市朝阳区高三年级第一次综合练习

数学学科测试(文史类)

2018.3

(考试时间 120 分钟　满分 150 分)

第一部分(选择题　共 40 分)

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

1. 已知全集为实数集 $\mathbf{R}$,集合 $A=\{x\mid x^2-3x<0\}$,$B=\{x\mid \log_2 x>0\}$,则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=$

A. $(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$　　B. $(0,1]$

C. $[3,+\infty)$　　D. $\varnothing$

2. 在复平面内,复数 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ 所对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$,$\boldsymbol{b}=(2,x-1)$,且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则实数 x 的值是

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. -1 或 2

4. 已知直线 $m\perp$ 平面 α,则"直线 $n\perp m$"是"$n/\!/\alpha$"的

A. 充分但不必要条件　　B. 必要但不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

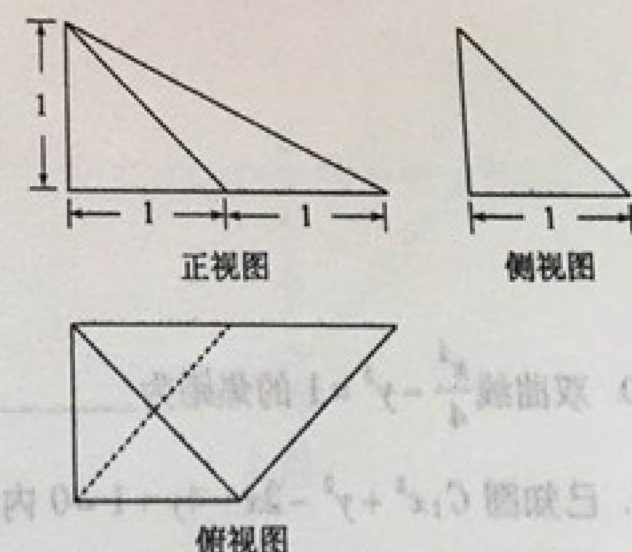
5. 已知 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点,过点 F 的直线 l 交抛物线 C 于 A,B 两点,若 $|AB|=8$,则线段 AB 的中点 M 到直线 $x+1=0$ 的距离为

A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 16

6. 某四棱锥的三视图如图所示,则该四棱锥的体积等于

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{2}{3}$

C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{3}{4}$



(第 6 题图)

7. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x^2+1}-\dfrac{1}{2x}$ 的零点个数为

A. 0　　　B. 1　　　C. 2　　　D. 4

8. 某学校举办科技节活动，有甲、乙、丙、丁四个团队参加"智能机器人"项目比赛，该项目只设置一个一等奖. 在评奖揭晓前，小张、小王、小李、小赵四位同学对这四个参赛团队获奖结果预测如下：

小张说："甲或乙团队获得一等奖"；

小王说："丁团队获得一等奖"；

小李说："乙、丙两个团队均未获得一等奖"；

小赵说："甲团队获得一等奖".

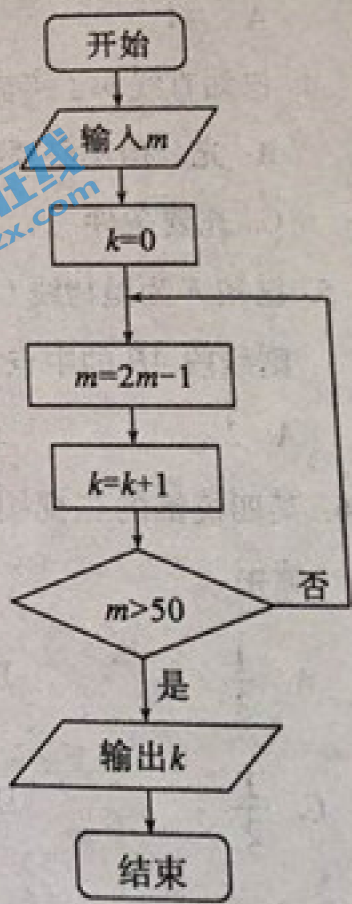
若这四位同学中只有两位预测结果是对的，则获得一等奖的团队是

A. 甲　　　B. 乙　　　C. 丙　　　D. 丁

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在答题卡上.

9. 执行如图所示的程序框图．若输入 $m=5$，则输出 k 的值为________.



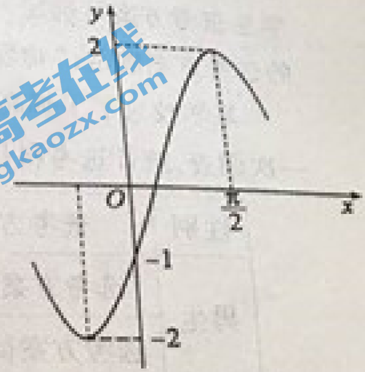
（第 9 题图）

10. 双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的焦距为________；渐近线方程为________.

11. 已知圆 $C: x^2+y^2-2x-4y+1=0$ 内有一点 $P(2,1)$，经过点 P 的直线 l 与圆 C 交于 A,B 两点，当弦 AB 恰被点 P 平分时，直线 l 的方程为________

12. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases} x+y-1\geq 0, \\ x-y-1\leq 0, \\ y\leq 1, \end{cases}$ 若 $z=mx+y(m>0)$ 取得最小值的最优解有无数多个，则 m 的值为________.

13. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则 $\varphi=$________；$\omega=$________.



（第 13 题图）

14. 许多建筑物的地板是用正多边形的砖板铺成的（可以是多种正多边形）. 如果要求用这些正多边形的砖板铺满地面，在地面某一点（不在边界上）有 k 块砖板拼在一起，则 k 的所有可能取值为________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.（本小题满分 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=2a_n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

（Ⅰ）求 a_1,a_2,a_3 的值；

（Ⅱ）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=2,b_{n+1}=a_n+b_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

16.（本小题满分 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$b=2a\cos A$.

（Ⅰ）若 $ac=5$，求 $\triangle ABC$ 的面积；

（Ⅱ）若 B 为锐角，求 $\sin C$ 的值.

17.（本小题满分 13 分）

某地区高考实行新方案，规定：语文、数学和英语是考生的必考科目，考生还须从物理、化学、生物、历史、地理和政治六个科目中选取三个科目作为选考科目．若一名学生从六个科目中选出了三个科目作为选考科目，则称该学生的选考方案确定；否则，称该学生选考方案待确定．例如，学生甲选择“物理、化学和生物”三个选考科目，则学生甲的选考方案确定，“物理、化学和生物”为其选考方案．

某学校为了了解高一年级 420 名学生选考科目的意向，随机选取 30 名学生进行了一次调查，统计选考科目人数如下表：

性别	选考方案确定情况	物理	化学	生物	历史	地理	政治
男生	选考方案确定的有 6 人	6	6	3	1	2	0
	选考方案待确定的有 8 人	5	4	0	1	2	1
女生	选考方案确定的有 10 人	8	9	6	3	3	1
	选考方案待确定的有 6 人	5	4	0	0	1	1

（Ⅰ）试估计该学校高一年级确定选考生物的学生有多少人？

（Ⅱ）写出选考方案确定的男生中选择“物理、化学和地理”的人数．（直接写出结果）

（Ⅲ）从选考方案确定的男生中任选 2 名，试求出这 2 名学生选考科目完全相同的概率．

18.（本小题满分 14 分）

如图 1，在梯形 $ABCD$ 中，$BC /\!/ AD$，$BC=1$，$AD=3$，$BE \perp AD$ 于 E，$BE=AE=1$．将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折起至 $\triangle A'BE$，使得平面 $A'BE \perp$ 平面 $BCDE$（如图 2），M 为线段 $A'D$ 上一点．

（Ⅰ）求证：$A'E \perp CD$；

（Ⅱ）若 M 为线段 $A'D$ 中点，求多面体 $A'BCME$ 与多面体 $MCDE$ 的体积之比；

（Ⅲ）是否存在一点 M，使得 $A'B /\!/$ 平面 MCE？若存在，求 $A'M$ 的长．若不存在，请说明理由．

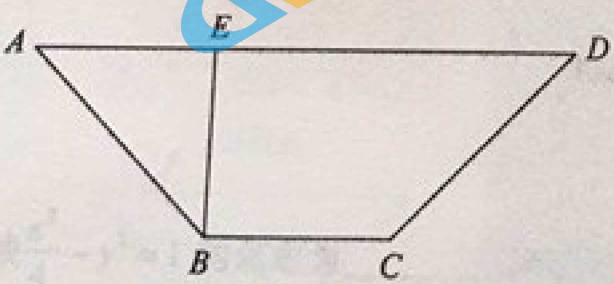


图 1

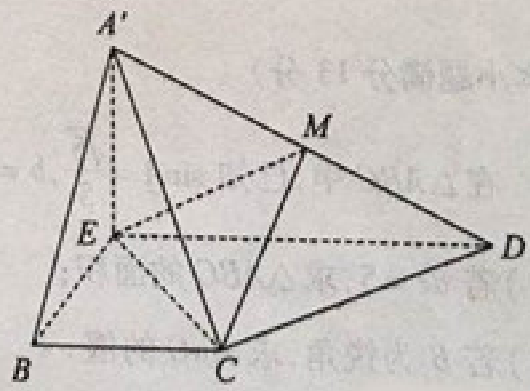


图 2

19.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 $(1,\frac{\sqrt{2}}{2})$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）过椭圆 C 左焦点的直线 l_1 与椭圆 C 交于 A,B 两点，直线 l_2 过坐标原点且直线 l_1 与 l_2 的斜率互为相反数，直线 l_2 与椭圆交于 E,F 两点且均不与点 A,B 重合，设直线 AE 的斜率为 k_1，直线 BF 的斜率为 k_2. 证明：k_1+k_2 为定值.

20.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\frac{\ln x-1}{x}-ax(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若 $a=0$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $a<-1$，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）若 $1<a<2$，求证：$f(x)<-1$.

数学学科测试答案(文史类)

2018. 3

一、选择题(本题满分 40 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	D	B	B	A	C	D

二、填空题(本题满分 30 分)

题号	9	10		11
答案	4	$2\sqrt{5}$	$y=\pm\frac{1}{2}x$	$x-y-1=0$
题号	12	13		14
答案	1	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{4}{3}$	3,4,5,6

三、解答题(本题满分 80 分)

15. (本小题满分 13 分)

解:(Ⅰ)$a_1=1, a_2=2, a_3=4$. ………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)因为 $S_n=2a_n-1(n\in\mathbf{N}^*)$,

所以,当 $n\geqslant 2$ 时,有 $S_{n-1}=2a_{n-1}-1$,

则 $a_n=2a_n-2a_{n-1}(n\geqslant 2)$,即 $a_n=2a_{n-1}(n\geqslant 2)$.

所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项,2 为公比的等比数列. 所以 $a_n=2^{n-1}$.

因为 $b_{n+1}=a_n+b_n$,所以 $b_{n+1}-b_n=2^{n-1}$.

则 $b_2-b_1=2^0$,

$b_3-b_2=2^1$,

…

$b_n-b_{n-1}=2^{n-2}$,

以上 $n-1$ 个式子相加得:$b_n-b_1=\dfrac{1\times(1-2^{n-1})}{1-2}$,

又因为 $b_1=2$,所以 $b_n=2^{n-1}+1(n\in\mathbf{N}^*)$. ……………………………… 13 分

16.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由 $b=2a\cos A$，得 $\cos A>0$，

因为 $\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\cos A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

因为 $b=2a\cos A$，所以 $\sin B=2\sin A\cos A=2\times\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{4}{5}$.

故 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=2$. …………………………………………… 7 分

（Ⅱ）因为 $\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin B=\frac{4}{5}$，因为 B 为锐角，所以 $\cos B=\frac{3}{5}$.

所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{11\sqrt{5}}{25}$. ……………………… 13 分

17.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由数据可知，男生确定选考生物的学生有 3 人，女生确定选考生物的学生有 6 人，该学校高一年级有 $\frac{9}{30}\times 420=126$ 人. ………………………………………………………… 3 分

（Ⅱ）选考方案确定的男生中，选择“物理、化学和地理”的人数是 2 人. ……………… 6 分

（Ⅲ）由数据可知，已确定选考科目的男生共 6 人. 其中有 3 人选择“物理、化学和生物”，记为 a_1,a_2,a_3；有 1 人选择“物理、化学和历史”，记为 b；有 2 人选择“物理、化学和地理”，记为 c_1,c_2.

从已确定选考科目的男生中任选 2 人，有 $a_1a_2,a_1a_3,a_1b,a_1c_1,a_1c_2,a_2a_3,a_2b,a_2c_1,a_2c_2,a_3b,a_3c_1,a_3c_2,bc_1,bc_2,c_1c_2$，共 15 种选法. 两位学生选考科目完全相同的选法种数有 $a_1a_2,a_1a_3,a_2a_3,c_1c_2$，共 4 种选法.

设事件 A：从已确定选考科目的男生中任选出 2 人，这两位学生选考科目完全相同.

则 $P(A)=\frac{4}{15}$. ………………………………………………………………………… 13 分

18.（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）证明：如图 1，在梯形 $ABCD$ 中，

因为 $BE\perp AD$，所以 $BE\perp A'E$（如图 2）．

因为平面 $A'BE\perp$ 平面 $BCDE$，且平面 $A'BE\cap$ 平面 $BCDE=BE$，

所以 $A'E\perp$ 平面 $BCDE$.

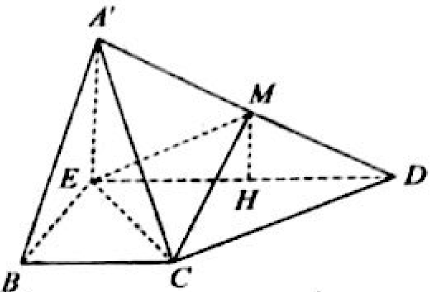
又因为 $CD\subset$ 平面 $BCDE$，所以 $A'E\perp CD$. ………………………………………… 4 分

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）可知 $A'E\perp$ 平面 $BCDE$，

所以 $A'E\perp BE$，$A'E\perp DE$.

过点 M 作 $MH\perp DE$ 于 H，则 $MH/\!/A'E$，

所以 $MH\perp$ 平面 $BCDE$.



因为 M 为 $A'D$ 中点，$A'E=1$，所以 $MH=\frac{1}{2}$.

设四棱锥 $A'-BCDE$ 的体积为 V_1，则

$V_1=\frac{1}{3}S_{四边形BCDE}\cdot A'E=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(BC+DE)\cdot BE\cdot A'E=\frac{1}{6}(1+2)\times1\times1=\frac{1}{2}$.

设三棱锥 $M-CDE$ 的体积为 V_2，则

$V_2=\frac{1}{3}S_{\triangle CDE}\cdot MH=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}DE\cdot BE\cdot MH=\frac{1}{6}\times2\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

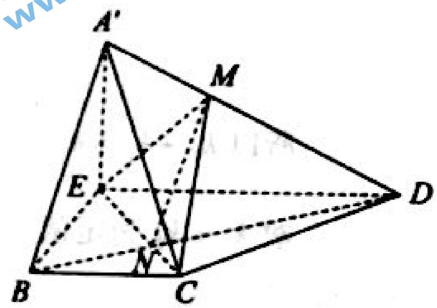
所以 $V_{多面体A'BCME}=V_1-V_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

所以 $V_{多面体A'BCME}:V_{多面体MCDE}=\frac{1}{3}:\frac{1}{6}=2:1$. ………………………………………… 9 分

（Ⅲ）解：存在一点 M，使得 $A'B/\!/$ 平面 MCE. 理由如下：

连结 BD 交 CE 于 N，连结 MN，则

平面 $A'BD\cap$ 平面 $MCE=MN$.



由 $A'B/\!/$ 平面 MCE，得 $A'B/\!/MN$.

所以 $A'M:MD=BN:ND$.

在梯形 $BCDE$ 中，

因为 $BC/\!/DE$，所以 $\triangle BNC\backsim\triangle DNE$.

又因为 $BC=1$，$DE=2$，所以 $BN:ND=BC:DE=1:2$.

于是 $A'M:MD=1:2$，所以 $\frac{A'M}{AD}=\frac{1}{3}$.

又因为 $A'E=1$，$DE=2$，所以 $A'D=\sqrt{5}$. 故 $A'M$ 的长为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$. ………………………… 14 分

19.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由题意得$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{2b^2}=1,\end{cases}$解得 $a=\sqrt{2}, b=1, c=1$.

故椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. …………………………………………………… 5 分

（Ⅱ）证明：由题意可设直线 l_1 的方程为 $y=k(x+1)$，直线 l_2 的方程为 $y=-kx$，

设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$E(x_3,y_3)$，$F(-x_3,-y_3)$，

则 $k_1+k_2=\dfrac{y_1-y_3}{x_1-x_3}+\dfrac{y_2+y_3}{x_2+x_3}$

$$=\frac{k(x_1+1)+kx_3}{x_1-x_3}+\frac{k(x_2+1)-kx_3}{x_2+x_3}=k\left[\frac{2x_1x_2+(x_1+x_2)+2x_3^2}{(x_1-x_3)(x_2+x_3)}\right].$$

由$\begin{cases}y=k(x+1),\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$得$(1+2k^2)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{-4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}$.

由$\begin{cases}y=-kx,\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$得$(1+2k^2)x^2=2$，所以 $x_3^2=\dfrac{2}{1+2k^2}$.

所以 $2x_1x_2+(x_1+x_2)+2x_3^2=\dfrac{4k^2-4}{1+2k^2}+\dfrac{-4k^2}{1+2k^2}+\dfrac{4}{1+2k^2}=0$.

所以 $k_1+k_2=k\left[\dfrac{2x_1x_2+(x_1+x_2)+2x_3^2}{(x_1-x_3)(x_2+x_3)}\right]=0$.

故 k_1+k_2 为定值，定值为 0. ……………………………………………………………… 14 分

20.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）若 $a=0$，则 $f(1)=-1$，$f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{x^2}$，$f'(1)=2$，

所以 $f(x)$ 在点 $(1,-1)$ 处的切线方程为 $2x-y-3=0$. ……………………………… 3 分

（Ⅱ）$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{2-ax^2-\ln x}{x^2}$.

令 $g(x)=2-ax^2-\ln x$，则 $g'(x)=\dfrac{-2ax^2-1}{x}$.

令 $g'(x)=0$，得 $x=\pm\sqrt{-\frac{1}{2a}}$（依题意 $-\frac{1}{2a}>0$）.

由 $g'(x)>0$，得 $x>\sqrt{-\frac{1}{2a}}$；由 $g'(x)<0$，得 $0<x<\sqrt{-\frac{1}{2a}}$.

所以，$g(x)$ 在区间 $(0,\sqrt{-\frac{1}{2a}})$ 上单调递减，在区间 $(\sqrt{-\frac{1}{2a}},+\infty)$ 上单调递增

所以，$g(x)_{\min}=g(\sqrt{-\frac{1}{2a}})=\frac{5}{2}-\ln\sqrt{-\frac{1}{2a}}$.

因为 $a<-1$，所以 $0<-\frac{1}{2a}<\frac{1}{2}$，$\ln\sqrt{-\frac{1}{2a}}<0$.

所以 $g(x)>0$，即 $f'(x)>0$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$. ………………………………… 8 分

（Ⅲ）由 $x>0$，$f(x)<-1$，等价于 $\frac{\ln x-1}{x}-ax<-1$，等价于 $ax^2-x+1-\ln x>0$，

设 $h(x)=ax^2-x+1-\ln x$，只须证 $h(x)>0$ 成立.

因为 $h'(x)=2ax-1-\frac{1}{x}=\frac{2ax^2-x-1}{x}$，$1<a<2$，

由 $h'(x)=0$，得 $2ax^2-x-1=0$ 有异号两根.

令其正根为 x_0，则 $2ax_0^2-x_0-1=0$.

在 $(0,x_0)$ 上 $h'(x)<0$，在 $(x_0,+\infty)$ 上 $h'(x)>0$.

则 $h(x)$ 的最小值为 $h(x_0)=ax_0^2-x_0+1-\ln x_0$

$$=\frac{1+x_0}{2}-x_0+1-\ln x_0$$

$$=\frac{3-x_0}{2}-\ln x_0.$$

又 $h'(1)=2a-2>0$，$h'(\frac{1}{2})=2(\frac{a}{2}-\frac{3}{2})=a-3<0$，

所以 $\frac{1}{2}<x_0<1$.

则 $\frac{3-x_0}{2}>0$，$-\ln x_0>0$.

因此 $\frac{3-x_0}{2}-\ln x_0>0$，即 $h(x_0)>0$. 所以 $h(x)>0$.

所以 $f(x)<-1$. ……………………………………………………………… 13 分