保密★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：A

名校联盟全国优质校 2024 届高三大联考

数学试题答案及评分参考

一、单项选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	C	A	D	B	A	C

二、多项选择题

题号	9	10	11
答案	BCD	AC	BCD

三、填空题

12. 4047　　13. $(\frac{5}{3},\frac{8}{3}]$　　14. $\sqrt{3}-1$

四、解答题

15.（13 分）

（1）证明：由 $S_n=2a_n+n-4$，当 $n=1$ 时，可得 $a_1=3$；　　…………1 分

当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}+(n-5)$，所以 $a_n=2a_{n-1}-1(n\geq 2)$，　　…………3 分

$\therefore n\geq 2$ 时，$a_n-1=2(a_{n-1}-1)$，　　…………4 分

$\therefore$ 数列 $\{a_n-1\}$ 是以 $a_1-1=2$ 为首项，$q=2$ 为公比的等比数列；　　…………5 分

$\therefore a_n-1=2^n$，$\therefore a_n=1+2^n$.　　…………6 分

（2）证明：由（1）知，$a_{n+1}=1+2^{n+1}$，$\therefore b_n=\log_2(a_{n+1}-1)=n+1$，　　…………7 分

$\therefore b_n(a_n-1)=(n+1)\cdot 2^n$，　　…………8 分

$\therefore T_n=2\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+(n+1)\times 2^n$，

$2T_n=2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(n+1)\times 2^{n+1}$　　…………11 分

$-T_n=2\times 2^1+(2^2+2^3\cdots+2^n)-(n+1)2^{n+1}$　　…………12 分

所以 $T_n=n\cdot 2^{n+1}$.　　…………13 分

16.（15 分）

（1）因为点 D 为等腰三角形 B_1AC 的底边 AC 的中点，所以 $B_1D\perp AC$． ············1 分

又因 $\cos\angle BB_1D=\dfrac{12}{13}$． 由余弦定理，$\cos\angle BB_1D=\dfrac{13^2+B_1D^2-5^2}{2\times13\times B_1D}=\dfrac{12}{13}$， ············3 分

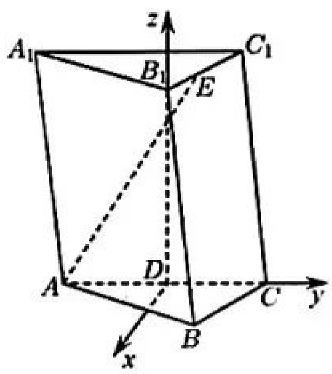
解得 $B_1D=12$． ············4 分

因为 $BD^2+B_1D^2=BB_1^2$，由勾股定理知，$BD\perp B_1D$． ············5 分

又因为 $BD\cap AC=D$，所以 $B_1D\perp$ 平面 ABC． ············6 分

因为 $BC\subset$ 平面 ABC，所以 $BC\perp B_1D$． ············7 分

（2）过点 D 作 $Dx\perp AC$，以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系，如图， ············8 分



则有 $A(0,-5,0)$，$B\left(\dfrac{24}{5},\dfrac{7}{5},0\right)$，$C(0,5,0)$，$B_1(0,0,12)$ ············9 分

又 $\overrightarrow{AB_1}=(0,5,12)$． ············10 分

设平面 B_1BC 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{B_1B}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\dfrac{24}{5}x+\dfrac{18}{5}y=0\\ \dfrac{24}{5}x+\dfrac{7}{5}y-12z=0\end{cases}$ ············11 分

令 $x=9$，解得平面 B_1BC 的一个法向量为 $\vec{m}=(9,12,5)$． ············13 分

设 $\overrightarrow{AB_1}$ 与面 B_1BC 的夹角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AB_1},\vec{m}\rangle|=\dfrac{12\times5+12\times5}{13\sqrt{81+144+25}}=\dfrac{12\sqrt{10}}{65}$， ············14 分

所以 AB_1 与面 B_1BC 的夹角的正弦值 $\dfrac{12\sqrt{10}}{65}$ ············15 分

17.（15 分）

（1）记事件 A,B,C 为男双比赛第一，二，三局甲俱乐部获胜，　　…………1 分

则所求概率为 $P=P(AB+\bar{A}BC+A\bar{B}C)$，因为 $AB,\bar{A}BC,A\bar{B}C$ 互斥　　…………2 分

故 $P=P(AB)+P(\bar{A}BC)+P(A\bar{B}C)$，又因为 A,B,C 独立　　…………3 分

所求为 $P=P(AB)+P(\bar{A}BC)+P(A\bar{B}C)=0.7\times0.7+0.3\times0.7\times0.7+0.7\times0.3\times0.7=0.784\approx0.8$

…………6 分

（2）由（1）知，甲俱乐部男双，女双，男单获胜的概率均为0.8.

乙俱乐部混双获胜的概率 $P=0.8\times0.8+0.2\times0.8\times0.8+0.8\times0.2\times0.8=0.896\approx0.9$

…………8 分

故甲俱乐部混双，女单的概率均为0.1，故

$P(X=3)=0.8\times0.8\times0.1+0.2\times0.2\times0.9=0.1$　　…………10 分

$P(X=4)=(0.2\times0.8\times0.1+0.8\times0.2\times0.1+0.8\times0.8\times0.9)\times0.8+$　　…………13 分

$(0.8\times0.2\times0.9+0.2\times0.8\times0.9+0.2\times0.2\times0.1)\times0.2\approx0.5$

$P(X=5)=1-(0.1+0.5)=0.4$

X 的分布列如下表

X	3	4	5
P(X)	0. 1	0. 5	0. 4

…………14 分

所以 $E(X)\approx3\times0.1+4\times0.5+5\times0.4=4.3$.　　…………15 分

18.（17 分）

（1）因为椭圆离心率为 $\frac{1}{2}$，得 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，　　…………1 分

从而 $a=2c$，$b=\sqrt{3}c$，　　…………2 分

$S_{\Delta ABO}=\sqrt{3}=\frac{1}{2}ab=\sqrt{3}c^2$，　　…………3 分

得 $c=1,a=2,b=\sqrt{3}$，　　…………5 分

即椭圆的方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　…………6 分

（2）由题意，过点 $P(-2,1)$ 的直线斜率存在，设为 $kx-y-(k+2)=0$.　　…………7 分

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$

联立 $\begin{cases}kx-y+2k+1=0\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，得 $(4k^2+3)x^2+8k(2k+1)x+8(2k^2+2k-1)=0$，　　…………9 分

可得$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{8k(2k+1)}{4k^2+3} \\ x_1x_2=\dfrac{8(2k^2+2k-1)}{4k^2+3} \end{cases}$， ············10 分

$y_1+y_2=\dfrac{6(2k+1)}{4k^2+3}$，且 $x_1y_2+x_2y_1=\dfrac{-24k}{3k^2+4}(*)$

直线 AN：$y=\dfrac{y_2}{x_2+2}(x+2)$ 和 $x=x_1$ 联立，

得 $H(x_1,\dfrac{y_2(x_1+2)}{x_2+2})$，$T(x_1,\dfrac{1}{2}[y_1+\dfrac{y_2(x_1+2)}{x_2+2}])$ ············11 分

令 $x=x_1\in[-2,2]$，$y=\dfrac{1}{2}[y_1+\dfrac{y_2(x_1+2)}{x_2+2}]=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1+2(y_1+y_2)}{2(x_2+2)}$

此时 $\dfrac{2y}{x+2}=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1+2(y_1+y_2)}{(x_2+2)(x_1+2)}$，

化简得 $\dfrac{2y}{x+2}=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1+2(y_1+y_2)}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}$ ············14 分

将$(*)$代入上式得 $\dfrac{2y}{x+2}=\dfrac{-24k+12(2k+1)}{8(2k^2+2k-1)-16k(2k+1)+4(4k_2+3)}$ ············16 分

化简得 $\dfrac{2y}{x+2}=3$，即 T 所在的定直线为 $3x-2y+6=0$ ············17 分

19.（17 分）

（1）因为 $a=-1$，所以 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$ ············2 分

令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$. ············3 分

当 $x\in(0,1)$, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(1,+\infty)$, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增， ············5 分

所以 $f(x)$ 只有极小值 $f(1)=-1$，没有极大值. ············6 分

（2）令 $x_1=x_0$，$x_2=\dfrac{x_0^2}{1-x_0}$.

当 $0<x_1<\dfrac{1}{2}$ 时，$0<x_2<x_1<\dfrac{1}{2}$

则原命题等价于存在实数 $x_1>x_2>0$，满足 $f(x_1)=f(x_2)$. ············8 分

易知，$a<0$，因为$f(x_1)=f(x_2)$得$\ln x_1-\frac{a}{x_1}=\ln x_2-\frac{a}{x_2}$.

所以$\ln\frac{x_1}{x_2}=a\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}$. ....10 分

又因为$x_1+x_2=\frac{x_2}{x_1}$，所以$\frac{x_2}{x_1}\ln\frac{x_1}{x_2}=a\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1x_2}=a\left(\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_1}{x_2}\right)$，

令$t=\frac{x_1}{x_2}(t>1)$代入上式得$\frac{1}{t}\ln t=a\left(\frac{1}{t}-t\right)$， ....11 分

即$\exists t>1$使得$\ln t+a(t^2-1)=0$，

令$g(t)=\ln t+a(t^2-1)$，

$g'(t)=\frac{1}{t}+2at=\frac{2at^2+1}{t}>0$，解得$0<t<\sqrt{-\frac{1}{2a}}$，

$\therefore g(t)$在$\left(0,\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right)$上单调递增，在$\left(\sqrt{-\frac{1}{2a}},+\infty\right)$上单调递减，

$g(1)=0$由题意得$\sqrt{-\frac{1}{2a}}>1$，解得$-\frac{1}{2}<a<0$， ....14 分

$\therefore g(t)$在$\left(1,\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right)$上单调递增，在$\left(\sqrt{-\frac{1}{2a}},+\infty\right)$上单调递减，其中$g\left(\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right)>0$.

下面只需证明存在t_0，使得$g(t_0)<0$，

令$p(t)=\ln t-(t-1)(t>1)$，$p'(t)=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t}<0$，$p(t)$在$(1,+\infty)$递减，所以$p(t)<p(1)=0$，

$\therefore t>1$时$\ln t<t-1$，$\therefore g(t)=\ln t+a(t^2-1)<(t-1)+a(t^2-1)=(at+a+1)(t-1)$，

由$(at+a+1)(t-1)=0$，

解得$t_2=-1-\frac{1}{a}>1$，$u(t)=(at+a+1)(t-1)$这个二次函数在$(t_2,+\infty)$单调递减，

$\therefore g\left(-1-\frac{1}{a}\right)<u(t_2)=0$，$\therefore$存在$t_0\geq-1-\frac{1}{a}$时，$g(t_0)<0$，$\therefore -\frac{1}{2}<a<0$. ....15 分

$f(a^2)=\ln a^2-\frac{1}{a}=2\ln(-a)-\frac{1}{a}$，所以$f'(a^2)=\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}=\frac{2a+1}{a^2}>0$， ....16 分

所以$f(a^2)$单调递增，故其取值范围是$(2-2\ln 2,+\infty)$. ....17 分

附 8 题、11 题、14 题 解析：

8．解析：

原式可化简为：$\cos 4x+1-2\cos 2x\cos(\frac{2014\pi^2}{x})=\cos 4x-1$，即 $\cos 2x\cos(\frac{2014\pi^2}{x})=1$，

所以 $\begin{cases}\cos 2x=1\\ \cos(\frac{2014\pi^2}{x})=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\cos 2x=-1\\ \cos(\frac{2014\pi^2}{x})=-1\end{cases}$

得：$\begin{cases}x=\frac{1007\pi}{m}\\ x=n\pi\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{2014\pi}{2m+1}\\ x=\frac{(2n+1)\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{1007\pi}{m}=n$ 或 $\frac{2014\pi}{2m+1}=\frac{(2n+1)\pi}{2}$

化简得：$mn=1007=1\times1007=19\times53$，或者 $(2m+1)(2n+1)=4028$（无解），

所以 $n=1,19,53,1007$，$x=\pi,19\pi,53\pi,1007\pi$，所以所有正根之和为 1080π，选 C

11．解析：

当 $n=1$ 时，圆 O_2 的方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$，

圆心为 $(1,1)$，半径为 1，过点 $P(-1,1)$ 向圆 O_2 引切线，据题意可知，切线斜率存在，

设切线方程为 $y=k(x+1)+1$，即 $kx-y+k+1=0$

由点到直线的距离公式可得 $\frac{|k+k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，又因为 $k_n>0$，所以 $k_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 A 不正确；

设直线 $l_n:y=k_n(x+1)+n$，由 $\begin{cases}y=k_n(x+1)+n\\ x^2+y^2-2nx-2ny+n^2=0\end{cases}$

得 $(1+k_n^2)x^2+(2k_n^2-2n)x+k_n^2=0$，

由 $\Delta=0$，即 $(2k_n^2-2n)^2-4k_n^2(1+k_n^2)=0$，

因为 $k_n>0$，所以 $k_n=\frac{n}{\sqrt{2n+1}}$，所以 $x_n=\frac{n-k_n^2}{1+k_n^2}=\frac{n}{n+1}$，

所以 $y_n=k_n(x_n+1)+n=\frac{n}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{n}{n+1}+1\right)+n=\frac{n\sqrt{2n+1}}{n+1}+n$，故 B 正确；

因为 $\sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}}=\sqrt{\frac{1-\frac{n}{n+1}}{1+\frac{n}{n+1}}}=\sqrt{\frac{1}{2n+1}}$，$\frac{x_n}{y_n-n}=\sqrt{\frac{1}{2n+1}}$，

令 $f(x)=x-\sqrt{2}\sin x$，则 $f'(x)=1-\sqrt{2}\cos x$，

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时，$f'(x)=1-\sqrt{2}\cos x<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减，

因为 $0<\sqrt{\frac{1}{2n+1}}\le\sqrt{\frac{1}{3}}<\frac{\pi}{4}$，而 $f(0)=0$，

所以 $f\left(\sqrt{\frac{1}{2n+1}}\right)<f(0)=0$，即 $\sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}}<\sqrt{2}\sin(\frac{x_n}{y_n-n})$，故 C 正确.

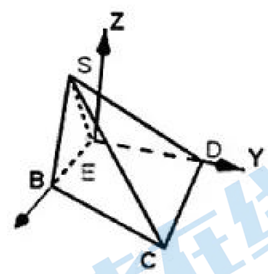
设 $C_n\left(\frac{3n}{2},n\right)$，此时 $\frac{1}{2}M_nA_n=M_nC_n$，

故而 $\frac{1}{2}|M_nA_n|+|M_nP_n|=|M_nC_n|+|M_nP|_n\ge|C_nP_n|=\frac{3}{2}n+1$，故 D 正确.

故选：BCD

14．解析：

解：$\angle SEB$ 为二面角 $S-DE-B$ 的平面角，记其为 θ，则 $\theta\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，



建立空间直角坐标系，如图所示：

则 $E(0,0,0)$，$S(\cos\theta,0,\sin\theta)$，$D\left(0,\sqrt{3},0\right)$，$C\left(2,\sqrt{3},0\right)$，

$\overline{ES}=(\cos\theta,0,\sin\theta)$，$\overline{ED}=\left(0,\sqrt{3},0\right)$，

设平面 SDE 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\overline{ES}\cdot\vec{n}=\overline{ED}\cdot\vec{n}=0$，得 $\begin{cases}x\cos\theta+z\sin\theta=0,\\ \sqrt{3}y=0,\end{cases}$

令 $x=\sin\theta$，得 $\vec{n}=(\sin\theta,0,-\cos\theta)$，$\overline{SC}=\left(2-\cos\theta,\sqrt{3},-\sin\theta\right)$，

则 $\cos\left\langle\overline{SC},\vec{n}\right\rangle=\frac{\overline{SC}\cdot\vec{n}}{\left|\overline{SC}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{2\sin\theta}{\sqrt{8-4\cos\theta}}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{2-\cos\theta}}=\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{2-\cos\theta}}$，

令 $t=2-\cos\theta$，$\theta\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，得 $t\in\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$

$\cos\left\langle\overline{SC},\vec{n}\right\rangle=\sqrt{\frac{-3+4t-t^2}{t}}=\sqrt{-\left(\frac{3}{t}+t\right)+4}\le\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$，

当且仅当 $t=\sqrt{3}$ 时，等号成立，

故直线 SC 与平面 SDE 所成角的正弦值的最大值为 $\sqrt{3}-1$.