北京市第一七一中学 2022-2023 学年度第二学期
高一年级数学科目 期中调研试题
（时长：100 分钟 总分值：150 分）

一、选择题

1．复数$\dfrac{1}{\mathrm{i}+1}$在复平面内对应的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．设向量$\vec{a}=(m,3)$，$\vec{b}=(1,2)$，$\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$.若$|\vec{a}|=|\vec{c}|$，则$m=$（　　）

A．1　　B．-1　　C．2　　D．-2

3．陀螺是中国民间最早的娱乐工具之一，也称陀罗.图 1 是一种木陀螺，可近似地看作是一个圆锥和一个圆柱的组合体，其直观图如图 2 所示，其中B,C分别是上、下底面圆的圆心，且$AC=3AB=6$，底面圆的半径为 2，则该陀螺的体积是（　　）


图1

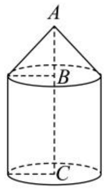


图2

A．$\dfrac{80\pi}{3}$　　B．$\dfrac{70\pi}{3}$　　C．20π　　D．$\dfrac{56\pi}{3}$

4. 已知向量$\vec{a}=(2,1)$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=10,|\vec{a}+\vec{b}|=5\sqrt{2}$，则$|\vec{b}|=$（　　）

A．$\sqrt{5}$　　B．$\sqrt{10}$　　C．5　　D．25

5. 已知向量$\vec{a}=(1,-\cos\theta)$，$\vec{b}=(1,2\cos\theta)$且$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\cos2\theta$等于（　　）

A．-1　　B．0　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

6．设点D为$\triangle ABC$中BC边上的中点，O为AD边上靠近点A的三等分点，则（　　）

A．$\overrightarrow{BO}=-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$　　B．$\overrightarrow{BO}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

C．$\overrightarrow{BO}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$　　D．$\overrightarrow{BO}=-\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

7.下列函数中，最小正周期为 π 的奇函数是（　　）

A．$y=\sin2x+\cos2x$　B．$y=\sin x+\cos x$　C．$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$　D．$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

8. 已知非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，则“$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{b}\right|$”是“$\vec{a}-2\vec{b}=\vec{0}$”成立的（ ）

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件 C．充分必要条件 D．既不充分也不必要条件

9. 若 $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$，则 $\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\alpha\right)=$（ ）

A．$-\frac{7}{9}$ B．$\frac{2}{3}$ C．$-\frac{2}{3}$ D．$\frac{7}{9}$

10. 若向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足：$\vec{a}\neq\vec{b},\left|\vec{c}\right|=1$，且$(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$，则$|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{b}|$的最小值为（ ）

A．$\frac{5}{2}$ B．2 C．1 D．$\frac{1}{2}$

二、填空题

11. 复数z满足$z=1-\mathrm{i}$，则$|z|=$__________.

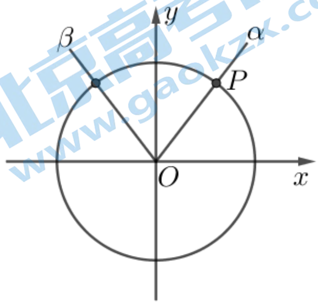
12．若$\sin(\alpha-\beta)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\alpha$，$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，则$\beta=$__________.

13．已知一个正四棱锥的底面边长为2，高为$\sqrt{3}$，则该正四棱锥的表面积__________.

14．角α,β的始边均为x轴非负半轴，它们的终边关于y轴对称.

如图，角α的终边与单位圆交于点$P\left(\frac{3}{5},y_0\right)(y_0>0)$，

则$\sin\beta=$________，$\tan(\alpha+\beta)=$________.



15．在ΔABC中，$AB=AC$，D为线段AC的中点，$BD=1$，

(1) 若$\angle A=\frac{\pi}{3}$，则ΔABC的面积为______________.

(2) ΔABC 面积的最大值为__________________.

三、解答题

16. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 120°，且 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=4$.

（1）求$|\vec{a}-\vec{b}|$；

（2）当 $k(k\in\mathbf{R})$ 为何值时$(\vec{a}+2\vec{b})\perp(k\vec{a}-\vec{b})$.

17. 已知函数$f(x)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\cos^2\frac{x}{2}$.

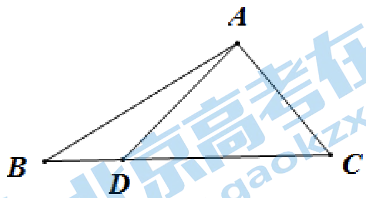
（1）求$f\left(\frac{\pi}{3}\right)$的值和$f(x)$的最小正周期；

（2）求$f(x)$在 $[0,\pi]$ 上的最值.

18. 如图，在$\triangle ABC$中，D是BC边上一点，$\cos C=\frac{3}{5}$，$CD=7$，$AC=5$.

（1）求 AD 的长；

（2）若 $AB=8$，求角B大小.



19. 在$\triangle ABC$中，$a=2\sqrt{3}$，$a^2+c^2-\sqrt{3}ac=b^2$.

(1)求$\angle B$；

(2)再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使$\triangle ABC$存在且唯一确定，求$\triangle ABC$的面积.

条件①：$b=3$；条件②：$\cos A=\frac{4}{5}$；条件③：$\triangle ABC$的周长为$4+2\sqrt{3}$.

20. 无数次借着你的光，看到未曾见过的世界：国庆七十周年、建党百年天安门广场三千人合唱的磅礴震撼，“930 烈士纪念日”向人民英雄敬献花篮仪式的凝重庄严……171 金帆合唱团，这绝不是一个抽象的名字，而是艰辛与光耀的延展，当你想起他，应是四季人间，应是繁星璀璨！

这是开学典礼中，我校金帆合唱团的颁奖词，听后让人热血沸腾，让人心向往之.图 1 就是金帆排练厅，大家都亲切的称之为“六角楼”，其造型别致，可以理解为一个正六棱柱(图 2)由上底面各棱向内切割为正六棱台(图 3)，正六棱柱的侧棱 DH 交 A_1D_1 的延长线于点 H，经测量 $\angle D_1DH=12^{\circ}$，且 $AB=10$，$A_1B_1=8$.($\sin 12^{\circ}\approx 0.2$)

图 1

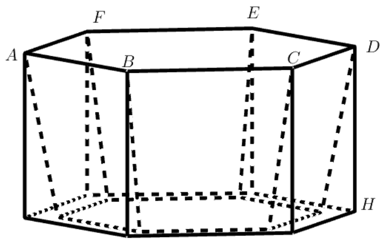


图 2

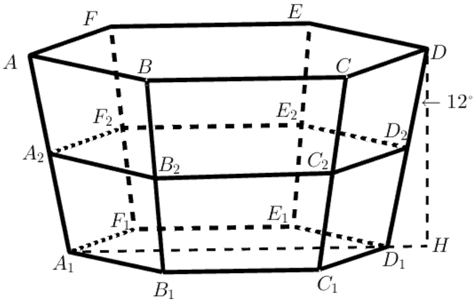


图 3

(1) 写出三条正六棱台的结构特征.

(2)“六角楼”一楼为办公区域，二楼为金帆排练厅，假设排练厅地板恰好为六棱柱中截面，忽略墙壁厚度，估算金帆排练厅对应几何体体积.

(棱台体积公式：$V=\dfrac{1}{3}h(S'+\sqrt{S'S}+S)$)

(3)“小迷糊”站在“六角楼”下，陶醉在歌声里。“大聪明”走过来说：“数学是理性的音乐，音乐是感性的数学。学好数学方能更好的欣赏音乐，比如咱们刚刚听到的一个复合音就可以表示为函数 $S(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x(x\in R)$，你看这多美妙！”

“小迷糊”：“……”

亲爱的同学们，快来帮“小迷糊”求一下$S(x)$的最大值吧.

注：可以参考（不限于）下面公式：

① n元均值不等式：

$$\frac{1}{n}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)\ge\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}$$，其中$x_1,x_2,\cdots,x_n$均为正数.

②琴生不等式：

若函数$f(x)$在(a,b)上为“凸函数”，且$x_1,x_2,\cdots,x_n$为(a,b)上任意n个实数，则

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\ge\frac{1}{n}\left[f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+\cdots+f\left(x_n\right)\right]$$

注：$y=\sin x$在$(0,\pi)$是“凸函数”

③ 柯西不等式：

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)\ge\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2$$

注：其二元形式为$\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(b_1^2+b_2^2\right)\ge\left(a_1b_1+a_2b_2\right)^2$

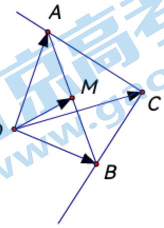
高一期中数学答案

一、选择

1. D 2. B 3.　D　4. C 5. B

6. D　　7.　D　8. B 9.　A　10. B

10：解析



$\left|\vec a+\vec b\right|+\left|\vec a-\vec b\right|$

二、填空

11. $\sqrt{2}$　　12. $\frac{\pi}{4}$　　13. 12　　14. $\frac{4}{5}$,0　　15. $\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{2}{3}$

15 题解析：设 AB=AC=x

$$\cos A=\frac{x^2+\frac{x^2}{4}-1}{x^2}$$

$$S=\frac{1}{2}x^2\sqrt{1-\cos^2 A}$$

$S=\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{9}{16}x^4+\frac{5}{2}x^2-1}$ 换元通过二次函数求最值即可$x^2=\frac{20}{9}$时面积取到最大值$\frac{2}{3}$

三、解答

16（1）　由已知得 $\vec a\cdot\vec b=2\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$.

$\left|\vec a-\vec b\right|=2\sqrt{7}$.

（2）　若 $\left(\vec a+2\vec b\right)\perp\left(k\vec a-\vec b\right)$，即 $\left(\vec a+2\vec b\right)\cdot\left(k\vec a-\vec b\right)=0$,

所以 $k\vec a^2+(2k-1)\vec a\cdot\vec b-2\vec b^2=0$，即 $4k-4\times(2k-1)-2\times16=0$,

所以 $k=-7$,

即当 $k=-7$ 时，$\left(\vec a+2\vec b\right)\perp\left(k\vec a-\vec b\right)$.

17（1）　$f(x)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\cos^2\frac{x}{2}$

$=\sqrt{3}\sin x+\cos x+1=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1.$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+1=3$

$f(x)$ 的最小正周期为 2π .

(2) 因为 $x\in[0,\pi]$，所以 $x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$.

所以 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

所以 $2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1\in[0,3]$,即 $f(x)\in[0,3]$.

$x=\frac{\pi}{3}$ 时，最大值 3

$x=\pi$ 时，最小值 $-\frac{1}{2}$

18、 $AD=4\sqrt{2},\angle B=\frac{\pi}{6}$

19. (1) $\frac{\pi}{6}$

(2) 选①： $\triangle ABC$ 不唯一；选②： $S=\frac{4+3\sqrt{3}}{2}$ ；选③： $S=\sqrt{3}$

(2) 选①，余弦定理知 $c^2-6c+3=0$ ，知 c 有两个，不符合题意；

选②，由正弦定理知 b ，再利用 $\sin C=\sin(A+B)$ 结合面积公式即可得解；

选③：由已知得 $b+c=4$ ，再结合余弦定理及面积公式求解.

【详解】 (1) 利用余弦定理结合 $a^2+c^2-\sqrt{3}ac=b^2$ ，

得 $\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，即 $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

因为 $0<B<\pi$ ，所以 $\angle B=\frac{\pi}{6}$ ；

(2)

选择条件①:

因为 $a=2\sqrt{3}$ ， $b=3$ ， $B=\frac{\pi}{6}$ ，由余弦弦定理知 $a^2+c^2-\sqrt{3}ac=b^2$ ，

即 $c^2-6c+3=0$ ，解得 $c=3+\sqrt{6}$ 或 $c=3-\sqrt{6}$ 都符合三角形的性质，

故此时满足条件的 $\triangle ABC$ 有两个，不符合题意.

选择条件②:

因为 $\cos A=\frac{4}{5}$，所以 $\sin A=\frac{3}{5}$

因为 $a=2\sqrt{3}$，由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}\Rightarrow b=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

又 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{4+3\sqrt{3}}{2}$

选择条件③:

因为 $\triangle ABC$ 的周长为 $4+2\sqrt{3}$，$a=2\sqrt{3}$，即 $b+c=4$ ①

又 $a^2+c^2-\sqrt{3}ac=b^2$，即 $12+c^2-6c=b^2$ ②

由①②解方程组 $b=c=2$

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}$.

21 解析:

（1） 类似于上下底面平行，相似，都是正六边形，侧棱等长，侧棱延长交于一点，侧面都是等腰梯形，等等

（2） 在 ΔD_1DH 中，可求 $D_1D=10$，$DH=4\sqrt{6}$

所以排练厅上底面为边长 10 的正六边形，下底面为边长 9 的正六边形，高为 $2\sqrt{6}$，

所以 $S_{上底面}=150\sqrt{3}$，$S_{下底面}=\frac{243\sqrt{3}}{2}$，$\sqrt{S_{上底面}S_{下底面}}=\sqrt{150\sqrt{3}\cdot\frac{243\sqrt{3}}{2}}=135\sqrt{3}$

所以 $V=\frac{1}{3}2\sqrt{6}(150\sqrt{3}+135\sqrt{3}+\frac{243\sqrt{3}}{2})=813\sqrt{2}$

（3）四元均值不等式

$$g^2(x)=\sin^2 x(1+\cos x)^2,$$

$$=(1-\cos x)(1+\cos x)^3$$

$$=\frac{1}{3}\bullet 3(1-\cos x)(1+\cos x)^3$$

$$\le\frac{1}{3}\bullet\left(\frac{3(1-\cos x)+(1+\cos x)+(1+\cos x)+(1+\cos x)}{4}\right)^4$$

$$=\frac{27}{16}$$

当且仅当 $3(1-\cos x)=1+\cos x$，即 $\cos x=\frac{1}{2}$ 时取等

1、琴生不等式法

$$g(x)=\frac{1}{2}(\sin x+\sin x+\sin 2x),$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{\sin x+\sin x+\sin(\pi-2x)}{3}\right)$$

$$\le\frac{3}{2}\sin\frac{x+x+\pi-2x}{3}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

当且仅当 $x=\pi-2x$ 即 $x=\frac{\pi}{3}$ 取等

2、二元均值不等式推广（$ab\le\frac{a^2+b^2}{2}$）

$$g^2(x)=(\sin x+\sin x\cos x)^2,$$

$$=(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin x\cos x\sqrt{3})^2$$

$$\le(\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sin^2 x+\frac{3}{4}}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sin^2 x+3\cos^2 x}{2})^2$$

$$=\frac{27}{16}$$

当且仅当 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取等

4.柯西不等式

$$g^2(x)=(\sin x+\sin x\cos x)^2$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\cdot\sqrt{2}\cos x\right)^2$$

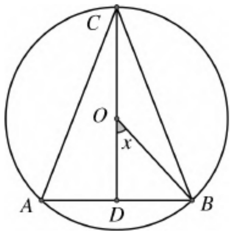
$$\le\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\sin^2 x\right)\left(\frac{4}{3}\sin^2 x+2\cos^2 x\right)$$

$$=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\sin^2 x\right)\left(-\frac{2}{3}\sin^2 x+2\right)$$ 根据二次函数最值

$$\le\frac{27}{16}$$

柯西与二次函数取到最值时刻相同，当且仅当 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

5、数形结合法



设单位元内接等腰三角形 ABC，

$S_{ABC}=DC\bullet DB=(1+\cos x)\sin x$

因为圆内接等腰三角形中，等边面积最大（可通过调整法说明）

所以 $S_{ABC}=DC\bullet DB=(1+\cos x)\sin x\le 3\cdot\frac{1}{2}r^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。