通州区 2021—2022 学年第二学期高一年级期末质量检测

数 学 试 卷

2022 年 4 月

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，请将答题卡交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知复数 $z=m+1+(m-1)\mathrm{i}$（$m\in\mathbf{R}$）是纯虚数，则

（A）$m=-1$　　（B）$m=1$　　（C）$m\neq-1$　　（D）$m\neq1$

（2）在复数范围内解方程 $x^2+2x+3=0$，则该方程的根为

（A）$x=\pm\sqrt{2}$　　（B）$x=\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$　　（C）$x=-1\pm\sqrt{2}$　　（D）$x=-1\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$

（3）在某中学高一年级的 480 名学生中，男生有 200 名，女生有 280 名．学校想了解学生对选修课程的看法，以便开设有关课程，现准备从高一学生中用分层随机抽样的方法选取 60 人，那么应选取的女生人数为

（A）25　　（B）35　　（C）40　　（D）45

（4）甲、乙两名射击运动员分别连续 6 次射击的环数如下：

	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	第 6 次
甲	8	9	9	10	8	9
乙	9	10	10	7	7	10

根据以上数据，下面说法正确的是

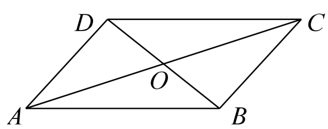
（A）甲射击的环数的极差与乙射击的环数的极差相等

（B）甲射击的环数的平均数比乙射击的环数的平均数大

（C）甲射击的环数的中位数比乙射击的环数的中位数大

（D）甲射击的环数比乙射击的环数稳定

（5）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 交于点 O，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则下列运算正确的是



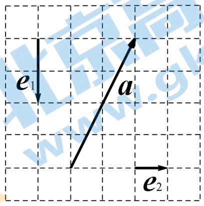
（A）$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　　（B）$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

（C）$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$　　（D）$\overrightarrow{CO}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

（6）向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{a}$ 在正方形网格中的位置如图所示，若 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2(\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R})$，则 $\lambda_1\cdot\lambda_2=$

（A） -4　　（B） -2

（C） 2　　（D） 4



（7）已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(-3,4)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$

（A） 2　　（B） 3　　（C） 4　　（D） 5

（8）在等边△ABC 中，$AB=2$，D 是 AC 的中点，E 是平面内一点，且 $\overrightarrow{BE}=\frac{5}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$，则 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BE}=$

（A） 2　　（B） $\frac{7}{3}$　　（C） 3　　（D） $\frac{10}{3}$

（9）一条河两岸平行，河的宽度为 200m，一艘船从河岸边的 A 地出发，向河对岸航行．已知船的速度 $\boldsymbol{v}_1$ 的大小为 $|\boldsymbol{v}_1|=10\text{km/h}$，水流速度 $\boldsymbol{v}_2$ 的大小为 $|\boldsymbol{v}_2|=6\text{km/h}$．设这艘船行驶方向与水流方向的夹角为 θ，行驶完全程需要的时间为 $t(\text{min})$，若船的航程最短，则

（A） $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{2\pi}{3}$，$t=1.5$　　（B） $\frac{2\pi}{3}<\theta<\frac{3\pi}{4}$，$t=1.5$

（C） $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{2\pi}{3}$，$t=2$　　（D） $\frac{2\pi}{3}<\theta<\frac{3\pi}{4}$，$t=2$

（10）在菱形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=60^\circ$，对角线 AC，BD 交于点 O，P，Q，M，N 分别是边 AB，BC，CD，DA 上的点，若 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{QN}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，则 $\overrightarrow{PM}$ 与 $\overrightarrow{QN}$ 的夹角的余弦值是

（A） $-\frac{\sqrt{39}}{13}$　　（B） $-\frac{\sqrt{13}}{13}$　　（C） $-\frac{\sqrt{39}}{26}$　　（D） $-\frac{\sqrt{13}}{26}$

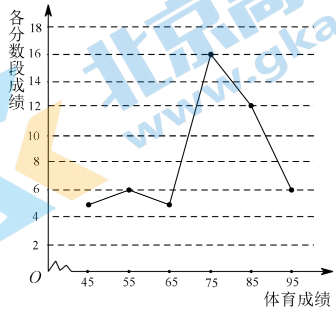
第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）计算：$\frac{1+2\text{i}}{\text{i}}=$______.

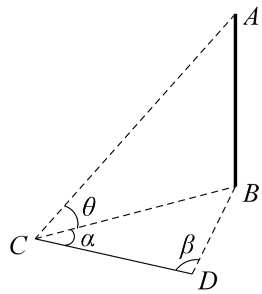
（12）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,y)$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $y=$______.

（13）某校高一年级 500 名学生全部参加了体育达标测试，现从中随机抽取 50 名学生的测试成绩，整理并按分数段 $[40,50)$，$[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$ 进行分组，假设同一组中的每个数据可用该组区间的中点值代替，得到体育成绩的折线图，如图所示. 估计该校高一年级中体育成绩低于 60 分的学生人数是_____；由图判断从分数段_____开始连续三个分数段的学生人数方差最大.



（14）如图，测量河对岸的塔高 AB 时，可以选取与塔底 B 在同一水平面内的两个测量基点 C 与 D. 现测得 $\angle BCD=\alpha$，$\angle BDC=\beta$，$CD=s$，在点 C 测得塔顶 A 的仰角为 θ. 若 $\alpha=75°$，$\beta=60°$，$s=100\text{m}$，$\theta=30°$，则塔高 AB 为_____.（精确到 0.1m）

（参考数值：$\sqrt{2}\approx1.41$，$\sqrt{3}\approx1.73$）



（15）已知五边形 $ABCDE$ 的五个顶点的坐标分别是 $A(0,0)$，$B(2,0)$，$C(3,1)$，$D(2,3)$，$E(-1,1)$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$_____；若 P 是五边形 $ABCDE$ 内（或边上）一点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的取值范围是_____.

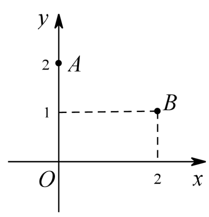
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

已知复数 $z=1-\mathrm{i}$（i 是虚数单位）.

（Ⅰ）求 $|z|+z^2$；

（Ⅱ）如图，复数 z_1，z_2 在复平面上的对应点分别是 A，B，求 $\dfrac{z_1+z_2}{z}$.



（17）（本小题 13 分）

已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 $\sqrt{2}$，向量 $\boldsymbol{b}$ 是单位向量.

（Ⅰ）若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；

（Ⅱ）若 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 互相垂直，求证：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

（18）（本小题 13 分）

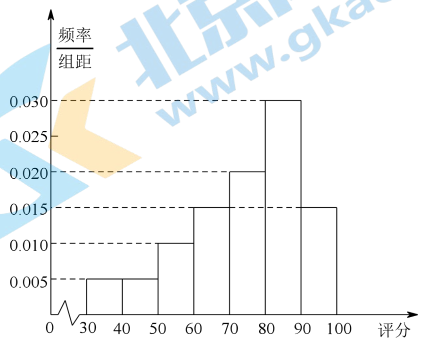
在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $b=3$，$c=2$.

（Ⅰ）当 $B=60^\circ$ 时，求 $\sin C$；

（Ⅱ）当 $\cos A=\dfrac{1}{4}$ 时，求 a 及 $\cos B$.

（19）（本小题 15 分）

某校为了解学生对 2022 年北京冬奥会观看的情况，设计了一份调查问卷，从该校高中生中随机抽取部分学生参加测试，记录了他们的分数，将收集到的学生测试分数按照 $[30,40)$，$[40,50)$，$[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$ 分组，画出频率分布直方图，如下：



（Ⅰ）随机抽取的学生测试分数不低于 80 分的学生有 27 人，求此次测试分数在 $[50,60)$ 的学生人数；

（Ⅱ）估计随机抽取的学生测试分数的 95% 分位数；

（Ⅲ）观察频率分布直方图，判断随机抽取的学生测试分数的平均数 m 和中位数 n 的大小关系.（直接写出结论）

（20）（本小题 15 分）

已知点 $O(0,0)$，向量 $\overrightarrow{OA}=(-2,0)$，$\overrightarrow{OB}=(2,2)$，$\overrightarrow{OC}=(k,-1)$.

（Ⅰ）若 A，B，C 三点共线，求实数 k 的值；

（Ⅱ）求与 $\overrightarrow{AB}$ 垂直的单位向量的坐标；

（Ⅲ）若点 P 在线段 AB 的延长线上，且 $|\overrightarrow{AP}|=\frac{5}{2}|\overrightarrow{PB}|$，求点 P 的坐标.

（21）（本小题 16 分）

在四边形 $ABCD$ 中，对角线 $AC=4$，$BC\sin\angle ABC=AC\cos\angle BAC$.

（Ⅰ）求 $\angle BAC$ 的大小；

（Ⅱ）若 $\triangle ACD$ 是锐角三角形，$\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，$CD=\sqrt{10}$，求 $\triangle ACD$ 的面积；

（Ⅲ）当 $AD=2$ 时，是否存在实数 λ，使得 $|\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{AD}|$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$，若存在，求 λ 的值；若不存在，请说明理由.

通州区 2021—2022 学年第二学期高一年级期中质量检测

数学参考答案及评分标准

2022 年 4 月

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
答案	A	D	B	D	C	A	B	C	B	C

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$2-\mathrm{i}$　（12）4　（13）110；$[50,60)$　（14）70.5m　（15）4；$[-2,2]$

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（本题 13 分）

解：（Ⅰ）因为复数 $z=1-\mathrm{i}$，

所以 $|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，$z^2=(1-\mathrm{i})^2=-2\mathrm{i}$.　……………………4 分

所以 $|z|+z^2=\sqrt{2}-2\mathrm{i}$.　……………………5 分

（Ⅱ）如图，$z_1=2\mathrm{i}$，$z_2=2+\mathrm{i}$，　……………………9 分

所以 $\dfrac{z_1+z_2}{z}=\dfrac{2\mathrm{i}+2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{2+3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(2+3\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{2+2\mathrm{i}+3\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2}{1-\mathrm{i}^2}$

$=\dfrac{5\mathrm{i}-1}{2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}\mathrm{i}$.　……………………　13 分

（17）（本题 13 分）

解：（Ⅰ）因为向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 $\sqrt{2}$，向量 $\boldsymbol{b}$ 是单位向量，

所以 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=1$.　……………………2 分

因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos 60°$　……………………4 分

$=\sqrt{2}\times 1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.　……………………6 分

（Ⅱ）因为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 互相垂直，

所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=0$. ……………………8 分

所以 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{a}|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2|\boldsymbol{b}|^2=2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2=0$.

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. ……………………11 分

所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. ……………………13 分

（18）（本题 13 分）

解：（Ⅰ）在 $\triangle ABC$ 中， $b=3$， $c=2$， $B=60°$，

由正弦定理得 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$， ……………………2 分

所以 $\sin C=\dfrac{c\cdot\sin B}{b}$.

所以 $\sin C=\dfrac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………5 分

（Ⅱ）在 $\triangle ABC$ 中， $b=3$， $c=2$， $\cos A=\dfrac{1}{4}$，

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$， ……………………7 分

所以 $a^2=9+4-2\times3\times2\times\dfrac{1}{4}=10$.

所以 $a=\sqrt{10}$. ……………………10 分

由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$$=\frac{10+4-9}{2\times\sqrt{10}\times2}=\frac{\sqrt{10}}{8}.$$ ……………………13 分

（19）（本题 15 分）

解：（Ⅰ）由图知，学生测试分数不低于 80 分的频率 $(0.030+0.015)\times10=0.45$.

所以抽取的学生人数为 $\dfrac{27}{0.45}=60$（人）. ……………………3 分

所以测试分数在 $[50,60)$ 的学生人数为 $60\times(0.010\times10)=6$（人）. ……………………5 分

（Ⅱ）由图可知，测试分数在 90 分以内的学生所占比例为

$(0.005\times2+0.010+0.015+0.020+0.030)\times10\times100\%=85\%$. ……………………7 分

所以 95%分位数一定位于 $[90,100]$ 内. ……………………8 分

所以 $90+10\times\dfrac{0.95-0.85}{1-0.85}\approx96.67$. ……………………11 分

所以估计随机抽取的学生测试分数的95%分位数约为96.67.

（Ⅲ）$m<n$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　……………………15 分

（20）（本题 15 分）

解：（Ⅰ）因为向量$\overrightarrow{OA}=(-2,0)$，$\overrightarrow{OB}=(2,2)$，$\overrightarrow{OC}=(k,-1)$，

所以$A(-2,0)$，$B=(2,2)$，$C=(k,-1)$.　　　　　　　　　……………………1 分

所以$\overrightarrow{AB}=(4,2)$，$\overrightarrow{AC}=(k+2,-1)$.　　　　　　　　……………………2 分

因为A，B，C三点共线，

所以$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AC}$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　……………………5 分

所以$2(k+2)=-4$.

所以$k=-4$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　……………………6 分

（Ⅱ）设与$\overrightarrow{AB}$垂直的单位向量的坐标$\boldsymbol{e}=(x,y)$.　　　　　……………………7 分

所以$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\4x+2y=0.\end{cases}$　　　　　　　　　　　　　　　　　……………………9 分

所以$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{5}}{5},\\y=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{5}}{5},\\y=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}.\end{cases}$

所以$\boldsymbol{e}=(\dfrac{\sqrt{5}}{5},-\dfrac{2\sqrt{5}}{5})$，或$\boldsymbol{e}=(-\dfrac{\sqrt{5}}{5},\dfrac{2\sqrt{5}}{5})$.　　　　……………………10 分

（Ⅲ）设点P的坐标为(x_1,y_1).

所以$\overrightarrow{AP}=(x_1+2,y_1)$，$\overrightarrow{BP}=(x_1-2,y_1-2)$.　　　　　……………………11 分

因为点P在线段AB的延长线上，且$|\overrightarrow{AP}|=\dfrac{5}{2}|\overrightarrow{PB}|$，

所以$\overrightarrow{AP}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{BP}$.　　　　　　　　　　　　　　　　　……………………13 分

所以$(x_1+2,y_1)=\dfrac{5}{2}(x_1-2,y_1-2)$.

所以$\begin{cases}x_1+2=\dfrac{5}{2}(x_1-2),\\y_1=\dfrac{5}{2}(y_1-2).\end{cases}$　　　　　　　　　　　　……………………14 分

所以$\begin{cases} x_1 = \dfrac{14}{3}, \\ y_1 = \dfrac{10}{3}. \end{cases}$ ……………………15 分

所以点 P 的坐标为$(\dfrac{14}{3},\dfrac{10}{3})$.

（21）（本题 16 分）

解：（Ⅰ）在$\triangle ABC$中，由正弦定理得$\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$，即$\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{\sin\angle BAC}{\sin\angle ABC}$.

因为$BC\cdot\sin\angle ABC = AC\cdot\cos\angle BAC$，且$\sin\angle ABC\neq 0$，

所以$\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{\cos\angle BAC}{\sin\angle ABC}$.

所以$\dfrac{\sin\angle BAC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{\cos\angle BAC}{\sin\angle ABC}$. ……………………1 分

所以$\sin\angle BAC=\cos\angle BAC$.

所以$\tan\angle BAC = 1$. ……………………2 分

因为$0<\angle BAC<\pi$， ……………………3 分

所以$\angle BAC=\dfrac{\pi}{4}$. ……………………4 分

（Ⅱ）因为$\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$，所以$\angle CAD=\dfrac{\pi}{4}$.

在$\triangle ACD$中，$AC=4$，$CD=\sqrt{10}$，

由余弦定理得$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC\cdot AD\cos\angle CAD$.

所以$10 = 16 + AD^2 - 2\times 4\cdot AD\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}$.

所以$AD^2 - 4\sqrt{2}AD + 6 = 0$. 解得$AD=\sqrt{2}$，或$AD = 3\sqrt{2}$. ……………………5 分

当$AD=\sqrt{2}$时，由余弦定理得$AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2CD\cdot AD\cos\angle ADC$.

所以$\cos\angle ADC = \dfrac{CD^2 + AD^2 - AC^2}{2CD\cdot AD} = \dfrac{10+2-16}{2\times\sqrt{10}\times\sqrt{2}} < 0$.

所以此时$\triangle ACD$是钝角三角形，不合题意，舍去. ……………………7 分

所以$AD = 3\sqrt{2}$. ……………………8 分

所以AD边上的高$h = 4\times\sin\dfrac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$.

所以$\triangle ACD$的面积为$\dfrac{1}{2}\cdot AD\cdot h = \dfrac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times 2\sqrt{2} = 6$. ……………………9 分

（III）因为 $AC=4$， $AD=2$，

所以 $\left|\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{AD}\right|^2=\overrightarrow{AC}^2+\lambda^2\overrightarrow{AD}^2+2\lambda\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\lambda^2\left|\overrightarrow{AD}\right|^2+2\lambda\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=16+4\lambda^2+16\lambda\cos\angle CAD$ ……………………10 分

$=4(\lambda+2\cos\angle CAD)^2+16-16\cos^2\angle CAD$

$\geqslant 16-16\cos^2\angle CAD$. ……………………13 分

所以当 $\lambda+2\cos\angle CAD=0$，

即 $\lambda=-2\cos\angle CAD$ 时，$\left|\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{AD}\right|$ 取得最小值是 $\sqrt{16-16\cos^2\angle CAD}$.

……………………14 分

所以 $\sqrt{16-16\cos^2\angle CAD}=2\sqrt{3}$. ……………………15 分

所以 $\cos\angle CAD=\frac{1}{2}$，或 $\cos\angle CAD=-\frac{1}{2}$.

所以 $\lambda=-1$，或 $\lambda=1$. ……………………16 分

所以存在实数 λ，使得 $\left|\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{AD}\right|$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〃 精益求精、专业严谨 〃 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。