通州区 2020-2021 学年第二学期期中考试

高二数学

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每个小题给出的四个备选答案中，只有一个是符合题目要求的．

1. 函数 f（x）＝ln$x$ 的定义域是（　　）

A. （0，+∞）　　B. [0，+∞）

C. （－∞，0）∪（0，+∞）　　D. R

2. 下列函数中，在区间（0，+∞）上单调递减的是（　　）

A. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$　　B. $f\left(x\right)=x^{3}$

C. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$　　D. $f\left(x\right)=\log_{2}x$

3. 已知函数 $f(x)=\frac{1-\ln x}{x^{2}}$，那么方程 f（x）＝0 的解是（　　）

A. $x=\frac{1}{e}$　　B. x＝1　　C. x＝e　　D. x＝1 或 x＝e

4. 已知函数 f（x）＝e^x（1+x），那么不等式 f（x）＜0 的解集是（　　）

A. （－∞，－e）　　B. （－∞，－1）　　C. （－∞，1）　　D. （－∞，e）

5. 已知角 α 的顶点与原点重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边与单位圆交于点 $P\left(\frac{1}{3},-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$，那么 $\cos\left(\pi-\alpha\right)$ 等于（　　）

A. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

6. 已知等比数列$\{a_n\}$的公比为$\frac{1}{2}$，且 a_2＝－2，那么 a_6 等于（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $-\frac{1}{6}$　　D. $-\frac{1}{8}$

7. 已知双曲线 $x^{2}-\frac{y^{2}}{b^{2}}=1(b>0)$ 的一条渐近线方程为 y＝2x，那么该双曲线的离心率是（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\sqrt{5}$

8. 已知函数 $f(x)=2ax^2+(a+2)x+1$（$a<0$），那么不等式 $f(x)>0$ 的解集是（　　）

A. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{a}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{2}\right)$

C. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty,\frac{1}{a}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

9. 已知关于 x 的不等式 $2^x-a>0$ 在区间 $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ 上有解，那么实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(-\infty,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　C. $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$

10. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ \ln x, & x>0 \end{cases}$，若函数 $g(x)=f(x)+2x+\ln a$（$a>0$）有 2 个零点，则数 a 的最小值是（　　）

A. $\frac{1}{e}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. e

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11. 在△ABC 中，已知 $AC=2$，$BC=3$，$B=\frac{\pi}{6}$，那么 $\sin A=$_____．

12. 已知等差数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_3=5$，那么数列$\{a_n\}$的前 8 项和 $S_8=$_____．

13. 已知抛物线的标准方程为 $y^2=8x$，那么该抛物线的准线方程是_____．

14. 已知二次函数 $f(x)=ax^2-2x+1$ 在区间[1，3]上是单调函数，那么实数 a的取值范围是_____．

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\ge 0 \\ -x^2, & x<0 \end{cases}$，若对于任意 $x\in[t, t+1]$，不等式 $\frac{1}{4}f(t-x)\ge f(x)$ 恒成立，那么实数 t 的最大值是_____．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分，解答应写出必要的文字说明、证期过程或演算步骤．

16. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q>0$，且 $a_3=4, a_5=16$，．

（I）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（II）设 $b_n=a_n-3$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n．

17. 在△ABC中，角A，B，C的对边分别是a，b，c，且$a=3\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}$，$\cos A=\frac{\sqrt{3}}{3}$

（I）求b 的值；

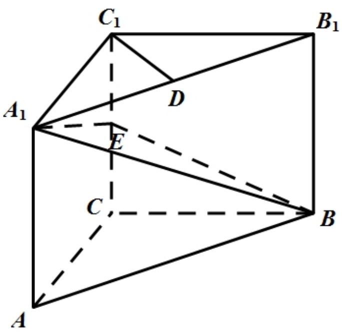
（II）求△ABC的面积.

18. 已知函数f（x）＝$\sin x\cos x-\sin^2 x$.

（I）求$f\left(x\right)$的单调递增区间；

（II）求$f\left(x\right)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值.

19. 如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1\perp$平面$ABC, AA_1=AC=BC=2$，$\angle ACB=90^\circ$，D,E分别是A_1B_1,CC_1的中点



（1）求证：$C_1D//$平面A_1BE；

（2）求直线BC_1与平面A_1BE所成角的正弦值；

（3）在棱CC_1上是否存在一点P，使得平面PAB与平面A_1BE所成锐二面角为60°？若存在，求出P点的坐标；若不存在，请说明理由.

20. 已知函数 f（x）满足 f（x）$+2f$（$-x$）$=x+m$，$m\in$R.

（I）若 $m=0$，求 f（2）的值；

（II）求证：$f(x)=-x+\dfrac{m}{3}$；

（III）若对于任意 $x\in[1，e]$，都有 $f(x)\quad -\dfrac{1}{3}\ln x-x+2$ 成立，求 m 的取值范围.

21. 已如椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的有顶点为 M（2，0），且离心率 $e=\dfrac{1}{2}$，点 A，B 是椭圆 C 上异于点 M 的不同的两点.

（I）求椭圆 C 的方程；

（II）设直线 MA 与直线 MB 的斜率分别为 k_1，k_2，若 $k_1\cdot k_2=\dfrac{1}{4}$，证明：直线 AB 一定过定点.

参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每个小题给出的四个备选答案中，只有一个是符合题目要求的．

1. 【答案】A

【解析】

【分析】

根据对数函数的定义域选出正确选项.

【详解】由于 $f\left(x\right)=\ln x$ 是对数函数，所以其定义域为 $\left(0,+\infty\right)$.

故选：A

【点睛】本小题主要考查对数函数的定义域，属于基础题.

2. 【答案】C

【解析】

【分析】

对选项逐一分析函数在区间 $\left(0,+\infty\right)$ 上的单调性，由此确定正确选项.

【详解】对于 A 选项，$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上递增，不符合题意；

对于 B 选项，$f\left(x\right)=x^3$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上递增，不符合题意；

对于 C 选项，$f\left(x\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上递减，符合题意；

对于 D 选项，$f\left(x\right)=\log_2 x$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上递增，不符合题意；

故选：C

【点睛】本小题主要考查函数的单调性，属于基础题.

3. 【答案】C

【解析】

【分析】

通过解方程求得 $f\left(x\right)=0$ 的解.

【详解】依题意 $f\left(x\right)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0$，所以 $1-\ln x=0,\ln x=1,x=e$.

故选：C

【点睛】本小题主要考查函数零点的求法，属于基础题.

4. 【答案】B

【解析】

【分析】

结合指数函数的性质，求得不等式的解集.

【详解】由于对任意 $x\in\mathbf{R}$，$e^x>0$，所以不等式 $f\left(x\right)<0\Leftrightarrow x+1<0\Leftrightarrow x<-1$，所以不等式的解集为 $\left(-\infty,-1\right)$

故选：B

【点睛】本小题主要考查含有指数函数的不等式的解法，属于基础题.

5. 【答案】B

【解析】

【分析】

先根据诱导公式化简得 $\cos\left(\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha$，再根据三角函数的单位圆定义即可求得答案.

【详解】解：根据题意，由三角函数的单位圆定义得：$\cos\alpha=x=\frac{1}{3}$

$\therefore\cos\left(\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha=-\frac{1}{3}$

故选：B.

【点睛】本题考查三角函数的定义，诱导公式，是基础题.

6. 【答案】D

【解析】

【分析】

根据等比数列通项公式求得 a_6.

【详解】由于 $\left\{a_n\right\}$ 是等比数列，所以 $a_6=a_2\cdot q^4=\left(-2\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=-\frac{1}{8}$.

故选：D

【点睛】本小题主要考查等比数列通项公式的基本量计算，属于基础题.

7. 【答案】D

【解析】

【分析】

根据 $\frac{b}{a}$ 和 $\frac{c}{a}$ 的关系求得离心率.

【详解】由于双曲线的渐近线为 $y=2x$，所以 $\frac{b}{a}=2$，

所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$.

故选：D

【点睛】本小题主要考查双曲线离心率的求法，属于基础题.

8. 【答案】A

【解析】

【分析】

对 $f(x)$ 因式分解，比较 $f(x)=0$ 所得两根的大小，由此求得 $f(x)>0$ 的解集.

【详解】依题意 $f(x)=(ax+1)(2x+1)$，令 $f(x)=0$，

由于 $a<0$，故解得 $x_1=-\frac{1}{2},x_2=-\frac{1}{a}$，且 $x_1<x_2$，

所以 $f(x)>0$ 的解集为 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{a}\right)$.

故选：A

【点睛】本小题主要考查一元二次不等式的解法，属于基础题.

9. 【答案】B

【解析】

【分析】

利用分离常数法，结合指数函数的性质，求得 a 的取值范围.

【详解】由于关于 x 的不等式 $2^x-a>0$ 在区间 $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ 上有解，

所以存在 $x\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$，使得 $a<2^x$，也即 $a<\left(2^x\right)_{\max}$，

由于 $y=2^x$ 在 $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ 上递增，当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$y=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $a<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：B

【点睛】本小题主要考查存在性问题的求解，属于基础题.

10. 【答案】A

【解析】

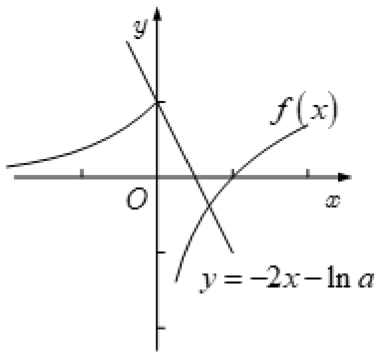
【分析】

令 $g(x)=0$，将问题转化为函数 $f(x)$ 与函数 $y=-2x-\ln a\,(a>0)$ 的图象有两个不同的交点来求解.

【详解】令 $g(x)=0$ 得 $f(x)=-2x-\ln a$，若 $g(x)$ 有两个零点，则函数 $f(x)$ 与函数 $y=-2x-\ln a\,(a>0)$ 的图象有两个不同的交点.

画出函数 $f(x)$ 与函数 $y=-2x-\ln a\,(a>0)$ 的图象如下图所示，当直线过点 $(0,1)$ 时，两个函数图象有两个交点，此时 $1=-2\times0-\ln a\Rightarrow a=\frac{1}{e}$.由图可知，当直线向下平移时，可使两个函数图象有两个交点，所以 $-\ln a\le1\Rightarrow a\ge\frac{1}{e}$，所以 a 的最小值为 $\frac{1}{e}$.

故选：A



【点睛】本小题主要考查函数零点问题的求解，考查数形结合的数学思想方法，属于中档题.

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 【答案】$\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】

利用正弦定理列方程，解方程求得 $\sin A$.

【详解】依题意 $b=2,a=3,B=\frac{\pi}{6}$，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

所以 $\frac{3}{\sin A}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}\Rightarrow\sin A=\frac{3\sin\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{3}{4}$.

故答案为：$\frac{3}{4}$

【点睛】本小题主要考查正弦定理解三角形，属于基础题.

12. 【答案】64

【解析】

【分析】

先求得 d，再求得 S_8.

【详解】依题意 $d=\frac{a_3-a_1}{3-1}=\frac{5-1}{2}=2$，所以 $S_8=8\times1+\frac{8\times7}{2}\times2=64$.

故答案为：64

【点睛】本小题主要考查等差数列通项公式的基本量计算，考查等差数列前 n 项和公式，属于基础题.

13. 【答案】$x=-2$

【解析】

【分析】

根据抛物线的方程直接求解即可.

【详解】解：因为抛物线的标准方程为 $y^2=8x$，

所以抛物线的焦点在 x 正半轴上，且 $p=4$，

所以抛物线的准线方程为：$x=-\frac{p}{2}=-2$.

故答案为：$x=-2$

【点睛】本题考查抛物线的准线方程，是基础题.

14. 【答案】$(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{3}\right]\cup[1,+\infty)$

【解析】

【分析】

根据二次函数的性质列不等式，解不等式求得 a 的取值范围.

【详解】由于 $f\left(x\right)$ 为二次函数，所以 $a\neq 0$，其对称轴为 $x=\frac{1}{a}$，

要使 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[1,3\right]$ 上是单调函数，则需其对称轴 $x=\frac{1}{a}$ 在区间 $\left[1,3\right]$ 两侧，

即 $\frac{1}{a}\leq 1$ 或 $\frac{1}{a}\geq 3$，

解得 $a<0$，或 $a\geq 1$，或 $0<a\leq\frac{1}{3}$，

所以 a 的取值范围是 $\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[1,+\infty\right)$

故答案为：$\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[1,+\infty\right)$.

【点睛】本小题主要考查二次函数的单调性，属于中档题.

15. 【答案】$-\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】

判断函数的奇偶性、单调性，根据函数的单调性进行求解即可 .

【详解】当 $x>0$ 时，$f(-x)=-(-x)^2=-f(x)$，而 $f(x)=x^2>0$，函数单调递增，

当 $x<0$ 时，$f(-x)=(-x)^2=-f(x)$，而 $f(x)=-x^2<0$，函数单调递减，而 $f(0)=0$，

所以函数 $f(x)$ 是实数集上的奇函数且是递增函数，

因此有：$\frac{1}{4}f(t-x)\geq f(x)\Rightarrow f(t-x)\geq 4f(x)=f(2x)\Rightarrow t-x\geq 2x\Rightarrow t\geq 3x$，

因为 $x\in[t,\ t+1]$，所以 $3x\in[3t,\ 3t+3]$，

要想对于任意 x∈[t，t+1]，不等式 $\frac{1}{4}f(t-x)\geq f(x)$ 恒成立，

则有 $t\geq 3t+3\Rightarrow t\leq-\frac{3}{2}$，实数 t 的最大值是 $-\frac{3}{2}$.

故答案为：$-\frac{3}{2}$

【点睛】本题考查了已知不等式恒成立求参数问题，考查了奇函数的单调性的应用，考查了数学运算能力.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分，解答应写出必要的文字说明、证期过程或演算步骤.

16. 【答案】（I）$a_n = 2^{n-1}$；（II）$S_n = 2^n - 3n - 1$.

【解析】

【分析】

（I）直接根据等比数列的通项公式列式解方程计算即可；

（II）先求出 $b_n = 2^{n-1} - 3$，再根据分组求和的方法求解即可得答案.

【详解】解：（I）根据题意得：$a_3 = a_1 q^2 = 4$，$a_5 = a_1 q^4 = 16$，

两式相除得：$q^2 = 4$，由于 $q > 0$，故 $q = 2$，$a_1 = 1$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为：$a_n = 2^{n-1}$.

（II）根据题意得：$b_n = a_n - 3 = 2^{n-1} - 3$，

根据分组求和的方法得：$S_n = (a_1 - 3) + (a_2 - 3) + (a_3 - 3) + \cdots + (a_n - 3)$

$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_n - 3n = \frac{1-2^n}{1-2} - 3n = 2^n - 3n - 1.$$

【点睛】本题考查等比数列的通项公式的求法，分组求和法，考查运算能力，是基础题.

17. 【答案】（I）$b = 5$；（II）$\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

【解析】

【分析】

（I）利用余弦定理列方程，解方程求得 b 的值.

（II）先求得 $\sin A$ 的值，再根据三角形的面积公式求得三角形 ABC 的面积.

【详解】（I）依题意 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$，

即 $18 = b^2 + 3 - 2b \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$，

即 $b^2 - 2b - 15 = (b-5)(b+3) = 0$，

解得 $b = 5$（负根舍去）.

（II）由于 $0 < A < \pi$，所以 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 5 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

【点睛】本小题主要考查余弦定理解三角形，考查三角形的面积公式，属于基础题.

18. 【答案】（I）$\left[k\pi-\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{\pi}{8}\right],k\in Z$；（II）最大值为$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，最小值为$-1$

【解析】

【分析】

（I）化简$f(x)$解析式，利用整体代入法求得$f(x)$的单调递增区间；

（II）根据三角函数最值的求法，求得$f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值.

【详解】（I）$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}$.

由$2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，得

$2k\pi-\frac{3\pi}{4}\le 2x\le 2k\pi+\frac{\pi}{4}$，即$k\pi-\frac{3\pi}{8}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{8}$，

所以$f(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{\pi}{8}\right],k\in Z$.

（II）由于$0\le x\le\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{4}$，

所以$-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$，$-\frac{1}{2}\le\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\le\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$-1\le\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\le\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

所以$f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值为$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，最小值$-1$.

【点睛】本小题主要考查三角函数单调区间的求法，考查三角函数在给定区间上的最值的求法，属于中档题.

19. 【答案】（1）证明见解析；（2）$\frac{\sqrt{3}}{6}$；（3）存在$P\left(0,0,\frac{\sqrt{30}}{3}\right)$.

【解析】

【分析】

（1）取AB的中点F，连接DF，交A_1B于点M，证得$C_1D//EM$，利用线面平行的判定定理，即可证得$C_1D//$平面A_1BE.

（2）以 CA,CB,CC_1 所在的直线为 x 轴、y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，求得则 $\overrightarrow{BC_1}=(0,-2,2)$ 和平面 A_1BE 的一个法向量 $\vec{n}=(1,-1,-2)$，结合向量的夹角公式，即可求解；

（3）设 $CP=a,(0<a<2)$，求得平面 PAB 的一个法向量 $\overrightarrow{m}=(a,a,2)$，结合向量的夹角公式，列出方程，即可求解.

【详解】（1）取 AB 的中点 F，连接 DF，交 A_1B 于点 M，可知 M 为 DF 的中点，

连接 EM，易知四边形 C_1DME 为平行四边形，所以 $C_1D//EM$，

又 $C_1D\not\subset$ 平面 A_1BE，$EM\subset$ 平面 A_1BE，所以 $C_1D//$ 平面 A_1BE.

（2）分别以 CA,CB,CC_1 所在的直线为 x 轴、y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，

可得 $B(0,2,0),C_1(0,0,2),E(0,0,1),A_1(2,0,2)$，

则 $\overrightarrow{BC_1}=(0,-2,2),\overrightarrow{EA_1}=(2,0,1),\overrightarrow{EB}=(0,2,-1)$，

设平面 A_1BE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EA_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2x+z=0\\ 2y-z=0\end{cases}$，令 $x=1$，可得 $y=-1,z=-2$，即 $\vec{n}=(1,-1,-2)$，

所以 $\cos\left\langle\overrightarrow{BC_1},\vec{n}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BC_1}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{BC_1}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，

所以直线 BC_1 与平面 A_1BE 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

（3）假设在棱 CC_1 是存在一点 P，设 $CP=a,(0<a<2)$，可得 $P(0,0,a)$，

由 $A(2,0,0),B(0,2,0)$，可得 $\overrightarrow{PA}=(2,0,-a),\overrightarrow{PB}=(0,2,-a)$，

设平面 PAB 的法向量为 $\overrightarrow{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PA}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2x_1-az=0\\ 2y_2-az=0\end{cases}$，令 $z=2$，可得 $x_1=a,y_1=a$，即 $\overrightarrow{m}=(a,a,2)$，

又由平面 A_1BE 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,-1,-2)$，

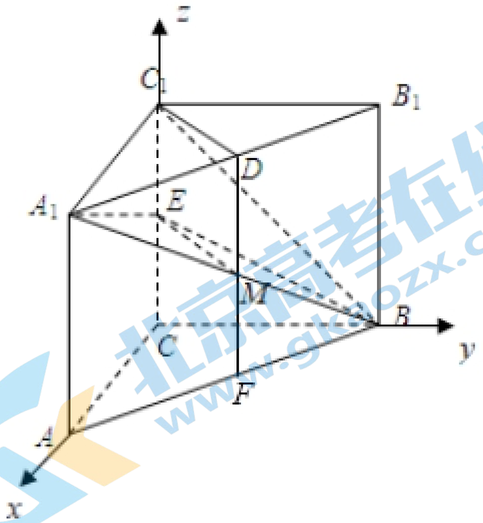
所以 $\cos\left\langle\overrightarrow{m},\vec{n}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{m}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{-4}{\sqrt{a^2+a^2+4}\cdot\sqrt{6}}$，

因为平面 PAB 与平面 A_1BE 所成二面角为 60°，

可得 $\dfrac{4}{\sqrt{a^2+a^2+4}\cdot\sqrt{6}}=\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$，解得 $a^2=\dfrac{10}{3}$，

此时 $a=\dfrac{\sqrt{30}}{3}$，符合题意，

所以在棱 CC_1 上存在一点 $P\left(0,0,\dfrac{\sqrt{30}}{3}\right)$，使得平面 PAB 与平面 A_1BE 所成二面角为 60°.



【点睛】本题考查了线面平行的判定与证明，以及空间角的求解问题，意在考查学生的空间想象能力和逻辑推理能力，解答中熟记线面位置关系的判定定理和性质定理，通过严密推理是线面位置关系判定的关键，同时对于立体几何中角的计算问题，往往可以利用空间向量法，通过求解平面的法向量，利用向量的夹角公式求解.

20. 【答案】（I）-2；（II）证明见解析；（III）$m\le 5$.

【解析】

【分析】

（I）当 $m=0$ 时，分别在函数解析式中赋值，令 $x=2$ 和 $x=-2$，列出方程组，解出 $f(2)$ 的值；

（II）在原式中，以 $-x$ 代换 x，联立两个方程，解出 $f(x)$ 可证明命题成立；

（III）由（II）代入解析式，参变分离，利用对数函数的单调性求出最值，代入不等式求出 m 的取值范围.

【详解】（I）$m=0$ 时，$f(x)+2f(-x)=x$，

$x=2$ 时，$f(2)+2f(-2)=2$

$x=-2$ 时，$f(-2)+2f(2)=-2$，即 $f(-2)=-2f(2)-2$，代入上式，解得 $f(2)=-2$

（II）证明：由 $f(x)+2f(-x)=x+m$

可得 $f(-x)+2f(x)=-x+m$，解得 $f(-x)=-2f(x)-x+m$，代入上式，解得 $f(x)=-x+\dfrac{m}{3}$

（III）由（II）

$f(x) \quad -\frac{1}{3}\ln x - x + 2$，即 $-x+\frac{m}{3} \quad -\frac{1}{3}\ln x - x + 2$

化简得：$m \le -\ln x + 6$

又 $y=-\ln x+6$ 在$[1，e]$上单调递减

$\therefore m \le -\ln e + 6 = 5$

综上：m 的取值范围为 $m \le 5$

【点睛】本题考查函数不等式的恒成立问题，考查函数解析式的求法，考查学生逻辑思维能力，属于中档题.

21. 【答案】（I）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；（II）证明见解析.

【解析】

【分析】

（I）根据顶点坐标求得 a，根据离心率求得 c，由此求得 b，进而求得椭圆方程.

（II）设出直线 AB 的方程 $x=my+t$，联立直线 AB 的方程和椭圆方程，写出根与系数关系，根据 $k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{4}$，求得 m,t 的关系式，由此判断直线 AB 过定点.

【详解】（I）由于 $M(2,0)$ 是椭圆的顶点，所以 $a=2$，由于 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以 $c=1$，所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（II）由于 A,B 是椭圆 C 上异于点 M 的不同的两点，所以可设直线 AB 的方程为 $x=my+t$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),x_1<2,x_2<2$，由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ x=my+t\end{cases}$ 消去 x 并化简得

$(3m^2+4)y^2+6mty+3t^2-12=0$，所以

$\Delta=36m^2t^2-4(3m^2+4)(3t^2-2)=-48t^2+144m^2+192>0$，即 $t^2-3m^2-4<0$.

$y_1+y_2=\frac{-6mt}{3m^2+4},y_1\cdot y_2=\frac{3t^2-12}{3m^2+4}$,

$x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2t,x_1\cdot x_2=(my_1+t)(my_2+t)=m^2y_1y_2+mt(y_1+y_2)+t^2$，

$k_1=\frac{y_1}{x_1-2},k_2=\frac{y_2}{x_2-2}$，$k_1\cdot k_2=\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{y_1y_2}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$

$$=\frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+mt\left(y_1+y_2\right)+t^2-2\left[m\left(y_1+y_2\right)+2t\right]+4}$$

$$=\frac{\frac{3t^2-12}{3m^2+4}}{m^2\cdot\frac{3t^2-12}{3m^2+4}+mt\left(\frac{-6mt}{3m^2+4}\right)+t^2-2\left[m\left(\frac{-6mt}{3m^2+4}\right)+2t\right]+4}$$

$=\frac{3\left(t+2\right)}{4\left(t-2\right)}=\frac{1}{4}$，解得 $t=-4$，所以直线 AB 的方程为 $x=my-4$，过定点 $\left(-4,0\right)$.

【点睛】本小题主要考查椭圆方程的求法，考查直线和椭圆的位置关系，考查椭圆中的定值问题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。