百师联盟 2021 届高三 开年摸底联考 全国卷 I

# 理 科 数 学 试 卷

**注意事项：**

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟，满分 150 分

---

**一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。**

1. 已知集合 $M=\{x|y=\sqrt{2x-x^2}\}$，$N=\{x|y=\log_2(x-1)^2\}$，则集合 $M\cap N=$

A. $\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$　　B. $\{x|0\leqslant x<1$ 或 $1<x\leqslant 2\}$

C. $\{x|1<x\leqslant 2\}$　　D. $\{x|0<x<2\}$

2. “$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$”是“$\sin 2\alpha=\dfrac{3}{5}$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

3. 对任意实数 $a,b,c$，在以下命题中，正确的个数有

①若 $ac^2<bc^2$，则 $a<b$；②若 $a>b$，则 $\dfrac{a}{b}>1$；

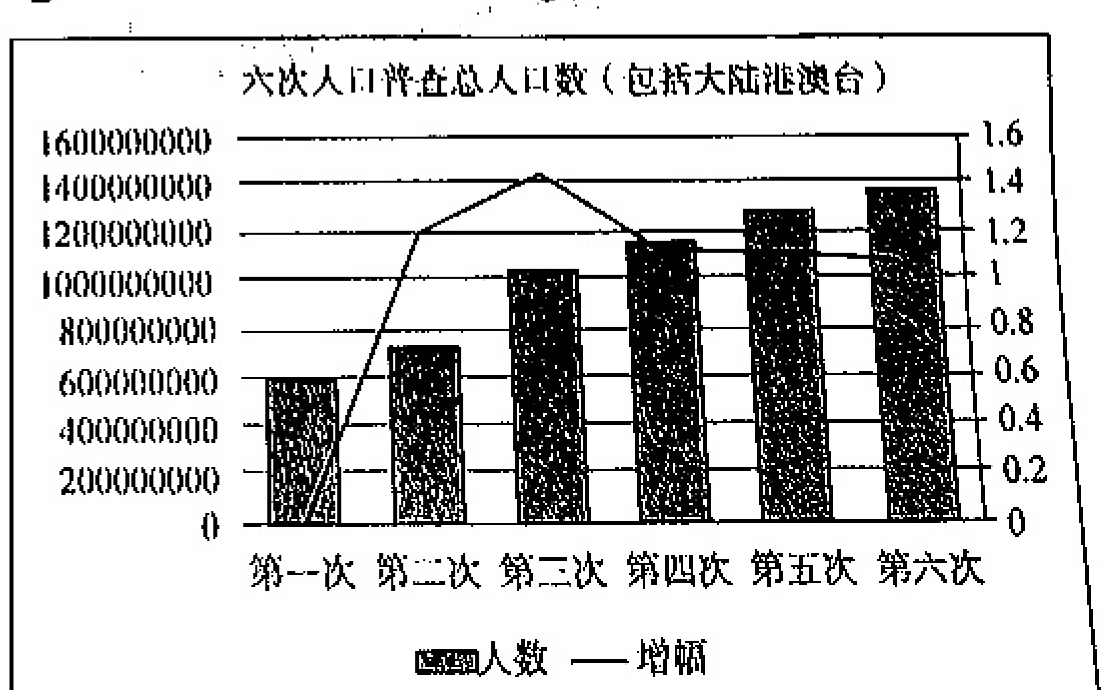
③若 $\dfrac{1}{a^2}>\dfrac{1}{b^2}$，则 $a<|b|$；④若 $a>1>b>0$，则 $\log_a(a-b)>0$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 0

4. 将 3 名男生 1 名女生共 4 名同学分配到甲、乙、丙三个社区参加社会实践，每个社区至少一名同学，则恰好一名女生和一名男生分到甲社区的概率是

A. $\dfrac{1}{12}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{6}$

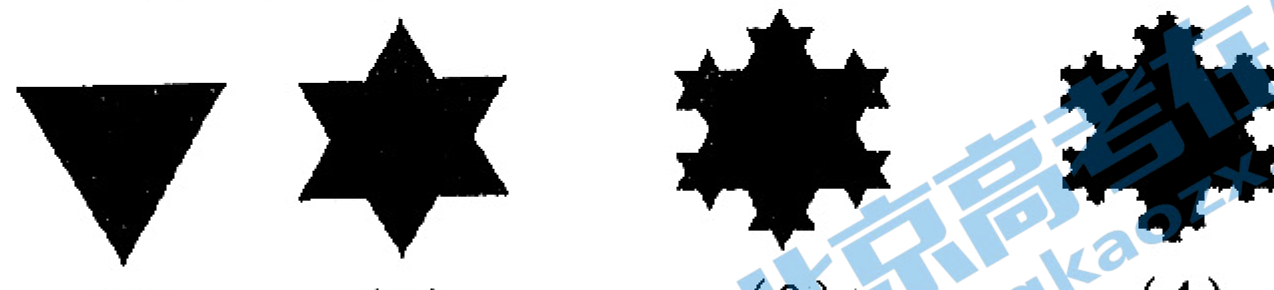
5. 人口普查是世界各国所广泛采用的搜集人口资料的一种科学方法，是提供全国基本人口数据的主要来源。根据人口普查的基本情况，可以科学的研究制定社会、经济、科教等各项发展政策，是国家科学决策的重要基础工作，人口普查资料是制定人口政策的依据和前提。截止 2020 年 10 月 10 日，我国共进行了六次人口普查，右图是这六次人口普查



的人数和增幅情况，下列说法正确的是

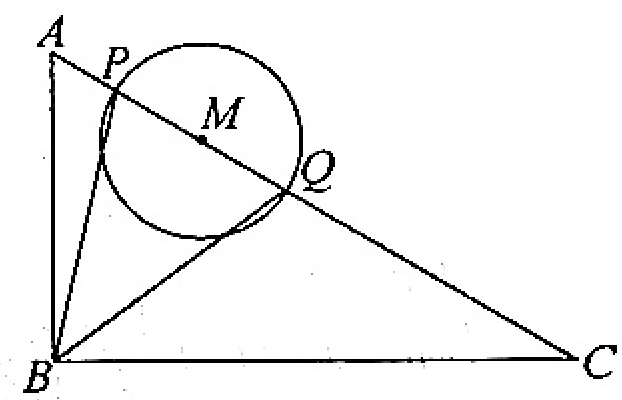
A. 人口数逐次增加，第二次增幅最大
B. 第六次普查人数最多，第四次增幅最小
C. 第六次普查人数最多，第三次增幅最大
D. 人口数逐次增加，从第二次开始增幅减小

6. 雪花曲线因其形状类似雪花而得名，它的产生也与雪花类似，由等边三角形开始，把三角形的每一条边三等分，并以每一条边三等分后的中段为边，向外作新的等边三角形，但要去掉与原三角形叠合的边，接着对每一个等边三角形"尖出"的部分继续上述过程，即以每条边三等分后的中段为边向外作新的等边三角形（如图：(2)，(3)，(4)是等边三角形(1)经过第一次，第二次，第三次，变化所得雪花曲线）若按照上述规律，一个边长为 3 的等边三角形，经过四次变化得到的雪花曲线的周长是




A. $\dfrac{143}{3}$
B. $\dfrac{204}{9}$
C. $\dfrac{256}{9}$
D. $\dfrac{64}{3}$

7. 如图，直角三角形 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，$AB=3$，$BC=4$，$M$ 点是线段 $AC$ 一动点，若以 $M$ 为圆心半径为 $\sqrt{5}$ 的圆与线段 $AC$ 交于 $P$，$Q$ 两点，则 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}$ 的最小值为

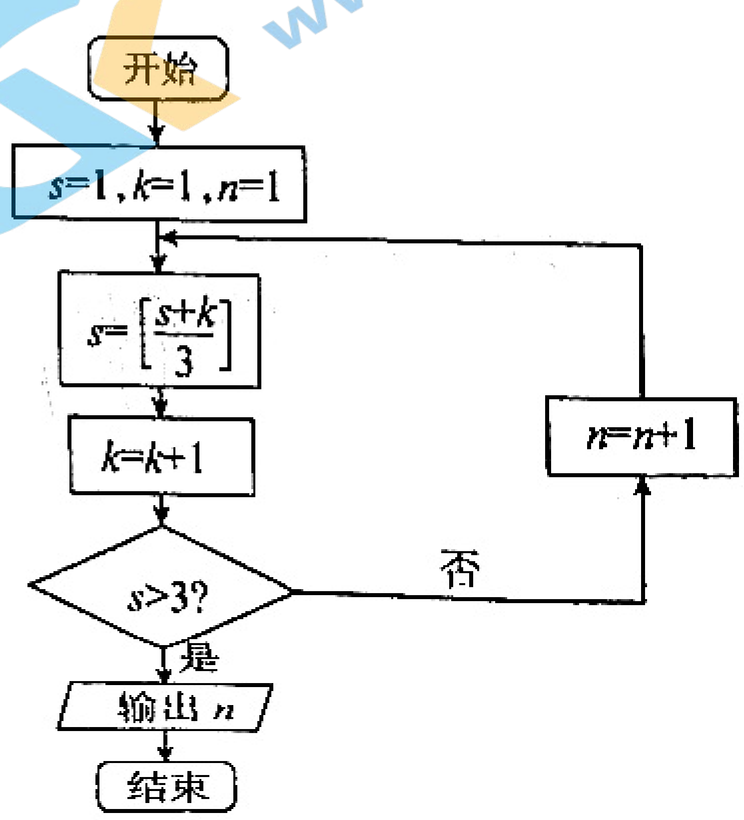



A. $\dfrac{12}{15}$
B. $\dfrac{19}{25}$
C. $\dfrac{9}{13}$
D. $\dfrac{19}{15}$

8. 已知圆 $C$:$x^2+y^2-4x-2y+3=0$，过原点的直线 $l$ 与圆 $C$ 相交于 $A$，$B$ 两点，则当 $\triangle ABC$ 的面积最大时，直线 $l$ 的方程为

A. $y=0$ 或 $y=\dfrac{4}{3}x$
B. $y=2x$ 或 $y=-\dfrac{1}{2}x$
C. $x=0$ 或 $y=\dfrac{1}{3}x$
D. $y=\dfrac{3}{4}x$

9. 执行如图所示的程序框图，记[$x$]表示不超过 $x$ 的最大整数，则输出的结果是

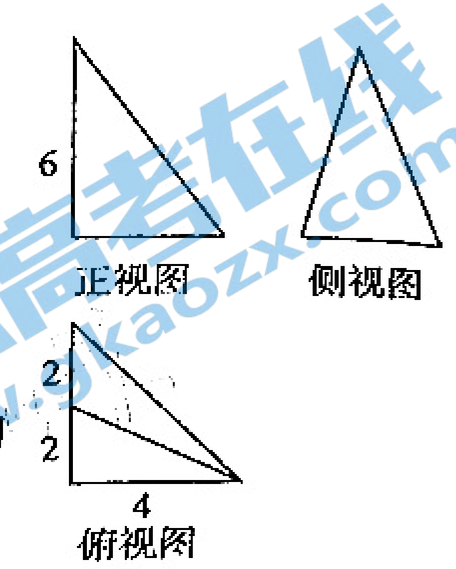



A. 6
B. 5，6
C. 9
D. 7，8，9

10. 设 $M$，$N$ 是函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 图象与直线 $y=2$ 的交点，若 $M$，$N$ 两点距离的最小值为 6，$P(-\dfrac{1}{2},2)$ 是该函数图象上的一个点，则该函数图象的一个对称中心是

A. (3，0)
B. (5，0)
C. (6，0)
D. (7，0)

11. 某几何体的三视图如右图所示，则其外接球的表面积为




A. $\frac{80\pi}{3}$　　B. $\frac{136\pi}{9}$

C. $\frac{544\pi}{9}$　　D. $\frac{48\pi}{3}$

12. 已知函数$f(x)=\frac{m}{x}-\ln x+m$在区间$(e^{-1},e)$内有唯一零点，则实数$m$的取值范围为

A. $(-\frac{e}{e+1},\frac{e}{2}+1]$　B. $(\frac{-1}{e+1},\frac{e}{e+1})$　C. $(\frac{-e}{e+1},1)$　D. $(-1,\frac{e}{2}+1)$

**二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.**

13. 复数$z$满足：$z+\frac{1}{2-i}=2\bar{z}$，则$z=$________.

14. 函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的函数，且$f(1)=0$，$f'(x)$为$f(x)$的导函数，若$f'(x)>0$，则不等式$(x-2)f(x)>0$的解集是________.

15. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，过左焦点$F$的直线$l$交$y$轴于$M$点，交双曲线右支于$P$点，若$2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OP}$($O$为原点)，且点$M$在圆$O:x^2+y^2=a^2$外，则双曲线的离心率的取值范围是________.

16. 设$f(n)$为正整数$n$(十进制)各位数上数字的平方和，例如$f(123)=1^2+2^2+3^2=14$，记：$a_1=f(n)$，$a_{k+1}=f(a_k)$，$k=1,2,3,4,\cdots$，若$n=101$，则$a_{2021}=$________.

**三、解答题：共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第22、23题为选考题，考生根据要求作答.**

(一)必考题：共60分.

17.（12分）

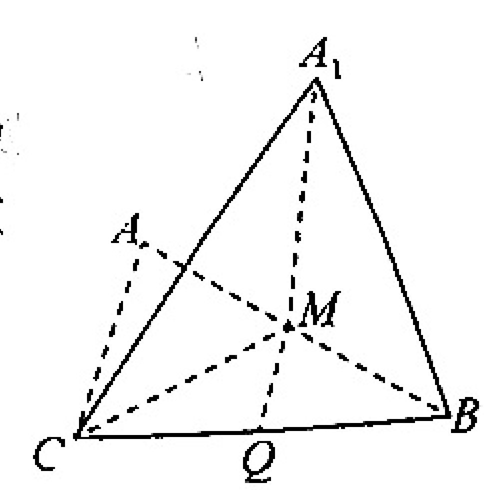
已知$a,b,c$是$\triangle ABC$的内角$A,B,C$的对边，且$5\cos B\cos C+2=5\sin B\sin C+\cos 2A$.

(1)求角$A$的大小；

(2)若$\triangle ABC$的面积$S=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，$c=\sqrt{3}$，求$\sin B\sin C$的值.

18.（12分）

如图，在直角$\triangle ABC$中，直角边$AC=2$，角$A=60°$，$M$为$AB$的中点，$Q$为$BC$的中点，将$\triangle AMC$沿着$MC$折起，使$A_1M\perp MB$，($A_1$为$A$翻折后所在的点)，连接$MQ$.




(1)求证：$MQ\perp A_1B$；

(2)求直线$MB$与平面$A_1MC$所成角的正弦值.

19.（12分）

近年来，我国的电子商务行业发展迅速，与此同时，相关管理部门建立了针对电商的商品和服务评价系统. 现从评价系统中选出200次成功的交易，并对其评价进行统计，对商品的好

评率为$\frac{3}{5}$，对服务的好评率为$\frac{7}{10}$，其中对商品和服务均为好评的有 80 次.

(1)是否可以在犯错误概率不超过 0.1 的前提下，认为商品好评与服务好评有关?

(2)若将频率视为概率，某人在该购物平台上进行的 4 次购物中，设对商品和服务全好评的次数为随机变量 $X$：求对商品和服务全好评的次数 $X$ 的分布列及其期望.

| $P(K^2 \geq k_0)$ | 0.15 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.010 | 0.005 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_0$ | 2.072 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$（其中 $n=a+b+c+d$）

20.（12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的上、下顶点分别为 $A,B$. $P$ 为直线 $y=2$ 上的动点，当点 $P$ 位于点$(1,2)$时，$\triangle ABP$ 的面积 $S_{\triangle ABP}=1$，椭圆 $C$ 上任意一点到椭圆的左焦点 $F_1$ 的最短距离为$\sqrt{2}-1$.

(1)求椭圆 $C$ 的方程；

(2)连接 $PA,PB$，直线 $PA,PB$ 分别交椭圆于 $M,N$(异于点 $A,B$)两点，证明：直线 $MN$ 过定点.

21.（12 分）

已知函数$f(x)=ae^x+\sin x+x, x\in[0,\pi]$.

(1)证明：当 $a=-1$ 时，函数$f(x)$有唯一的极大值点；

(2)当 $-2<a<0$ 时，证明：$f(x)<\pi$.

**(二)选考题:10 分。请考生在第 22、23 题中选定一题作答，并用 2B 铅笔在答题卡上将所选题目对应的题号方框涂黑。按所涂题号进行评分，多涂、错涂、漏涂均不给分，如果多答，则按所答第一题评分。**

22. 选修 4－4:坐标系与参数方程(10 分)

在平面直角坐标系 $xOy$ 中，曲线 $C$ 的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），直线 $l$ 的参数方程为$\begin{cases}x=t+2\\y=2t+3\end{cases}$（$t$ 为参数）.

(1)求直线 $l$ 普通方程；

(2)设 $A(2,3)$，若直线 $l$ 与曲线 $C$ 相交于 $P,Q$ 两点，求$|AP|+|AQ|$的值.

23. 选修 4－5:不等式选讲(10 分)

已知函数$f(x)=|3x-a|+x$，$(a>0)$

(1)当 $a=4$ 时，求不等式$f(x)<3$ 的解集；

(2)设函数 $g(x)=\left|x+\frac{6}{a}\right|-x$. 当 $x\in\mathbf{R}$ 时，证明：$f(x)+g(x)\geq 2\sqrt{2}$.

# 百师联盟2021届高三开年摸底联考 全国卷 I

## 理科数学参考答案及评分意见

1. B 【解析】$M=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，$N=\{x|x\in\mathbf{R},x\neq 1\}$，$M\cap N=\{x|0\leqslant x<1$ 或 $1<x\leqslant 2\}$，选 B.

2. A 【解析】$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{3}{5}$，所以 $3\tan^2\alpha-10\tan\alpha+3=0$，

$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$ 或 $\tan\alpha=3$，选 A.

3. B 【解析】对于①$c^2>0$，根据不等式性质得 $a<b$，正确；

对于②，$b=0$ 不成立，错误；

对于③可得 $0<a^2<b^2$，即 $|a|<|b|$，$a\leqslant|a|$，不等式成立，正确；

对于④错误；选 B.

4. D 【解析】总数 $C_4^2A_3^3$，恰好一名女生和一名男生分法有 $C_3^1A_2^2$，恰好一名女生和一名男生分到甲社区的概率是 $P=\dfrac{C_3^1A_2^2}{C_4^2A_3^3}=\dfrac{1}{6}$，选 D.

5. C 【解析】C

6. C 【解析】设雪花曲线的边长分别为 $a_1,a_2,a_3,a_4$，边数为 $b_1,b_2,b_3,b_4$，设周长为 $S_n(n=1,2,3,4,5)$.

$a_2=a_1\times\dfrac{1}{3}=1$，$a_3=\dfrac{1}{3}a_2=\dfrac{1}{3}$，$a_4=\dfrac{1}{3}a_3=\dfrac{1}{9}$，$a_5=\dfrac{1}{27}$，$b_1=3$，$b_2=3\times 4$，$b_3=3\times 4\times 4$，$b_4=3\times 4\times 4\times 4$，$b_5=3\times 4\times 4\times 4\times 4$.

$S_1=9$，$S_2=12$，$S_3=16$，$S_4=\dfrac{64}{3}$，$S_5=\dfrac{256}{9}$，选 C.

7. B 【解析】$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MP})\cdot(\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{MP})=|BM|^2-|MP|^2$，

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=|BM|^2-5$，只需要求 $|BM|$ 的最小值即可，

当 $BM\perp AC$ 时，$|BM|$ 最小，此时 $|BM|=\dfrac{12}{5}$，

$(\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ})_{\min}=\dfrac{144}{25}-5=\dfrac{19}{25}$，选 B.

8. A 【解析】圆 $C:x^2+y^2-4x-2y+3=0$，$(x-2)^2+(y-1)^2=2$，因为 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，$AC=BC=\sqrt{2}$，当 $\angle ACB=90°$ 时，$\triangle ABC$ 的面积最大，此时圆心 $C$ 到直线 $l$ 的距离等于 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}r=1$，

设直线 $l$ 方程 $y=kx$，$\dfrac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=0$ 或 $k=\dfrac{4}{3}$，直线 $l$ 的方程为 $y=0$ 或 $y=\dfrac{4}{3}x$，选 A.

9. C 【解析】当 $n=1$ 时，$s=[\dfrac{1+1}{3}]=0$，$k=2$；

当 $n=2$ 时，$s=[\dfrac{0+2}{3}]=0$，$k=3$；

当 $n=3$ 时，$s=[\dfrac{0+3}{3}]=1$，$k=4$；

当 $n=4$ 时，$s=[\frac{1+4}{3}]=1, k=5$；

当 $n=5$ 时，$s=[\frac{1+5}{3}]=2, k=6$；

当 $n=6$ 时，$s=[\frac{2+6}{3}]=2, k=7$；

当 $n=7$ 时，$s=[\frac{2+7}{3}]=3, k=8$；

当 $n=8$ 时，$s=[\frac{3+8}{3}]=3, k=9$；

当 $n=9$ 时，$s=[\frac{3+9}{3}]=4, k=10$；

选 C.

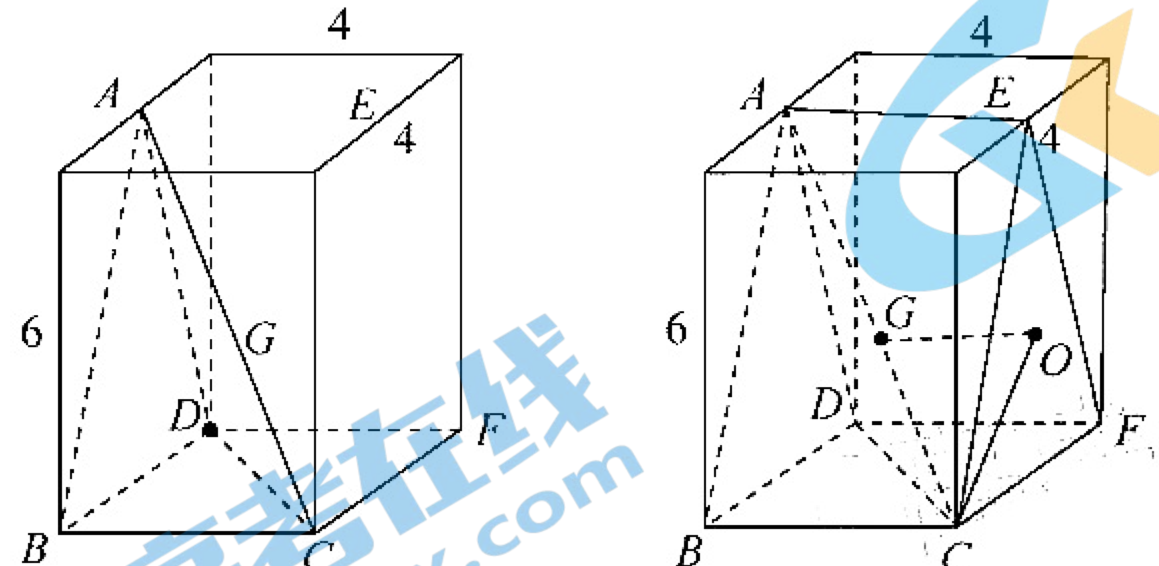
10. D 【解析】由题意知，函数的最小正周期为 $T=6, \frac{T}{4}=\frac{3}{2}, P(-\frac{1}{2},2)$ 在图象上且是最高点，

所以对称中心的横坐标 $x=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+k\frac{T}{2}=1+3k, k\in\mathbf{Z}$，

当 $k=2$ 时，$x=7$，选 D.

11. C 【解析】构造一个长方体，三棱锥 $A-BCD$ 的三视图即为图中所示，将三棱锥 $A-BCD$ 补成直三棱柱 $ABD-CEF$，只需要求出直三棱柱 $ABD-CEF$ 的外接球面积即可，因为它们有同一个外接球. 设球心为 $G$，$\triangle EFC$ 的外接圆圆心为 $O$，$\cos\angle CEF=\frac{4}{5}, \sin\angle CEF=\frac{3}{5}$，由正弦定理得：$2OC=\frac{CF}{\sin\angle CEF}=\frac{20}{3}, OC=\frac{10}{3}, OG=2$，

$GC^2=OC^2+OB^2=4+\frac{100}{9}=\frac{136}{9}$，球的表面积为 $S=4\pi R^2=\frac{544\pi}{9}$. 选 C.




12. B 【解析】$m(\frac{1}{x}+1)=\ln x, m=\frac{x\ln x}{x+1}$，令 $h(x)=\frac{x\ln x}{x+1}, h'(x)=\frac{x+1+\ln x}{(x+1)^2}$，令，$k(x)=x+1+\ln x, k'(x)=1+\frac{1}{x}>0$，函数 $y=k(x)$ 在区间 $(e^{-1},e)$ 单调递增，$k(x)>k(e^{-1})=e^{-1}>0$，所以 $h'(x)>0$，函数 $y=h(x)$ 在区间 $(e^{-1},e)$ 单调递增，所以有 $h(e^{-1})<h(x)<h(e)$，即 $\frac{-1}{e+1}<h(x)<\frac{e}{e+1}, \frac{-1}{e+1}<m<\frac{e}{e+1}$，选 B.

13. $z=\frac{2}{5}-\frac{1}{15}i$ 【解析】设 $z=a+bi,a,b\in\mathbf{R}$，$a+bi+\frac{2+i}{5}=2(a-bi)$，$\begin{cases}a+\frac{2}{5}=2a\\b+\frac{1}{5}=-2b\end{cases}$，$a=\frac{2}{5}$，$b=-\frac{1}{15}$，$z=\frac{2}{5}-\frac{1}{15}i$.

14. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ 【解析】由题意可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，又 $f(1)=0$，

$x<1$ 时，$f(x)<0$；$x>1$ 时，$f(x)>0$；

对于 $(x-2)f(x)>0$，当 $x>2$ 时，不等式成立，

当 $1<x<2$ 时，$x-2<0$，$f(x)>0$，不等式不成立；

当 $x<1$ 时，$x-2<0$，且 $f(x)<0$，不等式成立.

不等式的解集 $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

15. $e>\sqrt{3}$ 【解析】由题意可知直线 $l$ 的斜率 $k$ 存在，$M$ 是 $MP$ 的中点，当 $k>0$ 时，$P(c,\frac{b^2}{a})$，$M(0,\frac{b^2}{2a})$，$\frac{b^2}{2a}>a$，$c^2>3a^2$，所以 $e>\sqrt{3}$；同理可得，当 $k<0$ 时，$e>\sqrt{3}$.

16. 58 【解析】由题意，$a_1=2,a_2=4,a_3=16,a_4=37,a_5=58,a_6=89,a_7=145$，$a_8=42,a_9=20,a_{10}=4,\cdots\cdots$，可知该数列从第二项开始是周期为 8 的周期数列，$a_{2021}=a_5=58$.

17. 【解析】$5\cos(B+C)+2=2\cos^2A-1$，$2\cos^2A+5\cos A-3=0$，

$\cos A=\frac{1}{2}$ 或 $\cos A=-3$（舍去）. ………………………………………… 4 分

$0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………… 5 分

(2) $S=\frac{3}{2}\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}$，$bc=6$，

$c=\sqrt{3}$，$b=2\sqrt{3}$，……………………………………………………………… 7 分

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-bc=12+3-6=9$，$a=3$，………………………… 10 分

由正弦定理得 $\triangle ABC$ 外接圆直径

$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$，………………………………………… 11 分

$(2R)^2\sin B\sin C=6$，

所以 $\sin B\sin C=\frac{1}{2}$. ……………………………………………………………… 12 分

18. 【解析】(1) 取 $A_1B$ 的中点为 $N$，连接 $MN,NQ$，因为 $A_1M\perp MB$，所以 $A_1B=2\sqrt{2}$，$BC=2\sqrt{3}$，$A_1C=2$，所以 $A_1C\perp A_1B$，………………………………………………… 2 分

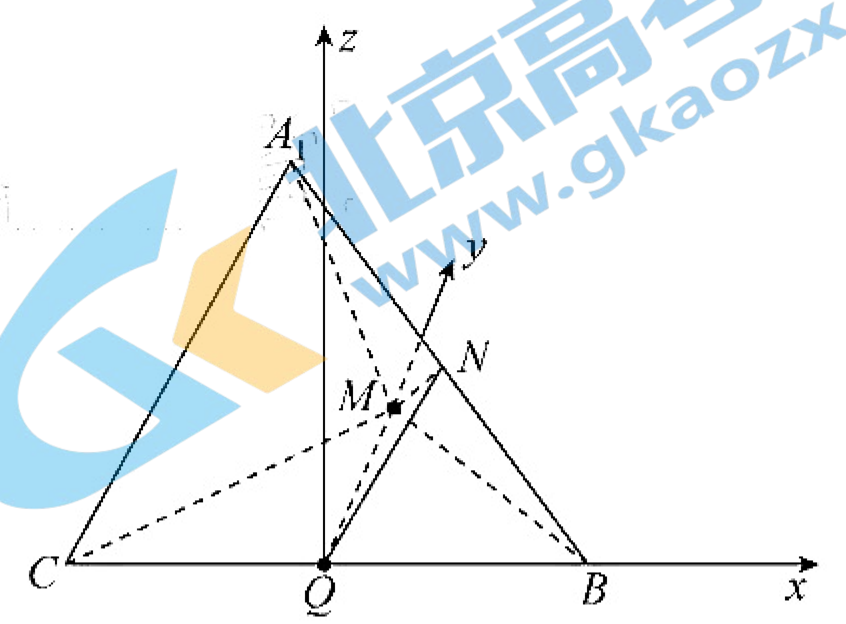
又 $NQ\underline{\mathbin{/\!/}}\frac{1}{2}A_1B$，所以 $A_1B\perp QN$. ……………………………………… 4 分

又 $\triangle A_1MB$ 为等腰三角形，所以 $A_1B\perp NM$，$MN\cap QN=N$

所以 $A_1B\perp$ 面 $MNQ$， …………………………………………………………………… 5 分

$QM\subset$ 面 $MNQ$，所以 $MQ\perp A_1B$. ………………………………………………………… 6 分

(2) $MQ\perp BA_1$，$MQ\perp BC$，$BC\cap BA_1=B$，所以 $QM\perp$ 面 $A_1CB$.




取 $QB$ 所在直线为 $x$ 轴，$QM$ 所在直线为 $y$ 轴，过 $Q$ 点作面 $MCB$ 的垂线为 $z$ 轴，建立空间直角坐标系.

则 $B(\sqrt{3},0,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$M((0,1,0)$，

$A_1(-\frac{\sqrt{3}}{3},0,\frac{2\sqrt{6}}{3})$

设面 $A_1MC$ 一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{CM}=(\sqrt{3},1,0)$，

$\overrightarrow{CA_1}=(\frac{2\sqrt{3}}{3},0,\frac{2\sqrt{6}}{3})$，得 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0\\x+\sqrt{2}z=0\end{cases}$，取 $z=-1$，$x=\sqrt{2}$，$y=-\sqrt{6}$，

$\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},-\sqrt{6},-1)$， …………………………………………………………………… 8 分

又 $\overrightarrow{MB}=(\sqrt{3},-1,0)$，

$\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{MB}>=\frac{2\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}$， …………………………………………………………………… 11 分

直线 $MB$ 与面 $A_1MC$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. …………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1) 由题意可得关于商品和服务评价的 $2\times2$ 列联表如下：

| | 对服务好评 | 对服务不满意 | 总计 |
|---|---|---|---|
| 对商品好评 | 80 | 40 | 120 |
| 对商品不满意 | 60 | 20 | 80 |
| 总计 | 140 | 60 | 200 |

$K^2=\frac{200\,(1600-2400)^2}{140\times60\times120\times80}=1.587$，$1.587<2.706$， ………………………………………… 5 分

所以，不可以在犯错误概率不超过 0.1 的前提下，认为商品好评与服务好评有关. …… 6 分

(2) 每次购物时，对商品和服务都好评的概率为 $\frac{2}{5}$，且 $X$ 的取值可以是 0,1,2,3,4. … 6 分

其中 $P(X=0)=(\frac{3}{5})^4=\frac{81}{5^4}$；$P(X=1)=C_4^1(\frac{2}{5})(\frac{3}{5})^3=\frac{216}{5^4}$；

$P(X=2)=C_4^2\,(\frac{2}{5})^2\,(\frac{3}{5})^2=\frac{216}{5^4}$；$P(X=3)=C_4^3\,(\frac{2}{5})^3\,(\frac{3}{5})=\frac{96}{5^4}$；

$P(X=4)=(\frac{2}{5})^4=\frac{16}{5^4}$ …………………………………………………………………… 9 分

$X$ 的分布列为：

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{81}{5^4}$ | $\frac{216}{5^4}$ | $\frac{216}{5^4}$ | $\frac{96}{5^4}$ | $\frac{16}{5^4}$ |

由于 $X\sim B(4,\frac{2}{5})$，则 $EX=\frac{8}{5}$. …………………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1) $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times 2b=1,b=1$,

$a^2-c^2=1$,

设 $M(x,y)$ 是椭圆上任意一点,$F(-c,0)$,$MF^2=(x+c)^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}x^2+2cx+a^2$,

对称轴 $x=-\frac{a^2}{c}<-a$,区间 $x\in[-a,a]$ 为增区间,$x=-a$ 时,$MF_{\min}=a-c$,即

$a-c=\sqrt{2}-1$, ………………………………………………………………………… 3 分

$a+c=\sqrt{2}+1,a=\sqrt{2}$,

椭圆方程 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ………………………………………………………………………… 5 分

(2) 设 $P(t,2)$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $\begin{cases}k_{AP}=\frac{y_1-1}{x_1}=\frac{1}{t}\\ k_{BP}=\frac{y_2+1}{x_2}=\frac{3}{t}\end{cases}$,

所以有 $3x_2(y_1-1)=x_1(y_2+1)$, ………………………………………………………………… 6 分

因为 $\frac{x_1^2}{2}=1-y_1^2=(1-y_1)(1+y_1)$,代入上式得

$\frac{-3}{2}x_1x_2=(y_1+1)(y_2+1)$, ………………………………………………………………… 7 分

$\frac{-3}{2}x_1x_2=y_1y_2+(y_1+y_2)+1$. ………………………………………………………………… ①

设直线 $MN:y=kx+m$,代入 $x^2+2y^2=2$,$(1+2k^2)y^2-2my+m^2-2k^2=0$.

$\begin{cases}y_1+y_2=\frac{2m}{1+2k^2}\\ y_1y_2=\frac{m^2-2k^2}{1+2k^2}\end{cases}$, ② ………………………………………………………………… 9 分

$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$,$x_1x_2=\frac{2m^2-2}{1+2k^2}$. ………………………………………… ③

将②③代入①得 $2m^2+m-1=0$,$m=\frac{1}{2}$ 或 $-1$(舍去). ……………………………… 11 分

直线 $MN$ 过定点 $(0,\frac{1}{2})$. ………………………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1) 证明:$f'(x)=ae^x+\cos x+1$,因为 $x\in[0,\pi]$,所以 $1+\cos x\geqslant 0$,

当 $a=-1$ 时,$f'(x)=-e^x+\cos x+1$, ……………………………………………………… 2 分

令 $g(x)=-e^x+\cos x+1$,$g'(x)=-e^x-\sin x<0$, ……………………………………… 4 分

$g(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上单调递减;$g(0)=-1+2=1$,$g(\pi)=-e^\pi<0$,

存在 $x_0\in(0,\pi)$,使得 $f'(x_0)=0$, ………………………………………………………… 5 分

所以函数 $f(x)$ 递增区间是 $[0,x_0]$,递减区间是 $[x_0,\pi]$.

所以函数 $f(x)$ 存在唯一的极大值点 $x_0$. ……………………………………………………… 6 分

(2) 当 $-2<a<0$ 时,令 $h(x)=ae^x+\sin x+x-\pi$

$h'(x)=ae^x+\cos x+1$,

$h''(x)=ae^x-\sin x<0$,

$h'(x)$在区间$[0,\pi]$上单调递减,

$h'(0)=a+2>0, h'(\pi)=ae^{\pi}<0$, ……………………………………………………… 7 分

存在$x_0\in(0,\pi)$,使得$h'(x_0)=0$,即$ae^{x_0}+\cos x_0+1=0$,

所以函数$h(x)$在区间$[0,x_0]$上是递增函数,在区间$[x_0,\pi]$上是递减函数. ………… 9 分

$h(x)_{\max}=h(x_0)=ae^{x_0}+\sin x_0+x_0-\pi, x_0\in(0,\pi)$,因为$ae^{x_0}+\cos x_0+1=0$,

只需证$h(x_0)=\sin x_0-\cos x_0+x_0-1-\pi<0$即可.

$h'(x_0)=\cos x_0+\sin x_0+1, h'(x_0)>0$, ………………………………………………… 10 分

$h(x_0)$在区间$(0,\pi)$上是增函数,$h(x_0)<h(\pi)=0$,即$f(x)<\pi$. ……………………… 12 分

22.【解析】(1)直线$l$普通方程为$y=2x-1$, ……………………………………………… 4 分

(2)曲线$C$的普通方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$,将直线$l$的参数方程

化为$\begin{cases}x=2+\frac{1}{\sqrt5}t\\ y=3+\frac{2}{\sqrt5}t\end{cases}$,($t$为参数) ……………………………………………… 5 分

代入椭圆方程得:$\frac{17}{5}t^2+\frac{52}{\sqrt5}t+36=0$,

$t_1+t_2=-\frac{52\times5}{17\sqrt5}, t_1t_2=\frac{36\times5}{17}$. ……………………………………………… 7 分

$t_1t_2>0$, $t_1, t_2$同号,$|AP|+|AQ|=|t_1+t_2|=\frac{52\sqrt5}{17}$. ……………………………… 10 分

23.【解析】(1)当$a=4$时,$f(x)=|3x-4|+x$.

由$|3x-4|<3-x$,得$x-3<3x-4<3-x$,

解得$\frac{1}{2}<x<\frac{7}{4}$.

所以,不等式$f(x)<3$的解集为$\{x|\frac{1}{2}<x<\frac{7}{4}\}$. ……………………………………… 4 分

(2)$f(x)+g(x)=|3x-a|+\left|x+\frac{6}{a}\right|=\left|3(x-\frac{a}{3})\right|+\left|x+\frac{6}{a}\right|$

$=2\left|x-\frac{a}{3}\right|+\left|x-\frac{a}{3}\right|+\left|x+\frac{6}{a}\right|$

$\geqslant\left|x-\frac{a}{3}\right|+\left|x+\frac{6}{a}\right|$(当且仅当$x=\frac{a}{3}$时取等号). ……………………………… 7 分

$\geqslant\left|(x-\frac{a}{3})-(x+\frac{6}{a})\right|$(当且仅当$(x-\frac{a}{3})(x+\frac{6}{a})\leqslant0$时取等号,$a>0$)

$=\left|\frac{a}{3}+\frac{6}{a}\right|\geqslant2\sqrt2$当且仅当$a=3\sqrt2$时,等号成立. ………………………… 10 分

# 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。