广东省2022届高三综合能力测试（一）

数学试题

2021年8月

注意事项：

1．答卷前，考生要务必填涂答题卷上的有关项目．

2．选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答案涂在答题卷相应的位置上．

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卷各题目指定区域内；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液，不按以上要求作答的答案无效．

4．请考生保持答题卷的整洁，考试结束后，将答题卷交回．

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $M=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-4x+5=0\}$，$N=\{x\in\mathbf{R}\mid x>0\}$，则 $M\cap N=$（　）

A．$\{1\}$　　B．$\{5\}$　　C．$\{1,5\}$　　D．$\varnothing$

2．复数 $z=\dfrac{1+3i}{3-i}+\dfrac{2}{1-i}$（i 为虚数单位）的共轭复数 $\bar{z}=$（　）

A．$1-i$　　B．$1+i$　　C．$1+2i$　　D．$1-2i$

3．若抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）上的点 $M(3,y_0)$ 到焦点的距离是4，则抛物线的方程为（　）

A．$y^2=2x$　　B．$y^2=4x$　　C．$y^2=8x$　　D．$y^2=12x$

4．基本分裂数 m，是一个衡量细菌分裂的参数，简单来说在1小时内1个细菌平均可以分裂成 m 个细菌．已知在某种细菌培养过程中，原有细菌26个，经过了3小时后细菌增至105个，那么 $26m^3=105$，参考上述数据预计再经过（　）小时细菌就会突破十万个．

A．12　　B．15　　C．18　　D．21

5．已知 A 为三角形的内角，且 $\sin A+\cos A=\dfrac{7}{13}$，则 $\tan A=$（　）

A．$-\dfrac{12}{5}$　　B．$-\dfrac{5}{12}$　　C．$\dfrac{5}{12}$　　D．$\dfrac{12}{5}$

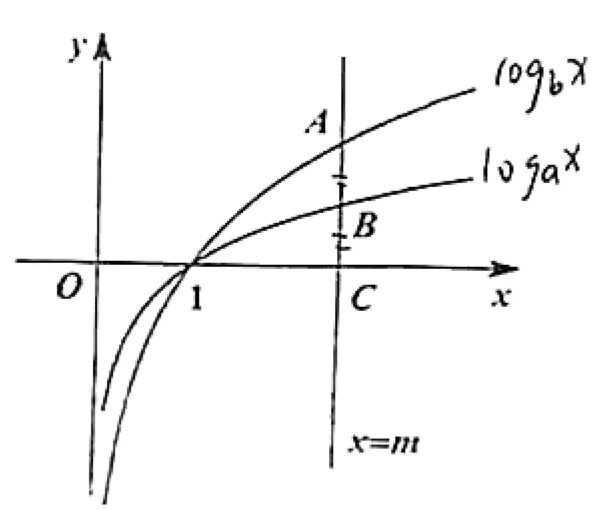
6．受全球新冠疫情影响，2020东京奥运会延期至2021年7月23日到8月8日举行，某射箭选手积极备战奥运，在临赛前的一次训练中共射了1组共72支箭，下表是命中环数的部分统计信息：

环数	<7	7	8	9	10
频数	0	3	a	b	22

已知该次训练的平均环数为9.125环，据此水平，正式比赛时射出的第一支箭命中黄圈（不小于9环）的概率约为（　）

A．0.31　　B．0.65　　C．0.86　　D．1

7．如图，直线 $x=m$（$m>1$）依次与曲线 $y=\log_a x$、$y=\log_b x$ 及 x 轴相交于点 A、点 B 及点 C，若 B 是线段 AC 的中点，则（　）



A．$1<b\le 2a-1$　　B．$b>2a-1$

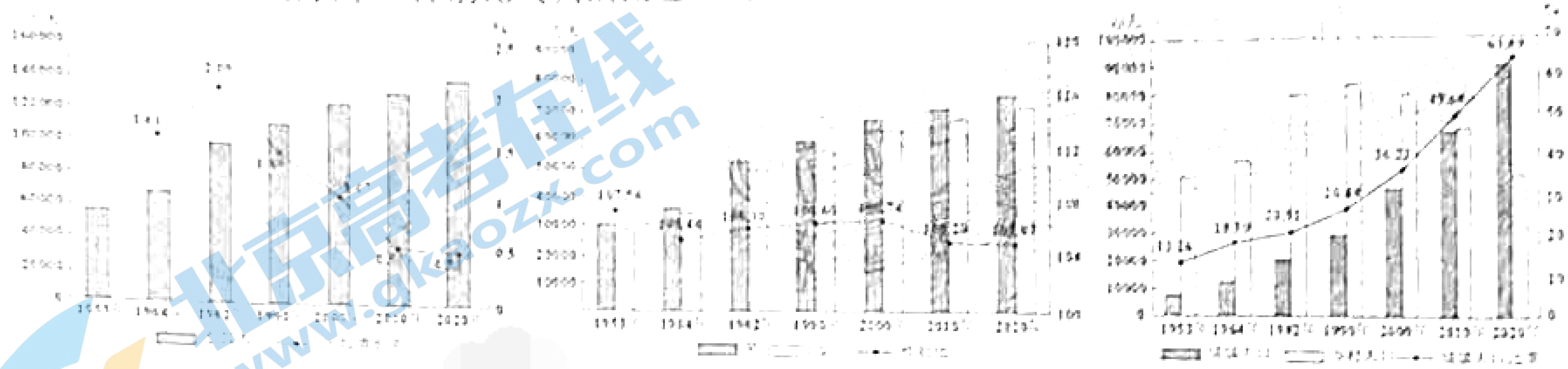
C．$1<b\le 2a$　　D．$b>2a$

8. 已知函数 $f(x)=(2a-1)a^x-a$（其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$），若当 $x\le -1$ 时，恒有 $|f(x)|<\frac{9}{4}$，则 a 的取值范围是（　　）

A. $(0,\frac{1}{2}]$　　　　B. $(0,\frac{3}{4})$　　　　C. $[\frac{1}{2},1)$　　　　D. $(\frac{1}{4},1)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分．

9. 2021 年 5 月 11 日，国家统计局公布了第七次人口普查统计数据，全国总人口数为141178万，全部七次人口普查的人口增长率、性别比及城镇化进程变化情况如下图：



根据以上信息，下列统计结论正确的是（　　）

A. 七次人口普查的人口增长率逐次减少

B. 七次人口普查的性别比趋于稳定，重男轻女的传统观念有所转变

C. 七次人口普查的城镇人口比重逐次提高

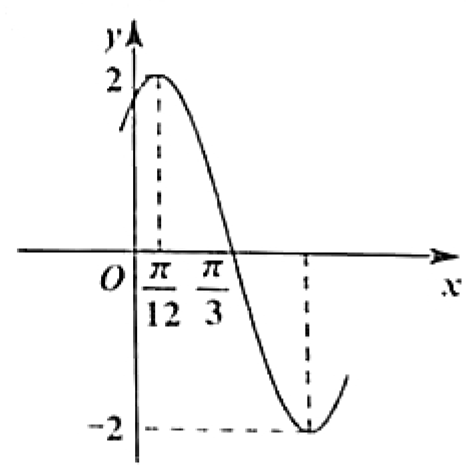
D. 第七次人口普查城镇人口数与乡村人口数相差超过 4 亿

10. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{1+2^x}$，则（　　）

A. $f(\log_2 3)=\frac{1}{4}$　　　　B. $f(x)$ 是 R 上的减函数

C. $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,1)$　　　　D. 不等式 $f(1+2x)+f(x)>1$ 的解集为 $(-\infty,-\frac{1}{3})$

11. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，下列说法正确的是（　　）



A. 函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{6},0)$ 对称

B. 函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{5\pi}{12}$ 对称

C. 函数 $y=f(x)$ 在 $[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}]$ 上单调递减

D. 该图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位可得 $y=2\sin 2x$ 的图象

12. 下列不等式成立的是（　　）

A. $\pi^{-2}<\sqrt{\pi}$　　　B. $\log_2(\sin 1)>2^{\sin 1}$　　　C. $5\ln 2>2\ln 5$　　　D. $\log_4 3>\log_6 5$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分，其中第16题第一空2分，第二空3分.

13. 已知$(1+2x)^n$的展开式的二项式系数之和为16，则各项系数之和为______.（用数字作答）

14. 若椭圆的左顶点、上顶点以及右焦点构成直角三角形，则该椭圆的离心率为______.

15. 直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的所有顶点都在球O的球面上，$AB\perp BC$，$AB=1$，$BC=2\sqrt{2}$，$AA_1=4$，则球O的体积是______.

16. 定义在R上的函数$f(x)=x+a+\sin x$，若$f(x+\pi)$是奇函数，则$a=$______；满足$f(x)-\pi>0$的x的取值范围是______.

四、解答题：本题共6小题，共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10分）

已知ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$a\sin C+\sqrt{3}b=\sqrt{3}a\cos C+2c$.

（1）求A；

（2）若$a=2$，且$\sin B+\sin C=2\sin A$，求ΔABC的面积.

18.（12分）

已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}^2-2a_na_{n+1}-3a_n^2=0$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

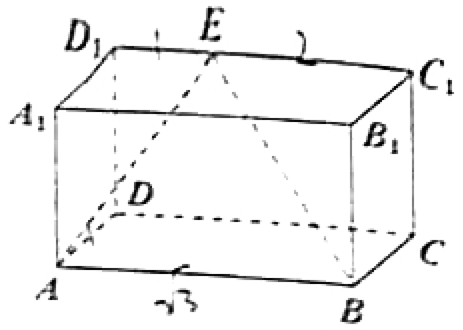
（2）若$a_nb_n=\frac{2}{3}n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和.

19.（12分）

如图，长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=\sqrt{3}AD$，E在棱C_1D_1上，且$C_1E=2ED_1$，在平面$A_1B_1C_1D_1$内过点D_1作直线l，使得$l\perp AE$.

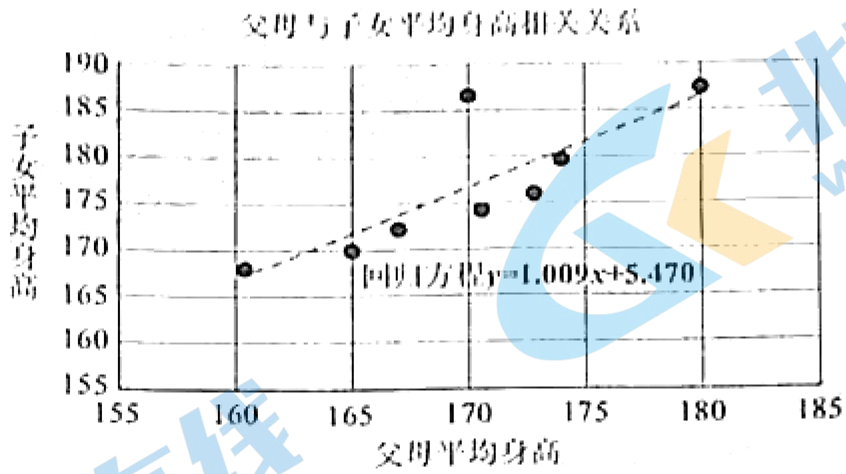
（1）在图中画出直线l并说明理由；

（2）若$AD=AA_1$，求直线l与平面ABE所成角的正弦值.



20. (12分)

研究表明，子女的平均身高 y_i(cm)与父母的平均身高 x_i(cm)有较强的线性相关性. 某数学小组收集到8个家庭的相关数据，下面是小组制作的统计图(散点图、回归直线 l 及回归方程)与原始数据表(局部缺失).



家庭编号	1	2	3	4	5	6	7	8
父母平均身高(cm)	160.5	165	167	170	170.5	173	174	180
子女平均身高(cm)	168	170	172.5	187	174.5	176	180	*

(1) 表中8号家庭的子女平均身高数据缺失，试根据统计学知识找回该数据；

(2) 由图中观察到4号家庭的数据点明显偏离回归直线 l，试计算其残差(残差＝观测值－预报值)；若剔除4号家庭数据点后，用余下的7个散点作线性回归分析，得到新的回归直线 l'，判断并证明 l 与 l' 的位置关系.

附：对于一组数据 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n)，其回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

21. (12分)

已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的右焦点为 $F(2,0)$，一条渐近线方程为 $x-\sqrt{3}y=0$.

(1) 求 C 的方程；

(2) 记 C 的左、右顶点分别为 A、B，过 F 的直线 l 交 C 的右支于 M，N 两点，连结 MB 交直线 $x=\dfrac{3}{2}$ 于点 Q，求证：A、Q、N 三点共线.

22. (12分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+a(x-\ln x)$，$g(x)=\dfrac{1}{3}(x-1)^3-f(x)$.

(1) 确定 a 的所有值，使函数 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数；

(2) 若函数 $g(x)$ 在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 处取得极小值 $g(x_1)$ 和 $g(x_2)$，证明：$g(x_1)+g(x_2)+3a+\dfrac{1}{2}<0$.

广东省 2022 届高三综合能力测试(一)

数 学 解析版

1. 【解析】D；依题意得 $M=\varnothing$，所以 $M\cap N=\varnothing$.

2. 【解析】D；依题意得 $z=\dfrac{i(3-i)}{3-i}+\dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+2i$，所以 $\bar{z}=1-2i$.

3. 【解析】B；准线方程为 $l:x=-\dfrac{p}{2}$，M 到准线的距离等于它到焦点的距离，则 $3+\dfrac{p}{2}=4$，$p=2$，故抛物线方程为 $y^2=4x$，故选 B.

4. 【解析】B；由题意知 $m=\sqrt[3]{\dfrac{105}{26}}$，设再经过 n 小时细菌就会突破十万个，则 $105m^n>100000$，即 $105\times(\sqrt[3]{\dfrac{105}{26}})^n>100000$，得 $(\sqrt[3]{\dfrac{105}{26}})^n>\dfrac{20000}{21}$，因为 $\sqrt[3]{\dfrac{105}{26}}>\sqrt[3]{\dfrac{104}{26}}=\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}}$，$2^{10}=1024>\dfrac{20000}{21}$，则再经过15小时细菌就会突破十万个.

5. 【解析】A；平方可得 $2\sin A\cos A=-\dfrac{120}{169}<0$，故 $\sin A>0$，$\cos A<0$，故 $\sin A-\cos A=\dfrac{17}{13}$，联立题中给定条件，可解得 $\sin A=\dfrac{12}{13}$，$\cos A=-\dfrac{5}{13}$，故 $\tan A=-\dfrac{12}{5}$.

6. 【解析】C；由 $a+b=72-22-3=47$，$7\times3+8a+9b+10\times22=9.125\times72$，得 $\begin{cases}a+b=47\\8a+9b=416\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=7\\b=40\end{cases}$，训练中命中黄圈的频率为 $\dfrac{22+40}{72}\approx0.86$，以频率估计概率，故正式比赛时射出的第一支箭命中黄圈(不小于 9 环)的概率约为 0.86.

7. 【解析】B；由 B 是线段 AC 的中点，得 $AB=BC$，即 $\log_a m=2\log_b m$，即 $\log_a m=2\dfrac{\log_a m}{\log_a b}$，所以 $\log_a b=2$，故 $b=a^2$，又 $a,b\in(1,+\infty)$，$b-(2a-1)=a^2-2a+1=(a-1)^2>0$，所以 $b>2a-1$；事实上，当 $1<a\le2$ 时，选项 C 正确；当 $a>2$ 时，选项 D 正确.

8. 【解析】D；当 $a>1$ 时，$f(x)$ 是 $[-1,+\infty)$ 上的增函数，$f(x)$ 的值域为 $\left[2-a-\dfrac{1}{a},+\infty\right)$，不满足条件；当 $\dfrac{1}{2}<a<1$ 时，$f(x)$ 是 $[-1,+\infty)$ 上的减函数，$f(x)$ 的值域为 $\left(-a,2-a-\dfrac{1}{a}\right]$，因为 $\left(-a,2-a-\dfrac{1}{a}\right]\subset(-1,0)$，满足 $|f(x)|<\dfrac{9}{4}$；当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=-\dfrac{1}{2}$ 时，满足 $|f(x)|<\dfrac{9}{4}$；当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 是 $[-1,+\infty)$ 上的增函数，$f(x)$ 的值域为 $\left[2-a-\dfrac{1}{a},-a\right)$，由 $\begin{cases}2-a-\dfrac{1}{a}>-\dfrac{9}{4}\\0<a<\dfrac{1}{2}\end{cases}$，得 $\begin{cases}a+\dfrac{1}{a}<\dfrac{17}{4}\\0<a<\dfrac{1}{2}\end{cases}$，解得：$\dfrac{1}{4}<a<\dfrac{1}{2}$，综上，所求 a 的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{4},1\right)$.

9. 【解析】BC；由图 1 易知 A 错误；由图 2 易知 B 正确；由图 3 易知 C 正确、 由图 3 及题干信息得城

镇乡村人口差为$14.1178\times(0.6389-0.3611)<14.2\times(0.64-0.36)=3.976$，D 错误.

10.【解析】ABD：$f(\log_2 3)=\dfrac{1}{1+2^{\log_2 3}}=\dfrac{1}{1+3}=\dfrac{1}{4}$，A 正确；$y=1+2^x$ 恒正且在 R 上递增，故 $y=\dfrac{1}{1+2^x}$ 是 R 上的减函数，B 正确；$y=1+2^x$ 的值域是 $(1,+\infty)$，故 $f(x)=\dfrac{1}{1+2^x}$ 的值域是 $(0,1)$，C 错；注意到 $f(x)+f(-x)=\dfrac{1}{1+2^x}+\dfrac{1}{1+2^{-x}}=\dfrac{1}{1+2^x}+\dfrac{2^x}{1+2^x}=1$，故不等式 $f(1+2x)+f(x)>1$ 等价于 $f(1+2x)+f(x)>f(x)+f(-x)$，即 $f(1+2x)>f(-x)$，又 $f(x)$ 是 R 上的减函数，故 $1+2x<-x$，解得 $x<-\dfrac{1}{3}$，D 正确.

11.【解析】ABD：延伸图象或求出解析式 $f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$，逐个判断即可得答案.

12.【解析】AC：$f(x)=\pi^x$ 在 R 上递增，所以 $f(-2)<f(\dfrac{1}{2})$，A 正确；因为 $0<\sin 1<2$，所以 $\log_2(\sin 1)<1$，又 $2^{\sin 1}>1$，故 $\log_2(\sin 1)<2^{\sin 1}$，于是 B 错误；研究 $\dfrac{\ln 2}{2}=\dfrac{\ln 4}{4}>\dfrac{\ln 5}{5}$，易知 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $(e,+\infty)$ 上递减，故 $f(2)=f(4)>f(5)$，C 正确（也可以化成同底比较：也可以 $5\ln 2=\ln 32>2\ln 5=\ln 25$）；$\log_3 4=1+\log_3\dfrac{4}{3}$，$\log_5 6=1+\log_5\dfrac{6}{5}$，$\log_3\dfrac{4}{3}>\log_3\dfrac{6}{5}=\dfrac{\log_5\frac{6}{5}}{\log_5 3}>\log_5\dfrac{6}{5}$，故 $\log_3 4>\log_5 6>0$，所以 $\log_4 3<\log_6 5$，故 D 错误.

13.【解析】81：依题意得 $2^n=16$，即 $n=4$，在 $(1+2x)^4$ 中令 $x=1$ 可得各项系数和为 $3^4=81$.

14.【解析】$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$：不妨设左顶点 A，上顶点 B，右焦点 F，由射影定理得 $|OB|^2=|OF||OA|$，即 $b^2=ac$，$a^2-c^2=ac$，即 $e^2+e-1=0$，解得 $e=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$（负值舍去）.

15.【解析】$\dfrac{125}{6}\pi$：补成长方体，半径 $2R=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2+4^2}=5$，故球 O 的体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{125}{6}\pi$.

16.【解析】$-\pi$，$(2\pi,+\infty)$；$f(x+\pi)=x+\pi+a-\sin x$，因为 $f(x+\pi)$ 是奇函数，则 $\pi+a=0$，即 $a=-\pi$，$f(x)=x-\pi+\sin x$，因为 $f'(x)=1+\cos x\ge 0$，则 $f(x)$ 递增，又 $f(2\pi)=\pi$，则 $f(x)-\pi>0\Leftrightarrow f(x)>\pi\Leftrightarrow f(x)>f(2\pi)\Leftrightarrow x>2\pi$.

17.【解析】(1) 由 $a\sin C+\sqrt{3}b=\sqrt{3}a\cos C+2c$ 及正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，

可得 $\sin A\sin C+\sqrt{3}\sin B=\sqrt{3}\sin A\cos C+2\sin C$. ……………………………………2 分

又 $\sin B=\sin(A+C)$，……………………………………………………………………3 分

所以 $\sin A\sin C+\sqrt{3}\sin A\cos C+\sqrt{3}\cos A\sin C=\sqrt{3}\sin A\cos C+2\sin C$，

化简得 $\sin A\sin C+\sqrt{3}\cos A\sin C=2\sin C$，…………………………………………4 分

因为$\sin C\neq 0$，所以$\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$，即$2\sin(A+\frac{\pi}{3})=2$，此时$\sin(A+\frac{\pi}{3})=1$，…………5分

又$A\in(0,\pi)$，所以$A+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即$A=\frac{\pi}{6}$．………………………………………………6分

(2) 由$\sin B+\sin C=2\sin A$及正弦定理可得$b+c=2a$，……………………………………7分

由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$可得$a^2=(b+c)^2-2bc-2bc\times\cos A$，……………………8分

即$4=16-2bc-2bc\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得$bc=12(2-\sqrt{3})$，……………………………………9分

所以ΔABC的面积$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times12\times(2-\sqrt{3})\times\frac{1}{2}=3(2-\sqrt{3})$．…………………10分

18.【解析】(1) 依题意可得$(a_{n+1}-3a_n)(a_{n+1}+a_n)=0$，……………………………………2分

又$a_n>0$，所以$a_{n+1}-3a_n=0$，即$\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$，………………………………………………3分

所以$\{a_n\}$是首项为2，公比为3的等比数列，……………………………………………4分

所以$a_n=a_1\cdot3^{n-1}=2\times3^{n-1}$，即$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2\times3^{n-1}$．……………………5分

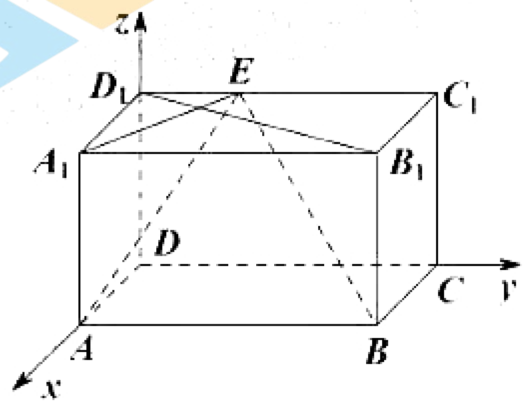
(2) 由(1)知$a_n=2\times3^{n-1}$，所以$b_n=\frac{2n}{3a_n}=\frac{n}{3^n}$，……………………………………6分

令$T_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{n-1}{3^{n-1}}+\frac{n}{3^n}$，① $\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}}$，② …………8分

①−②得$\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^n})-\frac{n}{3^{n+1}}$，…………11分

所以$T_n=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\times3^n}$，即数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\times3^n}$．…………………12分

19.【解析】(1) 连结B_1D_1，则直线B_1D_1即为所求的直线l．理由如下：…………………2分



连结A_1E，因为$\frac{D_1E}{A_1D_1}=\frac{D_1A_1}{A_1B_1}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\angle ED_1A_1=\angle D_1A_1B_1=90^\circ$，

所以$\Delta ED_1A_1\sim\Delta D_1A_1B_1$，

故$\angle D_1A_1E=\angle A_1B_1D_1$，又$\angle A_1B_1D_1+\angle A_1D_1B_1=90^\circ$，

所以$\angle D_1A_1E+\angle A_1D_1B_1=90^\circ$，所以$B_1D_1\perp A_1E$，

又$AA_1\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，所以$AA_1\perp B_1D_1$，

又$A_1E\cap AA_1=A_1$，所以$B_1D_1\perp$平面AA_1E，故$B_1D_1\perp AE$，所以直线B_1D_1即为所求的直线l．…5分

[说明]若连结A_1E，作$D_1H\perp A_1E$于H，则直线D_1H为所求的直线l．给出相应理由，同样给至5分．

(2) 以D为原点，建立空间直角坐标系$D-xyz$如图所示，不妨设$AD=3$，则$AB=3\sqrt{3}$，…………6分

$A(3,0,0)$，$B(3,3\sqrt{3},0)$，$E(0,\sqrt{3},3)$，$D_1(0,0,3)$，$B_1(3,3\sqrt{3},3)$，……………………7 分

$\overrightarrow{D_1B_1}=(3,3\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AB}=(0,3\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AE}=(-3,\sqrt{3},3)$，……………………8 分

设平面 ABE 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=3\sqrt{3}y=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=-3x+\sqrt{3}y+3z=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}y=0\\ x=z\end{cases}$，

令 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$，……………………10 分

设直线 l 与平面 ABE 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{D_1B_1},\boldsymbol{n}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{D_1B_1}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{D_1B_1}\right|\left|\boldsymbol{n}\right|}=\dfrac{3}{\sqrt{36}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

所以直线 l 与平面 ABE 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，……………………12 分

20.【解析】(1) $\bar{x}=\dfrac{160.5+165+167+170+170.5+173+174+180}{8}=170$，……………………2 分

代入 $\bar{y}=1.009\times170+5.470=177$ ，……………………4 分

$y_8=177\times8-(168+170+172.5+187+174.5+176+180)=188$，……………………6 分

(2) 因为 $x_4=170=\bar{x}$，所以 x_4 的预报值恰为 $\bar{y}$，……………………7 分

故残差 $y_4-\bar{y}=187-177=10$ ……………………8 分

两回归直线 l 与 l' 平行. ……………………10 分

理由如下：

设回归直线 l 的斜率为 $\hat{b}$，截距为 $\hat{a}$，样本中心点为 $(\bar{x},\bar{y})$；回归直线 l' 的斜率为 $\hat{b}'$，截距为 $\hat{a}'$，样本中心点为 $(\bar{x}',\bar{y}')$，因为 $x_4-\bar{x}=0$，

$$\hat{b}'=\frac{\sum\limits_{i\neq4}^{8}(x_i-\bar{x}')(y_i-\bar{y}')}{\sum\limits_{i\neq4}^{8}(x_i-\bar{x}')^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}')}{\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{8}x_iy_i-8\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=4}^{8}(x_i-\bar{x})^2}=\hat{b},$$ ……………………11 分

因为 $y_4\neq\bar{y}$，故 $\hat{a}'=\bar{y}'-\hat{b}'\bar{x}'=\bar{y}'-\hat{b}\bar{x}=\bar{y}'-(\bar{y}-\hat{a})=\hat{a}+(\bar{y}'-\bar{y})\neq\hat{a}$，

故两回归直线 l 与 l' 平行. ……………………12 分

21.【解析】(1) 依题意可得 $a^2+b^2=4$，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，……………………2 分

解得 $a^2=3$，$b^2=1$，故 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$. ……………………4 分

(2) 易得 $A(-\sqrt{3},0)$，$B(\sqrt{3},0)$，

显然，直线 l 的斜率不为 0，设其方程为 $x=my+2$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，……………………5 分

联立方程 $\begin{cases}x=my+2\\ x^2-3y^2=3\end{cases}$，消去 x 整理得 $(m^2-3)y^2+4my+1=0$，……………………6 分

所以 $y_1+y_2=\dfrac{-4m}{m^2-3}$，$y_1y_2=\dfrac{1}{m^2-3}$． ……………………………………7 分

直线 MB：$y=\dfrac{y_1}{x_1-\sqrt{3}}(x-\sqrt{3})$，令 $x=\dfrac{3}{2}$ 得 $y=\dfrac{y_1(3-2\sqrt{3})}{2(x_1-\sqrt{3})}$，故 $Q(\dfrac{3}{2},\dfrac{y_1(3-2\sqrt{3})}{2(x_1-\sqrt{3})})$．……………8 分

$\overrightarrow{AN}=(x_2+\sqrt{3},y_2)$，$\overrightarrow{AQ}=(\dfrac{3}{2}+\sqrt{3},\dfrac{y_1(3-2\sqrt{3})}{2(x_1-\sqrt{3})})$，

$(\dfrac{3}{2}+\sqrt{3})y_2-\dfrac{y_1(3-2\sqrt{3})(x_2+\sqrt{3})}{2(x_1-\sqrt{3})}=\dfrac{(3+2\sqrt{3})y_2(x_1-\sqrt{3})-y_1(3-2\sqrt{3})(x_2+\sqrt{3})}{2(x_1-\sqrt{3})}$，(*)………9 分

又 $(3+2\sqrt{3})y_2(x_1-\sqrt{3})-y_1(3-2\sqrt{3})(x_2+\sqrt{3})=(3+2\sqrt{3})y_2(my_1+2-\sqrt{3})-y_1(3-2\sqrt{3})(my_2+2+\sqrt{3})$

$=[(3+2\sqrt{3})m-(3-2\sqrt{3})m]y_1y_2+(3+2\sqrt{3})(2-\sqrt{3})y_2+(2\sqrt{3}-3)(2+\sqrt{3})y_1$

$=4\sqrt{3}my_1y_2+\sqrt{3}(y_1+y_2)=\dfrac{4\sqrt{3}m}{m^2-3}+\dfrac{-4\sqrt{3}m}{m^2-3}=0$，即 (*) 的值为 0．…………………………11 分

所以 $\overrightarrow{AN}\,//\,\overrightarrow{AQ}$，故 A、Q、N 三点共线．……………………………………12 分

22.【解析】(1) $f'(x)=(x-1)+a\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}(x-1)(x+a)$（$x>0$），……………………………1 分

因为 $x>0$，故 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数等价于 $(x-1)(x+a)\geq 0$ 恒成立，…………………2 分

所以 $a=-1$，即函数 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数的 a 的值为 -1．……………………………4 分

(2) $g'(x)=(x-1)^2-f'(x)=(x-1)^2-\dfrac{1}{x}(x-1)(x+a)=\dfrac{1}{x}(x-1)(x^2-2x-a)$，　…………5 分

依题意知 x_1,x_2 是 $h(x)=x^2-2x-a$ 的两个零点，且 $0<x_1<1<x_2$，

$x_1+x_2=2$，$x_1\cdot x_2=-a$，……………………………………………………………6 分

$h(0)=-a>0$，$h(1)=1^2-2-a<0$，解得 $-1<a<0$，………………………………………7 分

又 $g(x_1)=\dfrac{1}{3}(x_1-1)^3-f(x_1)$，$g(x_2)=\dfrac{1}{3}(x_2-1)^3-f(x_2)$，

故 $g(x_1)+g(x_2)=\dfrac{1}{3}(x_1-1)^3-f(x_1)+\dfrac{1}{3}(x_2-1)^3-f(x_2)=-f(x_1)-f(x_2)$

$=-\dfrac{1}{2}\left[(x_1-1)^2+(x_2-1)^2\right]-a(x_1+x_2)+a(\ln x_1+\ln x_2)$

$=(x_1-1)(x_2-1)-a(x_1+x_2)+a(\ln x_1+\ln x_2)$

$=x_1x_2-x_1-x_2+1-a(x_1+x_2)+a\ln(x_1x_2)$ ……………………………………8 分

$=-1-3a+a\ln(-a)$ ………………………………………………………………9 分

故原不等式 $g(x_1)+g(x_2)+3a+\dfrac{1}{2}<0$ 等价于 $-\dfrac{1}{2}+a\ln(-a)<0$，

令 $-a=t$，则 $0<t<1$，原不等式等价于 $-\frac{1}{2}-t\ln t<0$，即 $\frac{1}{2t}+\ln t>0$ ……………………………10 分

令 $\varphi(t)=\frac{1}{2t}+\ln t, 0<t<1$。则 $\varphi'(t)=-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{t}=\frac{1}{t^2}\left(t-\frac{1}{2}\right)$，

$\varphi(t)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上递减，在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上递增，

当 $t=\frac{1}{2}$ 时 $\varphi(t)$ 取最小值 $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=1-\ln 2>0$，故 $\varphi(t)=\frac{1}{2t}+\ln t>0$

综上所述，$g(x_1)+g(x_2)+3a+\frac{1}{2}<0$ ……………………………………………………………12 分