2024年高考数学仿真模拟卷(六)（新高考专用）

解析

(时间：120分钟　满分：150分)

一、选择题(本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1.答案　B

解析　集合与集合间的关系不能用元素与集合间的关系来表示，故C，D错误，

而$M=M\cup N$说明N中元素都在集合M中，故$N\subseteq M$.

2.答案　D

解析　由题意$\overline{z}=\frac{3+i}{3-i}=\frac{(3+i)^2}{3^2-i^2}=\frac{9+6i-1}{10}=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$，所以$z=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$，

则复数z在复平面内对应的点$\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$为第四象限内的点．

3.答案　C

解析　由$\boldsymbol{m}=(-1,3)$得$|\boldsymbol{m}|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$，又$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=5$，

所以$\boldsymbol{n}$在$\boldsymbol{m}$上的投影向量为$\left(\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|}\right)\cdot\frac{\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{m}|}=\frac{5}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\boldsymbol{m}}{\sqrt{10}}=\frac{1}{2}(-1,3)=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

4.答案　A

解析　因为$\frac{1}{2}=\log_5\sqrt{5}<\log_5 3<\log_5 5=1$，即$\frac{1}{2}<a<1$，

$b=0.2^{-0.3}=(0.2^{-1})^{0.3}=5^{0.3}>1$，$c=\log_{\frac{1}{6}}\frac{1}{2}=\log_6 2$，且$0=\log_6 1<\log_6 2<\log_6\sqrt{6}=\frac{1}{2}$，即$0<c<\frac{1}{2}$，

所以$c<a<b$.

5.答案　C

解析　设被调查的男性为x人，则女性为$2x$人，依据题意可得列联表如下，

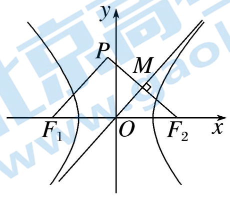
	男性	女性	合计
喜爱足球	$\frac{5x}{6}$	$\frac{2x}{3}$	$\frac{3x}{2}$
不喜爱足球	$\frac{x}{6}$	$\frac{4x}{3}$	$\frac{3x}{2}$
合计	x	$2x$	$3x$

$\chi^2=\frac{3x\left(\frac{5x}{6}\cdot\frac{4x}{3}-\frac{2x}{3}\cdot\frac{x}{6}\right)^2}{\frac{3x}{2}\cdot\frac{3x}{2}\cdot x\cdot 2x}=\frac{2x}{3}$，因为本次调查得出“根据小概率值$\alpha=0.005$的独立性检验认为喜爱足球与性别有关”的结论，所以有$\chi^2\geqslant 7.879=x_{0.005}$，即$\frac{2x}{3}\geqslant 7.879$，解得$x\geqslant 11.8185$，又因为上述列联表中的所有数字均为整数，故$x$的最小值为12.

6.答案　D

解析 如图，设 PF_2 与渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 交于 M，则 $F_2M\perp OM$，$\tan\angle MOF_2=\frac{b}{a}$，$\sin\angle MOF_2=\frac{b}{c}$，

所以 $|F_2M|=|OF_2|\cdot\sin\angle MOF_2=b$，$|OM|=\sqrt{|OF_2|^2-|MF_2|^2}=a$，



由 O，M 分别是 F_1F_2 与 PF_2 的中点，可知 $OM\parallel PF_1$ 且 $|OM|=\frac{1}{2}|PF_1|=1$，即 $a=1$，

由 $e=\sqrt{5}$ 得 $c=\sqrt{5}$，$b=2$，

所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=4S_{\triangle OMF_2}=4\times\frac{1}{2}\times2\times1=4$.

7.答案 B

解析 令 $t=\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3},\ \pi\omega+\frac{\pi}{3}\right)$，

因为函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\ \pi\right)$ 上恰有 1 个零点，即转化为 $y=\sin t$，$t\in\left(\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3},\ \pi\omega+\frac{\pi}{3}\right)$ 只有 1 个零点，

故可得 $\begin{cases}k\pi-\pi\leqslant\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3}<k\pi,\\ k\pi<\pi\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant k\pi+\pi\end{cases}$ $(k\in\mathbf{Z})$，即 $\begin{cases}3k-4\leqslant\omega<3k-1,\\ k-\frac{1}{3}<\omega\leqslant k+\frac{2}{3}\end{cases}$ $(k\in\mathbf{Z})$，

又 $\omega>0$，要使上述方程组有解，则需 $\begin{cases}k-\frac{1}{3}<3k-1,\\ 3k-4\leqslant k+\frac{2}{3},\\ k+\frac{2}{3}>0,\\ 3k-1>0,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$，所以 $\frac{1}{3}<k\leqslant\frac{7}{3}(k\in\mathbf{Z})$，故 $k=1,2$，

当 $k=1$ 时，$\frac{2}{3}<\omega\leqslant\frac{5}{3}$，当 $k=2$ 时，$2\leqslant\omega\leqslant\frac{8}{3}$.

所以 ω 的取值范围为 $\left(\frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right]\cup\left[2,\ \frac{8}{3}\right]$.

8.答案 D

解析 由题设知，$A'B=AB=4$，设点 A' 到平面 $MBCD$ 的距离为 d，则 $\frac{d}{A'B}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，故 $d=\sqrt{3}$，

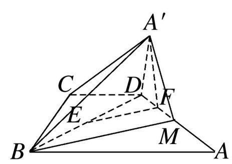
要使 A'，M，B，C，D 均在球 O 的表面上，则 M，B，C，D 共圆，

由四边形 $ABCD$ 为直角梯形，$AB\parallel CD$，$\angle B=90°$，得 $\angle BCD=90°$，所以 $\angle BMD=90°$，

所以 $BM\perp AD$，故点 A 在绕 BM 旋转过程中，$BM\perp$ 平面 $A'MD$，$BM\subset$ 平面 $MBCD$，

所以平面 $A'MD\perp$ 平面 $MBCD$，即点 A' 到平面 $MBCD$ 的距离为 d，即 A' 到直线 MD 的距离.

$\triangle ABM$ 沿 BM 折成锐二面角 $A'-BM-C$，过 $A'F\perp MD$ 于 F，则 $A'F=d=\sqrt{3}$，



又 $AB=4$，$CD=2$，$BC=2\sqrt{3}$，

则 $\angle A=60°$，故 $\angle CDM=120°$，即 $\angle CBM=60°$，

综上，$\triangle BCD$，$\triangle BMD$ 都是以 BD 为斜边的直角三角形，且 $\angle CDB=60°$，

所以 $\angle BDM=60°$，易知 $\triangle ABD$ 为等边三角形，则 M 为 AD 中点，故 $A'M=2$，$BM=2\sqrt{3}$，

在 $Rt\triangle A'FM$ 中，$MF=\sqrt{4-3}=1$，而 $MD=2$，即 F 为 MD 的中点，

同时 $\triangle BCD\cong\triangle BMD$，若 E 为 BD 的中点，则 E 为 $MBCD$ 外接圆圆心，

连接 EF，则 $EF/\!/BM$ 且 $EF=\frac{1}{2}BM=\sqrt{3}$，故 $EF\perp$ 平面 $A'MD$，且 $\triangle A'MD$ 为等边三角形，

球心 O 是过 E 并垂直于平面 $MBCD$ 的直线与过 $\triangle A'MD$ 外接圆圆心且垂直于平面 $A'MD$ 的直线的交点，

若球 O 的半径为 R，则 $R^2=EF^2+\left(\frac{2}{3}A'F\right)^2=\frac{13}{3}$，所以球 O 的表面积为 $4\pi R^2=\frac{52}{3}\pi$.

二、选择题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的．全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分)

9．答案　ACD

解析　由图表可知，2018－2022 这 5 年我国社会物流总费用逐年增长，2021 年增长的最多，

且增长为 16.7－14.9＝1.8 万亿元，故 A 正确；

因为 6×70%＝4.2，则 70%分位数为第 5 个，即为 16.7，

所以这 6 年我国社会物流总费用的 70%分位数为 16.7 万亿元，故 B 错误；

由图表可知，2017－2022 这 6 年我国社会物流总费用与 GDP 的比率的极差为 14.8%－14.6%＝0.2%，故 C 正确；

由图表可知，2022 年我国的 GDP 为 17.8÷14.7%≈121.1 万亿元，故 D 正确．

10.答案　AB

解析　对于 A，$L_{0.5}(a,b)=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}}=\sqrt{ab}\leqslant L_1(a,b)=\dfrac{a+b}{2}$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立，故 A 正确；

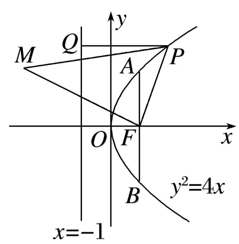
对于 B，$L_0(a,b)=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\dfrac{2ab}{a+b}\leqslant\dfrac{2ab}{2\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}=G(a,b)$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立，故 B 正确；

对于 C，$L_2(a,b)=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}=\dfrac{a^2+b^2+a^2+b^2}{2(a+b)}\geqslant\dfrac{a^2+b^2+2ab}{2(a+b)}=\dfrac{(a+b)^2}{2(a+b)}=\dfrac{a+b}{2}=A(a,b)$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立，

故 C 不正确；

对于 D，当 $n=1$ 时，由 C 可知，$L_2(a,b)\geqslant\dfrac{a+b}{2}=L_1(a,b)$，故 D 不正确．

11.答案　BC



解析　对于 A，$A(1,2)$代入抛物线方程，解得 $p=2$，故 A 错误；

对于 D，由 A 知，抛物线方程为 $y^2=4x$，故准线为 $x=-1$，

由题意 $M(-3,2)$，于是 $y=2$ 过 M 点且和抛物线只有一个交点，

过 M 且斜率不存在的直线显然和抛物线不相交，故设 $y-2=k(x+3)$，

和抛物线的解析式联立得到 $y-2=k\left(\frac{y^2}{4}+3\right)$，整理得 $ky^2-4y+12k+8=0$，

由 $\varDelta=16-4k(12k+8)=0$，解得 $k=-1$ 或 $k=\frac{1}{3}$，于是 $y=-x-1$，$y=\frac{x}{3}+3$ 是抛物线的两条切线，

综上，过点 M 且与抛物线有且只有一个公共点的直线共有三条，故 D 错误；

对于 C，注意到 $A(1,2)$，$F(1,0)$，故 $AF\perp x$ 轴，设直线 AF 与抛物线相交所得弦为 AB，根据对称性得$|AB|=2|AF|=4$，

故 C 正确；

对于 B，作 $PQ\perp l$，垂足为 Q，由题意，$|PM|+d=|PM|+|PQ|+1$，

根据抛物线的性质得$|PQ|=|PF|$，于是$|PM|+d=|PM|+|PF|+1\geqslant|MF|+1=\sqrt{(-3-1)^2+2^2}+1=2\sqrt{5}+1$，

当 P 落在线段 MF 上时等号成立，故 B 正确．

12.答案　ABD

解析　由题意可得 $f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，且$f'(x)=(x^2+3x+1)e^x+\frac{1}{x}$，

因为$f'(x)=(x^2+3x+1)e^x+\frac{1}{x}>0$，所以函数 $f(x)$在$(0，+\infty)$上为增函数，

对于 A，因为$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{e}-\ln 2>1-\ln 2>0$，所以 $x_0<\frac{1}{2}$，故 A 正确；

对于 B，因为$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{e+1}{e^2}e^{\frac{1}{e}}-1<\frac{e+1}{e^2}e^{\frac{1}{2}}-1=e^{-\frac{3}{2}}(e+1-e^{\frac{3}{2}})<e^{-\frac{3}{2}}\left(e+1-\frac{3}{2}e\right)<0$，所以 $x_0>\frac{1}{e}$，故 B 正确；

对于 C，因为 $x_0>\frac{1}{e}$，则 $\ln x_0>-1$，$e^{x_0}>1$，所以 $e^{x_0}+\ln x_0>0$，故 C 错误；

对于 D，因为 $x_0<\frac{1}{2}$，所以 $x_0+\ln x_0<\frac{1}{2}-\ln 2<0$，故 D 正确．

三、填空题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

13．答案　2

解析　由等比数列的性质知 $a_3a_6=a_4a_5$，

联立$\begin{cases}a_4+a_5=24，\\ a_4a_5=128，\end{cases}$　解得$\begin{cases}a_4=8，\\ a_5=16\end{cases}$　或$\begin{cases}a_4=16，\\ a_5=8，\end{cases}$

因为$\{a_n\}$是单调递增的等比数列，所以$\begin{cases}a_4=8，\\ a_5=16，\end{cases}$　即 $q=\frac{a_5}{a_4}=2$.

14.答案　0

解析　将 $\sin\theta+\cos\theta=2\sin\alpha$平方得 $1+2\sin\theta\cos\theta=4\sin^2\alpha$，

结合 $\sin\theta\cos\theta=\sin^2\beta$可得 $1+2\sin^2\beta=4\sin^2\alpha$，即 $1+2\sin^2\beta-4\sin^2\alpha=0$，

则 $4\cos^2 2\alpha-\cos^2 2\beta=(2\cos 2\alpha-\cos 2\beta)(2\cos 2\alpha+\cos 2\beta)=(1-4\sin^2\alpha+2\sin^2\beta)(2\cos 2\alpha+\cos 2\beta)=0$.

15.答案　1 170

解析　若甲组志愿服务队是单独一组参加一项志愿服务，则有 $C_3^1\cdot\left(\frac{C_5^1C_4^1C_3^3}{A_2^2}+\frac{C_5^2C_3^2C_1^1}{A_2^2}\right)\cdot A_3^3=450$(种)参与方式，

若甲组志愿服务队是两个组一起参加一项志愿服务，则有 $C_5^1C_3^1\cdot\frac{C_4^1C_3^1C_2^2}{A_2^2}\cdot A_3^3=540$(种)参与方式，

若甲组志愿服务队是三个组一起参加一项志愿服务，则有 $C_5^2C_3^1\cdot\frac{C_3^1C_2^1C_1^1}{A_3^3}\cdot A_3^3=180$(种)参与方式，

所以共有 $450+540+180=1\ 170$(种)参与方式.

16.答案　$\frac{\sqrt{6}}{2}$

解析　如图，设点 H 为$\triangle BCD$ 的中心，则 $AH\perp$平面 BCD，连接 BH，并延长 BH 交 CD 于点 E，则点 E 为 CD 的

中点，$BH=\frac{2}{3}BE$，则四面体 $ABCD$ 的内切球的球心 O_1 在 AH 上， 且四面体 $PBCD$ 的外接球的球心 O_2 在 AH 上，

设四面体 $ABCD$ 的内切球的半径为 r，$BE=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$BH=\frac{2}{3}BE=\sqrt{3}$，$AH=\sqrt{6}$，

则 $V_{A-BCD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{6}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$，

又 $V_{A-BCD}=V_{O_1-BCD}+V_{O_1-ABC}+V_{O_1-ACD}+V_{O_1-ABD}$，

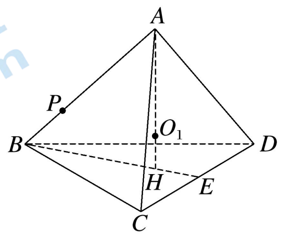
则$\frac{1}{3}\times4\times\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot r=\frac{9\sqrt{2}}{4}$，解得 $r=\frac{\sqrt{6}}{4}$，即 $O_1H=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

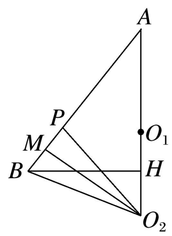
由四面体 $PBCD$ 的外接球的球心 O_2 在 AH 上，得 $O_2P=O_2B$，

记 BP 的中点为 M，则 $O_2M\perp BP$，$AM=\frac{5}{2}$，

$\cos\angle BAH=\frac{AM}{AO_2}=\frac{AH}{AB}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $AO_2=\frac{5\sqrt{6}}{4}$，

则 $O_2H=\frac{\sqrt{6}}{4}$，所以 $O_1O_2=\frac{\sqrt{6}}{2}$.





四、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17．解 (1)若 $B=C$，则 $\cos(B-C)=1$.

因为 $2\cos(B-C)\cos A+\cos 2A=1+2\cos A\cos(B+C)$，所以 $2\cos A+\cos 2A=1+2\cos A\cos(\pi-A)$，

$2\cos A+2\cos^2A-1=1-2\cos^2A$，整理得 $2\cos^2A+\cos A-1=0$.

解得 $\cos A=-1$(舍去)或 $\cos A=\frac{1}{2}$，

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为 $2\cos(B-C)\cos A+\cos 2A=1+2\cos A\cos(B+C)$，

所以 $2\cos(B-C)\cos A-2\cos A\cos(B+C)=1-\cos 2A$，$2[\cos(B-C)-\cos(B+C)]\cos A=1-\cos 2A$，

$2[\cos B\cos C+\sin B\sin C-(\cos B\cos C-\sin B\sin C)]\cos A=1-\cos 2A$，

整理得 $2\sin B\sin C\cos A=\sin^2A$，

由正弦定理得 $2bc\cos A=a^2$，由余弦定理得 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A=a^2$，

即 $b^2+c^2=2a^2$，所以$\frac{b^2+c^2}{a^2}=2$.

18．(1)**证明** 取 AD 中点 O，连接 OP，OB，

∵△PAD 是边长为 2 的正三角形，∴$OP=\sqrt{3}$，$OP\perp AD$，

又 $AB=BD=\sqrt{7}$，∴$OB\perp AD$，且 $OB=\sqrt{AB^2-OA^2}=\sqrt{6}$.于是 $OB^2+OP^2=9=PB^2$，从而 $OP\perp OB$.

又 $OP\not\subset$平面 $ABCD$，$AD\cap OB=O$，AD，$OB\subset$平面 $ABCD$，

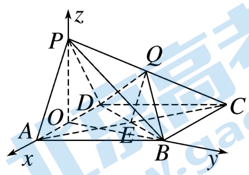
∴$OP\perp$平面 $ABCD$，而 $OP\subset$平面 PAD，

∴平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$.

(2)**解** 连接 AC 交 BD 于 E，则 E 为 AC 的中点，连接 EQ，

当 PA∥平面 BDQ 时，PA∥EQ，所以 Q 是 PC 中点.

由(1)知 OA，OB，OP 两两垂直，以 O 为坐标原点，OA，OB，OP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，如图所示，



则 $B(0,\sqrt{6},0)$，$C(-2,\sqrt{6},0)$，$D(-1,0,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$Q\left(-1,\dfrac{\sqrt{6}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\overrightarrow{DB}=(1,\sqrt{6},0)$，$\overrightarrow{DQ}=\left(0,\dfrac{\sqrt{6}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

设平面 BDQ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=x+\sqrt{6}y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DQ}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{6},1,-\sqrt{2})$.

易得平面 ABD 的一个法向量是 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，

$\therefore|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{(-\sqrt{6})^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，

$\therefore$平面 BDQ 与平面 ABD 夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

19．解　(1)由数据可得 $\overline{x}=\dfrac{1+2+4+6+10+13+20}{7}=8$，$\overline{y}=\dfrac{19+32+44+40+52+53+54}{7}=42$，

又 $\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i=2\,788$，$\sum\limits_{i=1}^{7}x_i^2=726$，

$\therefore\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}=\dfrac{2\,788-7\times8\times42}{726-7\times8^2}=\dfrac{218}{139}\approx1.57$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=42-\dfrac{218}{139}\times8\approx29.45$.

$\therefore\hat{y}=1.57x+29.45$.

(2)由题知，7 家超市中有 3 家超市的广告是“好广告”，X 的可能取值是 0,1,2,3，

$P(X=0)=\dfrac{C_4^4}{C_7^4}=\dfrac{1}{35}$，$P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_4^3}{C_7^4}=\dfrac{12}{35}$，$P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_4^2}{C_7^4}=\dfrac{18}{35}$，$P(X=3)=\dfrac{C_3^3C_4^1}{C_7^4}=\dfrac{4}{35}$，

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{35}$	$\dfrac{12}{35}$	$\dfrac{18}{35}$	$\dfrac{4}{35}$

$\therefore E(X)=0\times\dfrac{1}{35}+1\times\dfrac{12}{35}+2\times\dfrac{18}{35}+3\times\dfrac{4}{35}=\dfrac{60}{35}=\dfrac{12}{7}$.

20．解　(1)$\because a_na_{n+1}^2-2(a_n^2-1)a_{n+1}-a_n=0\Rightarrow a_n(a_{n+1}^2-1)=2(a_n^2-1)a_{n+1}$，

$\therefore b_{n+1}=a_{n+1}-\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}^2-1}{a_{n+1}}=2\cdot\dfrac{a_n^2-1}{a_n}=2\left(a_n-\dfrac{1}{a_n}\right)=2b_n$，

$\therefore\{b_n\}$是公比为 2 的等比数列，

$b_1=a_1-\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{8}{3}$，$\therefore b_n=b_1\cdot 2^{n-1}=\dfrac{2^{n+2}}{3}$.

(2)$S_n+T_n=\left(a_1^2+\dfrac{1}{a_1^2}\right)+\left(a_2^2+\dfrac{1}{a_2^2}\right)+\cdots+\left(a_n^2+\dfrac{1}{a_n^2}\right)=\left(a_1-\dfrac{1}{a_1}\right)^2+\left(a_2-\dfrac{1}{a_2}\right)^2+\cdots+\left(a_n-\dfrac{1}{a_n}\right)^2+2n$

$=\left(\dfrac{8}{3}\right)^2+\left(\dfrac{8}{3}\right)^2\cdot 4+\left(\dfrac{8}{3}\right)^2\cdot 4^2+\cdots+\left(\dfrac{8}{3}\right)^2\cdot 4^{n-1}+2n=\dfrac{\dfrac{64}{9}(4^n-1)}{4-1}+2n=\dfrac{64}{27}(4^n-1)+2n$，

若 S_n+T_n 为整数，$\because 2n\in\mathbf{Z}$，$\therefore\dfrac{64}{27}(4^n-1)\in\mathbf{Z}$，即$\dfrac{1}{27}(4^n-1)\in\mathbf{Z}$，

$4^n-1=(3+1)^n-1=C_n^0 3^n+C_n^1 3^{n-1}+\cdots+C_n^{n-3}3^3+C_n^{n-2}3^2+C_n^{n-1}3+C_n^n-1$

$=C_n^0 3^n+C_n^1 3^{n-1}+\cdots+C_n^{n-3}3^3+C_n^{n-2}3^2+C_n^{n-1}3$，

$\therefore C_n^{n-2}3^2+C_n^{n-1}3$ 能被 27 整除，

$C_n^{n-2}3^2+C_n^{n-1}3=9\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}+3n=\dfrac{9n^2-3n}{2}$，

$\therefore$当 $n=9$ 时，$C_n^{n-2}3^2+C_n^{n-1}3$ 能被 27 整除，

$\therefore n$ 的最小值是 9.

21．**解**　(1)因为线段 EF_2 的中点$\left(0，\dfrac{1}{2}\right)$在 y 轴上，O 为 F_1F_2 的中点，

所以 $EF_1/\!/y$ 轴，即 $EF\perp x$ 轴，

设 $E(-c,1)$，$F(-c，-1)$，代入椭圆Γ的方程得$\dfrac{c^2}{16}+\dfrac{1}{b^2}=1$，

又 $c^2=a^2-b^2=16-b^2$，所以$\dfrac{16-b^2}{16}+\dfrac{1}{b^2}=1$，

即 $1-\dfrac{b^2}{16}+\dfrac{1}{b^2}=1$，所以$\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{b^2}{16}$，解得 $b^2=4$，

所以椭圆Γ的方程为$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

(2)由题意可得 $B(4,0)$，$C(0,2)$，所以直线 BC 的方程的截距式为$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=1$，即为 $x+2y-4=0$.

设直线 AP 的斜率为 k，点 P 的坐标为$(x_P，y_P)$，则 AP 的方程为 $y=k(x+4)$，

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1，\\ y=k(x+4)，\end{cases}$得$(1+4k^2)x^2+32k^2x+64k^2-16=0$，所以$-4x_P=\dfrac{64k^2-16}{1+4k^2}$，

即 $x_P=\dfrac{4-16k^2}{1+4k^2}$，$y_P=k(x_P+4)=\dfrac{8k}{1+4k^2}$，所以 $P\left(\dfrac{4-16k^2}{1+4k^2}，\dfrac{8k}{1+4k^2}\right)\left(0<k<\dfrac{1}{2}\right)$.

直线 CP 的方程为 $y=\dfrac{y_P-2}{x_P}x+2$，

设点 M，Q 的坐标分别为$(x_M,0)$，$(x_Q，y_Q)$，

在 $y=\dfrac{y_P-2}{x_P}x+2$ 中，令 $y=0$ 得 $x_M=\dfrac{-2x_P}{y_P-2}=\dfrac{4(1+2k)}{1-2k}$.

联立$\begin{cases}x+2y-4=0，\\ y=k(x+4)，\end{cases}$得 $x_Q=\dfrac{4(1-2k)}{1+2k}$.

所以 $S_1 \cdot S_2=\frac{4(1-2k)}{1+2k} \cdot \frac{4(1+2k)}{1-2k}=16$.

22．(1)**解**　依题意，$f(x)=\frac{\sin x+c}{e^x}$，求导得 $f'(x)=\frac{\cos x-\sin x-c}{e^x}$，

于是 $f'(0)=1-c=0$，解得 $c=1$，

而当 $c=1$ 时，$f(x)=\frac{\sin x+1}{e^x}$，$f(0)=1$，

因此曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线为 $y=1$，平行于 x 轴，所以 $c=1$.

(2)**证明**　由(1)知，$f(x)=\frac{b\sin x+1}{a^x}$，

当 $x\in[0, \pi]$时，$f(x)\leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{b\sin x+1}{a^x}\leqslant 1 \Leftrightarrow a^x-b\sin x-1\geqslant 0$，

令 $g(x)=a^x-b\sin x-1$，$x\in[0, \pi]$，求导得 $g'(x)=a^x\ln a-b\cos x$，

若 $0<a<1$，则 $g(\pi)=a^\pi-1<0$，不符合题意，

若 $a>1$，当 $b\leqslant 0$ 时，$g(x)=a^x-1-b\sin x\geqslant 0$，符合题意；

当 $0<b\leqslant \ln a$ 时，$g'(x)=a^x\ln a-b\cos x\geqslant a^x\ln a-b\geqslant \ln a-b\geqslant 0$，

因此函数 $g(x)$在$[0, \pi]$上单调递增，$g(x)\geqslant g(0)=0$，符合题意；

当 $b>\ln a$ 时，令 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=a^x(\ln a)^2+b\sin x>0$，

即函数 $g'(x)$在$[0, \pi]$上单调递增，

而 $g'(0)=\ln a-b<0$，$g'(\pi)=a^\pi\ln a+b>0$，

则存在 $x_0\in(0, \pi)$使得 $g'(x_0)=0$，

当 $x\in(0, x_0)$时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$在$(0, x_0)$上单调递减，

当 $x\in(0, x_0)$时，$g(x)<g(0)=0$，不符合题意，

综上得 $b\leqslant \ln a$ 且 $a>1$，则有 $a-eb\geqslant a-e\ln a$，

令$\varphi(a)=a-e\ln a$，$a>1$，

求导得$\varphi'(a)=1-\frac{e}{a}$，当 $1<a<e$ 时，$\varphi'(a)<0$，当 $a>e$ 时，$\varphi'(a)>0$，

函数$\varphi(a)$在$(1, e)$上单调递减，在$(e, +\infty)$上单调递增，

因此$\varphi(a)\geqslant\varphi(e)=e-e\ln e=0$，即 $a-eb\geqslant a-e\ln a\geqslant 0$，

所以 $a\geqslant eb$.