac{b^2}{\cos B}$，………………………………………… 4 分

所以$\frac{1}{2}\times\frac{b^2}{\cos B}\cdot\sin B=\frac{1}{3}b^2$，所以 $\tan B=\frac{2}{3}$. ………………………………………………… 6 分

(2)由余弦定理，得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

又 $3b^2=a^2+c^2$，$b=2$，$\cos B=\frac{2}{3}$，所以 $b^2=3b^2-\frac{4}{3}ac$，则 $b^2=\frac{2}{3}ac$，……………………… 8 分

所以 $ac=6$，

所以$(a+c)^2=a^2+c^2+2ac=3b^2+2ac=12+12=24$. ………………………………………………… 10 分

解得 $a+c=2\sqrt{6}$，

故$\triangle ABC$的周长为 $2+2\sqrt{6}$. ……………………………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)设$\{a_n\}$的公差为 d，则 $d\neq0$，

由 a_2，a_3+1，a_8-3 成等比数列及 $a_1=1$，得 $(a_3+1)^2=a_2(a_8-3)$，………………………………… 1 分

即$(2+2d)^2=(1+d)(7d-2)$，解得 $d=2$ 或 $d=-1$（舍）. …………………………………………………… 3 分

所以 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$，即$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n-1$. ……………………………………… 4 分

(2)由(1)知 $a_n=2n-1$，因为 $b_n=\begin{cases}1, n\text{ 为奇数}，\\ a_n, n\text{ 为偶数}，\end{cases}$ ………………………………………… 5 分

所以 $b_{2k-1}=1$，$b_{2k}=a_{2k}=4k-1(k\in\mathbf{N}^*)$，所以 $b_{2k-1}+b_{2k}=4k$，……………………………… 7 分

当 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$时，$S_{2k}=4(1+2+\cdots+k)=2k(k+1)>2\,024$，……………………………… 8 分

即 $k(k+1)>1\,012$，因为 $31\times32=992$，$32\times33=1\,056$，

所以 $S_{64}=2\times1\,056=2\,112>2\,024$，…………………………………………………………………… 10 分

又 $S_{63}=S_{64}-b_{64}=2\,112-127=1\,985<2\,024$，

所以满足 $S_n>2024$ 的 n 的最小值为 64. ………………………………………………………………… 12 分

20. (1)证明：由 $AD=CD$，$BD=BD$，$\angle ADB=\angle CDB$，得$\triangle ABD\cong\triangle CBD$，……………………… 1 分

所以 $AB=BC=\sqrt{2}$. ………………………………………………………………………………………… 2 分

取 AC 的中点 O，连接 OB，OD，则 $OD\perp AC$，$OB\perp AC$，…………………………………………… 3 分

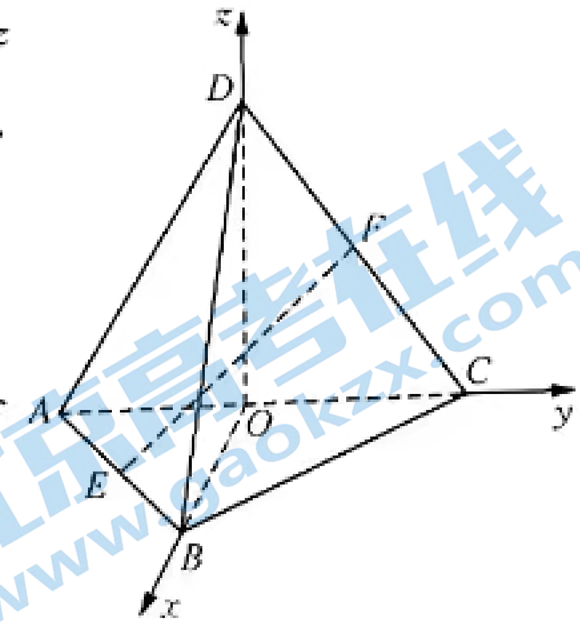
所以 $OD=\sqrt{3}$，$OB=\sqrt{(\sqrt{2})^2-1^2}=1$，

又 $BD=2$，所以 $OD^2+OB^2=BD^2$，则 $OD\perp OB$. ………………………………………………………… 4 分

因为 $AC\cap OB=O$，AC，$OB\subset$平面 ABC，所以 $DO\perp$平面 ABC. ………………………………… 5 分

又 $DO\subset$平面 ACD，所以平面 $ACD\perp$平面 ABC. …………………………………………………… 6 分

(2)解：由(1)可知，OC，OB，OD 两两互相垂直，以 OB，OC，OD 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$. 则 $A(0,-1,0)$，$C(0,1,0)$，$B(1,0,0)$，



$D(0,0,\sqrt{3})$，$E\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，$F\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{BD}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{EF}=\left(-\frac{1}{2},1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. …………………… 8 分

设平面 ABD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y=0,\\ -x+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

令 $z=1$，解得 $x=\sqrt{3}$，$y=-\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$. …………………… 10 分

设直线 EF 与平面 ABD 所成的角为 θ，

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{EF}\rangle|=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{42}}{14}$，

故直线 EF 与平面 ABD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{14}$. …………………… 12 分

21. (1)解：设 C 的半焦距为 c，由题意知 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3},\\ \frac{9}{a}+\frac{1}{b^2}=1,\\ a^2\ \ ,\end{cases}$ …………………… 2 分

解得 $\begin{cases}a=3\sqrt{2},\\ b=\sqrt{2},\\ c=4,\end{cases}$ 故 C 的方程为 $\frac{y^2}{18}+\frac{x^2}{2}=1$. …………………… 4 分

(2)证明：由椭圆的对称性知 $B(1,3)$，直线 OA 的斜率为 3.

设直线 PQ 的方程为 $y=3x+m(m\neq0)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,\ \ )$，$D(x_0\ \ )$，

由 $\begin{cases}y=3x+m,\\ \frac{y^2}{18}+\frac{x^2}{2}=1,\end{cases}$ 消去 y 并整理，得 $18x^2+6mx+m^2-18=0$，…………………… 5 分

$\Delta=(6m)^2-4\times18(m^2-18)=36(-m^2+36)>0$，得 $-6<m<6$，且 $m\neq0$，

则 $x_1+x_2=-\frac{1}{3}m$. …………………… 6 分

若 $x_1=-1$，则 $P(-1,3)$，PQ 的方程为 $y-3=3(x+1)$，即 $y=3x+6$，此时 $m=6$，不合题意；

若 $x_2=1$，则 $Q(1,-3)$，PQ 的方程为 $y+3=3(x-1)$，即 $y=3x-6$，此时 $m=-6$，不合题意. …………………… 7 分

所以 $x_1\neq-1$ 且 $x_2\neq1$，则

$k_{AP}=\frac{y_1+3}{x_1+1}=\frac{3x_1+m+3}{x_1+1}=3+\frac{m}{x_1+1}$，$k_{BQ}=\frac{y_2-3}{x_2-1}=\frac{3x_2+m-3}{x_2-1}=3+\frac{m}{x_2-1}$，…………………… 8 分

所以直线 AP 的方程为 $y+3=\left(3+\frac{m}{x_1+1}\right)(x+1)$，

直线 BQ 的方程为 $y-3=\left(3+\frac{m}{x_2-1}\right)(x-1)$，…………………… 9 分

两方程联立，得 $(x_1-x_2+2)x=x_1+x_2$，因为 $x_1+x_2=-\frac{1}{3}m$，且 $m\neq 0$，

所以 $x_1-x_2+2\neq 0$，所以 $x=\frac{x_1-x_2}{x_1-x_2+2}$，即 $x_0=\frac{x_1-x_2}{x_1-x_2+2}$，显然 $x_0\neq 0$，

所以 $y_0=\left(3+\frac{m}{x_2-1}\right)x_0-\frac{m}{x_2-1}$， ………………………………………… 10 分

所以 $k_{OD}=\frac{y_0}{x_0}=\left(3+\frac{m}{x_2-1}\right)-\frac{m}{x_2-1}\times\frac{x_1-x_2+2}{x_1+x_2}=3+\frac{m}{x_2-1}-\frac{m}{x_2-1}\times\left[-\frac{3(x_1-x_2+2)}{m}\right]$

$=3-\frac{-3(x_1+x_2)}{x_2-1}+\frac{3(x_1-x_2+2)}{x_2-1}=3+\frac{-6(x_2-1)}{x_2-1}=-3$.

故直线 OD 的斜率为定值 -3. ………………………………………… 12 分

22. 解：(1) 当 $a=0$ 时，$f(x)=x\ln x$，所以 $f(1)=0$，即切点为 $(1,0)$， ……………………… 1 分

又 $f'(x)=\ln x+1$，则 $f'(1)=\ln 1+1=1$， ………………………………………… 2 分

故曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-0=1(x-1)$，即 $x-y-1=0$. ……………… 3 分

(2) 由题意知，方程 $x(a-\ln x)-ax^2=0$ 在 $(1,+\infty)$ 上仅有一个实数解，

则方程 $a+\ln x-ax=0$ 在 $(1,+\infty)$ 上仅有一个实数解. ………………………………………… 4 分

设 $g(x)=\ln x-ax+a(x>1)$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$， ………………………………… 5 分

当 $a\leq 0$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

又 $g(1)=\ln 1-a+a=0$，所以 $x>1$ 时 $g(x)>0$，则 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上没有零点； ……………… 6 分

当 $a\geq 1$ 时，$x>1$ 时，$ax>1$，则 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

又 $g(1)=0$，所以 $g(x)<0$，则 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上没有零点； ………………………………… 7 分

当 $0<a<1$ 时，$\frac{1}{a}>1$，当 $x\in\left(1,\frac{1}{a}\right)$ 时，$g'(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$ 在 $\left(1,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，

则 $g\left(\frac{1}{a}\right)>g(1)=0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(1,\frac{1}{a}\right)$ 上无零点. ……………………………… 8 分

设 $h(x)=e^x-x(x>0)$，则 $h'(x)=e^x-1>0$，所以 $h(x)>h(0)=1$，

则 $e^x>x$，所以 $e^{\frac{1}{a}}>\frac{1}{a}$. ………………………………………… 9 分

设 $\varphi(x)=e^x-1-x^2(x>0)$，则 $\varphi'(x)=e^x-2x$，令 $m(x)=e^x-2x(x>0)$，则 $m'(x)=e^x-2$，当 $x\in(0,\ln 2)$，$m'(x)<0$，

当 $x\in(\ln 2,+\infty)$，$m'(x)>0$，

所以 $m(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增， ………………………… 10 分

则 $m(x)\geq m(\ln 2)=2-2\ln 2=\ln\frac{e^2}{4}>0$，即 $\varphi'(x)>0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $\varphi(0)=0$，所以 $\varphi(x)>0$，则 $e^x-1>x^2$，所以 $e^{\frac{1}{a}}-1>\frac{1}{a^2}$，则 $1-e^{\frac{1}{a}}<-\frac{1}{a^2}$，

又 $e^{\frac{1}{a}}\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$，则 $g(e^{\frac{1}{a}})=a-ae^{\frac{1}{a}}+\frac{1}{a}=a(1-e^{\frac{1}{a}})+\frac{1}{a}<a\left(-\frac{1}{a^2}\right)+\frac{1}{a}=0$，

又 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，且 $g\left(\frac{1}{a}\right)>0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上有且仅有一个零点.

综上可知，a 的取值范围为 $(0,1)$. ………………………………………… 12 分