

# 数 学

2019.11

(考试时间 100 分钟      满分 120 分)

本试卷分为选择题（共 50 分）和非选择题（共 70 分）两部分

## 第一部分      (选择题    共 40 分)

一、选择题:本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 50 分.在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

(1) 已知全集  $U = R$ , 能正确表示集合  $M = \{x|x < 1\}$  和  $N = \{x|0 < x < 2\}$  关系的 Venn 图是 ( )



(A)                      (B)                      (C)                      (D)

(2) 命题 “ $\forall x \in R, x^2 > 0$ ” 的否定是 ( )

(A)  $\forall x \in R, x^2 \leq 0$     (B)  $\exists x \in R, x^2 \leq 0$     (C)  $\forall x \notin R, x^2 \leq 0$     (D)  $\exists x \notin R, x^2 \leq 0$

(3) 函数  $f(x) = \sqrt{x} \lg(1-x)$  的定义域为 ( )

(A)  $(0,1)$               (B)  $[0,1)$               (C)  $(0,1]$               (D)  $[0,1]$

(4) 下列函数中, 在  $(-1,1)$  上单调递增的是 ( )

(A)  $y = \ln x$               (B)  $y = -\frac{1}{x}$               (C)  $y = e^{-x}$               (D)  $y = x^3$

(5) 已知  $a, b, c \in R, a < b$ , 则下列不等式正确的是 ( )

(A)  $ac < bc$               (B)  $(a-b)c^2 \leq 0$               (C)  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$               (D)  $a^2 > b^2$

(6) 若  $a = (\frac{1}{3})^{\frac{2}{3}}, b = (\frac{2}{3})^{\frac{1}{3}}, c = (\frac{2}{3})^{\frac{2}{3}}$ , 则 ( )

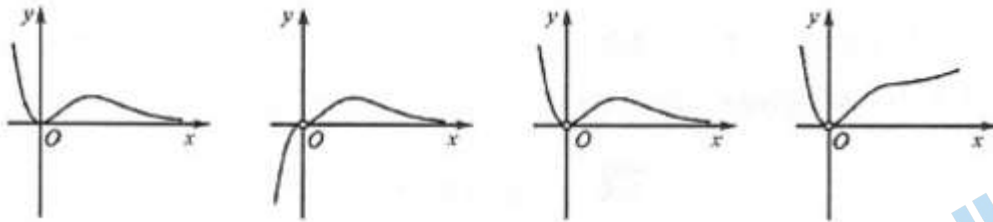
(A)  $c < a < b$               (B)  $c < b < a$               (C)  $a < c < b$               (D)  $b < a < c$

(7) 设  $a, b \in R$ , 且  $ab \neq 0$ , 则 “ $ab > 1$ ” 是 “ $a > \frac{1}{b}$ ” 的 ( )

(A) 充分而不必要条件              (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件              (D) 既不充分也不必要条件

(8) 函数  $f(x) = \frac{x^3}{3^x - 1}$  的图象大致为 ( )

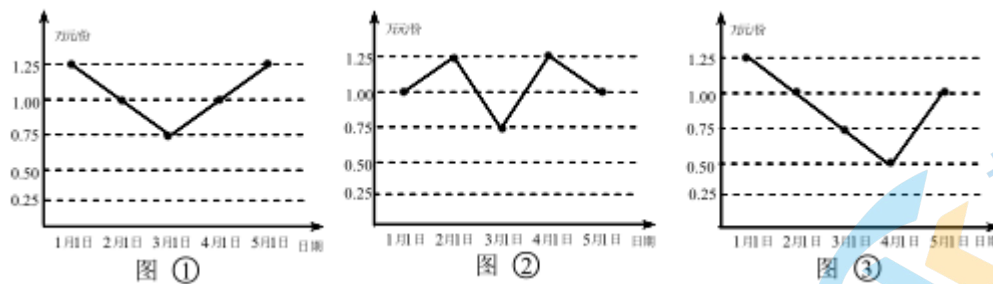


- (A) (B) (C) (D)

(9) 已知  $f(x)$  是定义在  $R$  上的偶函数, 且在区间  $(-\infty, 0)$  上单调递增. 若实数  $a$  满足  $f(2^{|a-1|}) > f(-\sqrt{2})$ , 则  $a$  的取值范围是

- (A)  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  (B)  $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$   
(C)  $(0, 2)$  (D)  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

(10) 因市场战略储备的需要, 某公司 1 月 1 日起, 每月 1 日购买了相同金额的某种物资, 连续购买了 4 次. 由于市场变化, 5 月 1 日该公司不得不将此物资全部卖出. 已知该物资的购买和卖出都是以份为计价单位进行交易, 且该公司在买卖的过程中没有亏本, 那么下面 3 个折线图中, 所有可以反映这种物资每份价格 (单位: 万元) 的变化情况的是 ( )



- (A) ①② (B) ①③ (C) ②③ (D) ③

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

(11) 计算  $27^{-\frac{1}{3}} + \log_3 4 \cdot \log_2 9 =$  \_\_\_\_\_.

(12) 若  $f(x) = ax^b$  是过点  $(2, \frac{1}{4})$  的幂函数, 则  $a+b =$  \_\_\_\_\_.

(13) 已知  $\log_2 x + \log_2 y = 1$ , 则  $x+y$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

(14) 已知  $f(x)$  是奇函数,  $g(x)$  是偶函数, 且  $f(-1) + g(1) = 2$ ,  $f(1) + g(-1) = 4$ , 则  $g(1) =$  \_\_\_\_\_.

(15) 某公司购买一批机器投入生产, 据市场分析每台机器生产的产品可获得的总利润 $y$  (万元) 与机器运转时间 $x$  (年数,  $x \in \mathbf{N}^+$ ) 的关系为  $y = -x^2 + 18x - 25$ . 则当每台机器运转\_\_\_\_\_年时, 年平均利润最大, 最大值是\_\_\_\_\_万元.

(16) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 3 \\ f(x-1), & x > 3 \end{cases}$

(i)  $f(2 + \log_2 3)$  的值为\_\_\_\_\_;

(ii) 当  $x > 0$  时, 方程  $f(x) + x = a$  有且仅有一个实根, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

### 三、解答题: 本大题共 5 小题, 共 56 分.

(17) (本小题 11 分)

已知函数  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ .

(I) 写出  $f(x)$  的定义域, 并证明  $f(x)$  是奇函数;

(II) 判断  $f(x)$  在区间  $(-1, 1)$  上的单调性, 并用定义证明.

(18) (本小题满分 12 分)

已知集合  $A$  为函数  $y = \lg(-x^2 + 6x - 8)$  的定义域, 集合  $B = \{x \mid x^2 - 4ax + 3a^2 < 0\}$ .

(I) 当  $a = 2$  时, 求  $\partial_b A$ ;

(II) 若  $A \cup B = A$ , 求实数  $a$  的值;

(III) 设集合  $C = B \cap \mathbf{N}$  ( $\mathbf{N}$  为自然数集), 若  $C$  中有且只有三个元素, 请直接写出所有的集合  $C$ .

(19) (本小题满分 11 分)

专注北京高考升学

某家庭进行理财投资，根据长期收益率市场预测，投资债券等稳健型产品的收益  $f(x)$  与投资额  $x$  成正比，投资股票等风险型产品的收益  $g(x)$  与投资额  $x$  的算术平方根成正比. 已知投资 1 万元时，稳健型产品与风险型产品的收益分别为 0.125 万元和 0.5 万元.

(I) 写出  $f(x)$  和  $g(x)$  的解析式和定义域;

(II) 该家庭现有 20 万元资金，全部用于理财投资，怎样分配资金才能获得最大收益? 其最大收益为多少万元? .

(20) (本小题满分 12 分)

已知  $f(x) = a^{2-x}$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 在区间  $[1, 2]$  上的最大值与最小值之和为  $a^2 - 1$ ,  $g(x) = x^2 - abx - a + b$ , 其中  $b \in \mathbb{R}$ .

(I) 直接写出  $f(x)$  的解析式和单调性;

(II) 若  $g(x) \geq -1 - bx$  对  $\forall x < 1$  恒成立，求实数  $b$  的取值范围;

(III) 设  $D = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ , 若  $\exists x_1 \in D$ , 使得对  $\forall x_2 \in D$ , 都有  $f(x_1) \geq g(x_2)$ , 求实数  $b$  的取值范围.

(21) (本小题满分 10 分)

设  $A$  是由  $n$  个有序实数构成的一个数组，记作:  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n\}$ . 其中  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) 称为数组  $A$  的“元”， $i$  为  $a_i$  的下标.

如果数组  $S$  中的每个“元”都来自数组  $A$  中不同下标的“元”则称  $S$  为  $A$  的子数组. 定义两个数组

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  的关系数为  $C(A, B) = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$ .

(I) 若  $A = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $B = (-1, 1, 2, 3)$ , 设  $S$  是  $B$  的含有两个“元”的子数组，求  $C(A, S)$  的最大值及此时的数组  $S$ ;

(II) 若  $A = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ ,  $B = (0, a, b, c)$ , 且  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ,  $S$  为  $B$  的含有三个“元”的子数组，求  $C(A, S)$  的最大值