北京市西城区高三统一测试

数学（文科）

2019.4

第Ⅰ卷（选择题　共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\,|\,0<x<2\}$，$B=\{-3,-1,1,3\}$，则集合 $(\complement_U A)\cap B=$

（A）$\{-3,-1\}$　　（B）$\{-3,-1,3\}$

（C）$\{1,3\}$　　（D）$\{-1,1\}$

2．若复数 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$，则在复平面内 z 对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限

（C）第三象限　　（D）第四象限

3．下列函数中，值域为 $\mathbf{R}$ 且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

（A）$y=x^2+2x$　　（B）$y=2^{x+1}$　　（C）$y=x^3+1$　　（D）$y=(x-1)\,|\,x\,|$

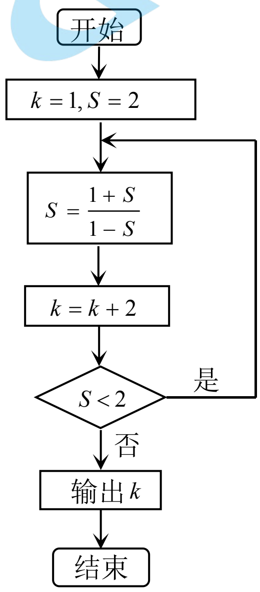
4. 执行如图所示的程序框图，则输出的 k 值为

（A）4

（B）5

（C）7

（D）9



5. 在△ABC中，已知$a=2$，$\sin(A+B)=\frac{1}{3}$，$\sin A=\frac{1}{4}$，则$c=$

（A）4　　（B）3　　（C）$\frac{8}{3}$　　（D）$\frac{4}{3}$

6. 设 a,b,m 均为正数，则“$b>a$”是“$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

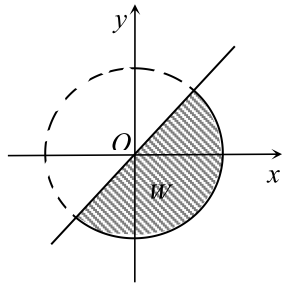
7. 如图，阴影表示的平面区域W是由曲线$x-y=0$，$x^2+y^2=2$所围成的．若点$P(x,y)$在W内（含边界），则$z=4x+3y$的最大值和最小值分别为

（A）$5\sqrt{2}$，-7

（B）$5\sqrt{2}$，$-5\sqrt{2}$

（C）7，$-5\sqrt{2}$

（D）7，-7



8. 如果把一个平面区域内两点间的距离的最大值称为此区域的直径，那么曲线$|y|=2-x^2$围成的平面区域的直径为

（A）2　　（B）4

（C）$2\sqrt{2}$　　（D）$2\sqrt{6}$

第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

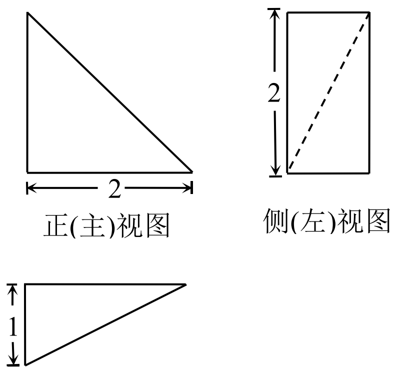
二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=60^\circ$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$____.

10．设 F_1，F_2 为双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 的两个焦点，若双曲线 C 的两个顶点恰好将线段 F_1F_2 三等分，则双曲线 C 的离心率为____.

11. 能说明“在△ ABC 中，若 $\sin 2A=\sin 2B$，则 $A=B$ ”为假命题的一组 A，B 的值是____.

12．某四棱锥的三视图如图所示，那么该四棱锥的体积为____.



正(主)视图　侧(左)视图　俯视图

13．设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(x+2), & x\geqslant -1,\\ -2x-4, & x<-1.\end{cases}$ 当

$f(a)=-1$ 时，$a=$____；如果对于任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)\geqslant b$，那么实数 b 的取值范围是____.

14．团体购买公园门票，票价如下表：

购票人数	1~50	51~100	100 以上
门票价格	13 元/人	11 元/人	9 元/人

现某单位要组织其市场部和生产部的员工游览该公园，这两个部门人数分别为 a 和 $b\,(a\geqslant b)$，若按部门作为团体，选择两个不同的时间分别购票游览公园，则共需支付门票费为 1290 元；若两个部门合在一起作为一个团体，同一时间购票游览公园，则需支付门票费为 990 元，那么这两个部门的人数 $a=$____；$b=$____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\sin x(\cos x-\sqrt{3}\sin x)$．

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{12}]$ 上的最小值和最大值．

16．（本小题满分 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n(n+1)+2$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$．

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若 a_2,a_{k+2},a_{3k+2}（$k\in\mathbf{N}^*$）为等比数列 $\{b_n\}$ 的前三项，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式．

17．（本小题满分 13 分）

为培养学生的阅读习惯，某校开展了为期一年的“弘扬传统文化，阅读经典名著”活动．活动后，为了解阅读情况，学校统计了甲、乙两组各 10 名学生的阅读量（单位：本），统计结果用茎叶图记录如下，乙组记录中有一个数据模糊，无法确认，在图中以 a 表示．

甲		乙
8 6 2 1	0	1 2 4 4
7 2 2 1 0	1	2 3 6 6 a
1	2	0

（Ⅰ）若甲组阅读量的平均值大于乙组阅读量的平均值，求图中 a 的所有可能取值；

（Ⅱ）将甲、乙两组中阅读量超过 15 本的学生称为“阅读达人”．设 $a=3$，现从所有的“阅读达人”里任取 2 人，求至少有 1 人来自甲组的概率；

（Ⅲ）记甲组阅读量的方差为 s_0^2．若在甲组中增加一个阅读量为10的学生，并记新得到的甲组阅读量的方差为 s_1^2，试比较 s_0^2，s_1^2 的大小．（结论不要求证明）

（注：$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$，其中 $\overline{x}$ 为数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数）

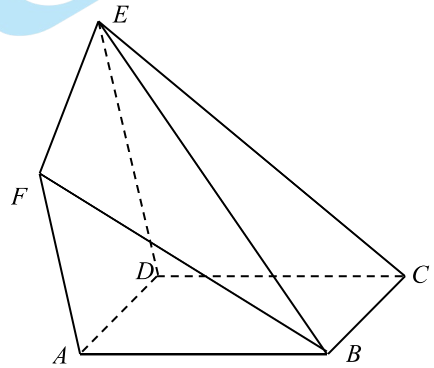
18.（本小题满分 14 分）

如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，侧面 $ADEF$ 为梯形，$AF // DE$，$DE \perp AD$，$DC = DE$．

（Ⅰ）求证：$AD \perp CE$；

（Ⅱ）求证：$BF //$ 平面 CDE；

（Ⅲ）判断线段 BE 上是否存在点 Q，使得平面 $ADQ \perp$ 平面 BCE？并说明理由．



19.（本小题满分 13 分）

设函数 $f(x) = me^x - x^2 + 3$，其中 $m \in \mathbf{R}$．

（Ⅰ）当 $f(x)$ 为偶函数时，求函数 $h(x) = xf(x)$ 的极值；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上有两个零点，求 m 的取值范围．

20.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 W：$\dfrac{x^2}{4m} + \dfrac{y^2}{m} = 1$ 的长轴长为 4，左、右顶点分别为 A, B，经过点 $P(1,0)$ 的动直线与椭圆 W 相交于不同的两点 C, D（不与点 A, B 重合）．

（Ⅰ）求椭圆 W 的方程及离心率；

（Ⅱ）求四边形 $ACBD$ 面积的最大值；

（Ⅲ）若直线 CB 与直线 AD 相交于点 M，判断点 M 是否位于一条定直线上？若是，写出该直线的方程．（结论不要求证明）

北京市西城区高三统一测试

数学（文科）参考答案及评分标准 2019.4

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1．B　　2．D　　3．C　　4．D

5．C　　6．C　　7．A　　8．B

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9． 7　　10．3　　11．答案不唯一，如 $A=60^\circ$， $B=30^\circ$

12．$\frac{4}{3}$　　13．$-\frac{3}{2}$； $(-\infty,-2]$　　14．70；40

注：第 13 题第一问 2 分，第二问 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ） $f(x)=\sin x\cos x-\sqrt{3}\sin^2 x$

$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos 2x)$ ………………… 4 分

$=\sin(2x+\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$， ………………… 6 分

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\pi$. ………………… 8 分

（Ⅱ）因为 $-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}$，所以 $-\frac{\pi}{3}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{7\pi}{6}$. ………………… 9 分

所以当 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{12}$ 时， $f(x)$ 取得最大值 $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

当 $2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$，即 $x=-\frac{\pi}{3}$ 时， $f(x)$ 取得最小值 $-\sqrt{3}$. ………………… 13 分

16．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）当 $n=1$ 时， $S_1=a_1=4$， ………………… 2 分

当 $n\geqslant 2$ 时，由题意，得 $S_n=n(n+1)+2$，① $S_{n-1}=(n-1)n+2$，②

由①−②，得 $a_n=2n$，其中 $n\geqslant 2$. ………………… 5 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\begin{cases}4, & n=1,\\ 2n, & n\geqslant 2.\end{cases}$ ………………… 7 分

（Ⅱ）由题意，得 $a_{k+2}^2=a_2\cdot a_{3k+2}$． ………………… 9 分

即 $[2(k+2)]^2=4\times 2(3k+2)$．

解得 $k=0$（舍）或 $k=2$． ………………… 10 分

所以公比 $q=\dfrac{a_{k+2}}{a_2}=2$． ………………… 11 分

所以 $b_n=b_1q^{n-1}=a_2q^{n-1}=2^{n+1}$． ………………… 13 分

17．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）甲组 10 名学生阅读量的平均值为 $\dfrac{1+2+6+8+10+11+12+12+17+21}{10}=10$，

乙组 10 名学生阅读量的平均值为 $\dfrac{1+2+4+4+12+13+16+16+(10+a)+20}{10}=\dfrac{98+a}{10}$．

………………… 2 分

由题意，得 $10>\dfrac{98+a}{10}$，即 $a<2$． ………………… 3 分

故图中 a 的取值为 0 或 1． ………………… 4 分

（Ⅱ）记事件“从所有的“阅读达人”里任取 2 人，至少有 1 人来自甲组”为 M． … 5 分

由图可知，甲组“阅读达人”有 2 人，在此分别记为 A_1，A_2；乙组“阅读达人”有 3 人，在此分别记为 B_1，B_2，B_3．

则从所有的“阅读达人”里任取 2 人，所有可能结果有 10 种，即 (A_1,A_2)，(A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_1,B_3)，(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，(A_2,B_3)，(B_1,B_2)，(B_1,B_3)，(B_2,B_3)．…… 7 分

而事件 M 的结果有 7 种，它们是 (A_1,A_2)，(A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_1,B_3)，(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，(A_2,B_3)， ………………… 8 分

所以 $P(M)=\dfrac{7}{10}$．

即从所有的‘阅读达人’里任取 2 人，至少有 1 人来自甲组的概率为 $\dfrac{7}{10}$． … 10 分

（Ⅲ）$s_0^2>s_1^2$． ………………… 13 分

18.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由底面 $ABCD$ 为矩形，知 $AD\perp CD$． ………………… 1 分

又因为 $DE\perp AD$， $DE\cap CD=D$， ………………… 2 分

所以 $AD\perp$ 平面 CDE． ………………… 3 分

又因为 $CE\subset$ 平面 CDE，

所以 $AD\perp CE$． ………………… 4 分

（Ⅱ）由底面 $ABCD$ 为矩形，知 $AB//CD$，

又因为 $AB\not\subset$ 平面 CDE， $CD\subset$ 平面 CDE，

所以 $AB//$ 平面 CDE． ………………… 6 分

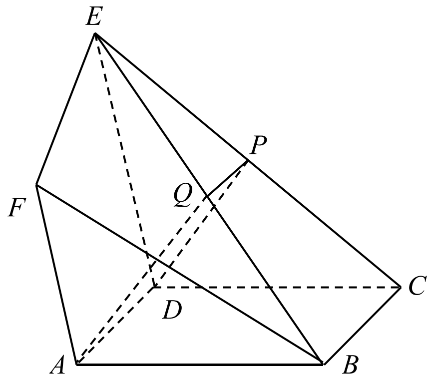
同理 $AF//$ 平面 CDE，

又因为 $AB\cap AF=A$，

所以平面 $ABF//$ 平面 CDE． ………………… 8 分

又因为 $BF\subset$ 平面 ABF，

所以 $BF//$ 平面 CDE． ………………… 9 分



（Ⅲ）**结论**：线段 BE 上存在点 Q（即 BE 的中点），使得平面 $ADQ\perp$ 平面 BCE． … 10 分

证明如下：

取 CE 的中点 P， BE 的中点 Q，连接 AQ, DP, PQ，则 $PQ//BC$．

由 $AD//BC$，得 $PQ//AD$．

所以 A, D, P, Q 四点共面． ………………… 11 分

由（Ⅰ），知 $AD\perp$ 平面 CDE，

所以 $AD\perp DP$，故 $BC\perp DP$．

在△CDE 中，由 $DC=DE$，可得 $DP\perp CE$．

又因为 $BC\cap CE=C$，

所以 $DP\perp$ 平面 BCE． ………………… 13 分

又因为 $DP\subset$ 平面 $ADPQ$

所以平面 $ADPQ\perp$ 平面 BCE（即平面 $ADQ\perp$ 平面 BCE）．

即线段 BE 上存在点 Q（即 BE 中点），使得平面 $ADQ\perp$ 平面 BCE． ……… 14 分

19.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由函数 $f(x)$ 是偶函数，得 $f(-x)=f(x)$，

即 $me^{-x}-(-x)^2+3=me^x-x^2+3$ 对于任意实数 x 都成立，

所以 $m=0$． …………… 2 分

此时 $h(x)=xf(x)=-x^3+3x$，则 $h'(x)=-3x^2+3$．

由 $h'(x)=0$，解得 $x=\pm 1$． …………… 3 分

当 x 变化时，$h'(x)$ 与 $h(x)$ 的变化情况如下表所示：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$ 上单调递减，在 $(-1,1)$ 上单调递增． …………… 5 分

所以 $h(x)$ 有极小值 $h(-1)=-2$，$h(x)$ 有极大值 $h(1)=2$． …………… 6 分

（Ⅱ）由 $f(x)=me^x-x^2+3=0$，得 $m=\dfrac{x^2-3}{e^x}$．

所以“$f(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上有两个零点”等价于“直线 $y=m$ 与曲线 $g(x)=\dfrac{x^2-3}{e^x}$，$x\in[-2,4]$ 有且只有两个公共点”． …………… 8 分

对函数 $g(x)$ 求导，得 $g'(x)=\dfrac{-x^2+2x+3}{e^x}$． …………… 9 分

由 $g'(x)=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=3$． …………… 10 分

当 x 变化时，$g'(x)$ 与 $g(x)$ 的变化情况如下表所示：

x	$(-2,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,4)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

所以 $g(x)$ 在 $(-2,-1)$，$(3,4)$ 上单调递减，在 $(-1,3)$ 上单调递增． …………… 11 分

又因为 $g(-2)=e^2$，$g(-1)=-2e$，$g(3)=\dfrac{6}{e^3}<g(-2)$，$g(4)=\dfrac{13}{e^4}>g(-1)$，

所以当 $-2e<m<\dfrac{13}{e^4}$ 或 $m=\dfrac{6}{e^3}$ 时，直线 $y=m$ 与曲线 $g(x)=\dfrac{x^2-3}{e^x}$，$x\in[-2,4]$ 有且只有两个公共点.

即当 $-2e<m<\dfrac{13}{e^4}$ 或 $m=\dfrac{6}{e^3}$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上有两个零点. …… 13 分

20.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由题意，得 $a^2=4m=4$，解得 $m=1$． …………………… 1 分

所以椭圆 W 方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$． …………………… 2 分

故 $a=2$，$b=1$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$．

所以椭圆 W 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$． …………………… 4 分

（Ⅱ）当直线 CD 的斜率 k 不存在时，由题意，得 CD 的方程为 $x=1$，

代入椭圆 W 的方程，得 $C(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$D(1,-\frac{\sqrt{3}}{2})$，

又因为 $|AB|=2a=4$，$AB\perp CD$，

所以四边形 $ACBD$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|AB|\times|CD|=2\sqrt{3}$． …………………… 6 分

当直线 CD 的斜率 k 存在时，设 CD 的方程为 $y=k(x-1)\,(k\neq 0)$，$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，

联立方程 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 消去 y，得 $(4k^2+1)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$． …… 7 分

由题意，可知 $\Delta>0$ 恒成立，则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-4}{4k^2+1}$． ………… 8 分

四边形 $ACBD$ 的面积 $S=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}|AB|\times|y_1|+\frac{1}{2}|AB|\times|y_2|$ ……… 9 分

$$=\frac{1}{2}|AB|\times|y_1-y_2|=2|k(x_1-x_2)|$$

$$=2\sqrt{k^2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=8\sqrt{\frac{k^2(3k^2+1)}{(4k^2+1)^2}},$$

设 $4k^2+1=t$，则四边形 $ACBD$ 的面积 $S=2\sqrt{-\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+3}$，$\frac{1}{t}\in(0,1)$，

所以 $S=2\sqrt{-(\frac{1}{t}+1)^2+4}<2\sqrt{3}$．

综上，四边形 $ACBD$ 面积的最大值为 $2\sqrt{3}$． …………………… 11 分

（Ⅲ）结论：点 M 在一条定直线上，且该直线的方程为 $x=4$． …………………… 14 分