

北京一零一中 2022-2023 学年度第一学期高二数学国庆作业二参考答案

1. (2014 高考广东理 5) B

通过向量夹角公式 $\cos\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$, 将选项代入验证即可.

答案为 B.

2. (2010 三基小题训练 (16) 7) C

3. C

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \\ &= -\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}. \end{aligned}$$

4. A

因为 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 1 \times (-2) + (-5) \times 1 + 7 = 0$, 所以 $\mathbf{a} \perp \mathbf{n}$, 所以 $l \parallel \alpha$ 或 $l \subset \alpha$.

5. (2013 高考北京文 8) B

设长方体的棱长为 a , 建立空间直角坐标系, 如图所示.

则 $D(0, 0, 0)$, $D_1(0, 0, a)$, $C_1(0, a, a)$, $C(0, a, 0)$, $B(a, a, 0)$,

$B_1(a, a, a)$, $A(a, 0, 0)$, $A_1(a, 0, a)$,

$P(\frac{2}{3}a, \frac{2}{3}a, \frac{1}{3}a)$,

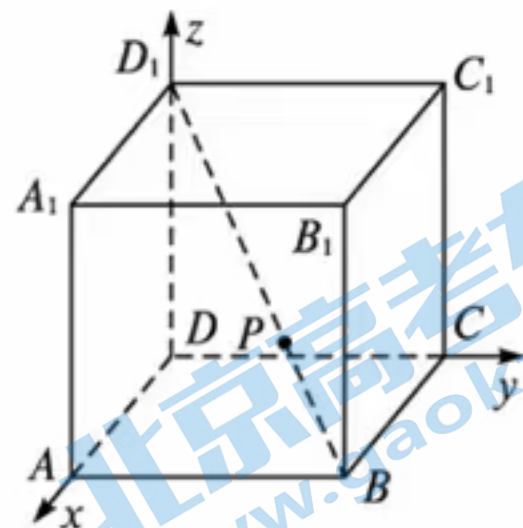
$$|\overrightarrow{PB}| = \sqrt{\frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}a,$$

$$|\overrightarrow{PD}| = \sqrt{\frac{4}{9}a^2 + \frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2} = a,$$

$$|\overrightarrow{PD_1}| = \sqrt{\frac{4}{9}a^2 + \frac{4}{9}a^2 + \frac{4}{9}a^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a, |\overrightarrow{PC_1}| = |\overrightarrow{PA_1}| = \sqrt{\frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2 + \frac{4}{9}a^2} = a,$$

$$|\overrightarrow{PC}| = |\overrightarrow{PA}| = \sqrt{\frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a, |\overrightarrow{PB_1}| = \sqrt{\frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2 + \frac{4}{9}a^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a,$$

故有 4 个不同的取值, 答案为 B.

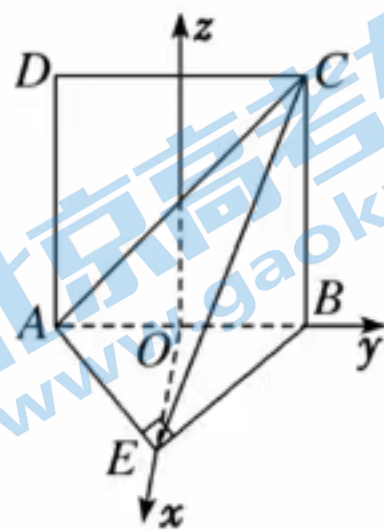


6. B

建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $A(0, -1, 0)$, $E(1, 0, 0)$, $D(0, -1, 2)$, $C(0, 1, 2)$. $\overrightarrow{AD} = (0, 0, 2)$, $\overrightarrow{AE} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 2, 2)$. 设平面 ACE 的一个法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} x + y = 0, \\ 2y + 2z = 0. \end{cases} \quad \text{令 } y = 1, \text{ 则 } \mathbf{n} =$$

$$(-1, 1, -1). \text{ 故点 } D \text{ 到平面 } ACE \text{ 的距离为 } d = \left| \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right| = \left| \frac{-2}{\sqrt{3}} \right| = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$



7. (2014 高考四川理 8) B

8. (2014 高考北京理 7) D

三棱锥 $D-ABC$ 在平面 xOy 上的投影为 $\triangle ABC$, 所以 $S_1 = 2$,

设 D 在 yOz , zOx 平面上的投影分别为 $\triangle OCD_2$, $\triangle OAD_1$,

因为 $D_1(0, 1, \sqrt{2})$, $D_2(1, 0, \sqrt{2})$,

所以 $S_2 = S_3 = \sqrt{2}$, 故选 D.

9. (2020 海淀二模 9) C

方法一: 设 B_1B 中点为 M , 则 $D_1O \perp OM$, 又 $D_1O \perp OC$, 所以 $D_1O \perp$ 平面 OCM , 所以点 P 的轨迹为线段 CM .

方法二: 以 $\overrightarrow{CB}$ 为 x 轴, $\overrightarrow{CC_1}$ 为 y 轴, $\overrightarrow{CD}$ 为 z 轴建系, 设 $P(x, y, 0)$, 由 $D_1O \perp OP$ 可得 $y = \frac{1}{2}x$.

10. A

以 D 点为坐标原点, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向建立空间直角坐标系 (图略), 设 $DA = 2$, 易得 $\overrightarrow{EF} = (1, 0, -1)$, 设 $\overrightarrow{CM} = \lambda \overrightarrow{CA_1} = (2\lambda, -2\lambda, 2\lambda)$ ($0 \leq \lambda \leq 1$),

则 $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = (2\lambda - 2, -2\lambda, 2\lambda)$, 则 $\cos \theta = |\cos \langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{EF} \rangle| = \frac{2}{\sqrt{2} \times \sqrt{(2\lambda - 2)^2 + 8\lambda^2}} =$

$$\frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{3\lambda^2 - 2\lambda + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{3(\lambda - \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3}}} \quad (0 \leq \lambda \leq 1). \text{ 当 } \lambda = \frac{1}{3} \text{ 时, } \cos \theta \text{ 取到最大}$$

值 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 此时 $\theta = \frac{\pi}{6}$; 当 $\lambda = 1$ 时, $\cos \theta$ 取到最小值 $\frac{1}{2}$, 此时 $\theta = \frac{\pi}{3}$, 所以 θ 的取值范围为

$$[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}].$$

11. 30° .

12. 11.

13. 5.

14. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

15. ②④.

16. (2014 高考北京理 17)

(1) 在正方形中, 因为 B 是 AM 的中点, 所以 $AB \parallel DE$,

又因为 $AB \not\subset$ 平面 PDE ,

所以 $AB \parallel$ 平面 PDE ,

因为 $AB \subset$ 平面 ABF , 且平面 $ABF \cap$ 平面 $PDF = FG$,

所以 $AB \parallel FG$;

(2) 因为 $PA \perp$ 底面 $ABCDE$, 所以 $PA \perp AB$, $PA \perp AE$,

如图建立空间直角坐标系,

则 $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(2, 1, 0)$, $P(0, 0, 2)$, $F(0, 1, 1)$,

$\overrightarrow{BC} = (1, 1, 0)$,

设平面 ABF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AF} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y + z = 0, \end{cases}$$

令 $z = 1$, 则 $y = -1$, 所以 $\mathbf{n} = (0, -1, 1)$,

设直线 BC 与平面 ABF 所成角为 α ,

$$\sin \alpha = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{BC} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{1}{2},$$

因此直线 BC 与平面 ABF 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$.

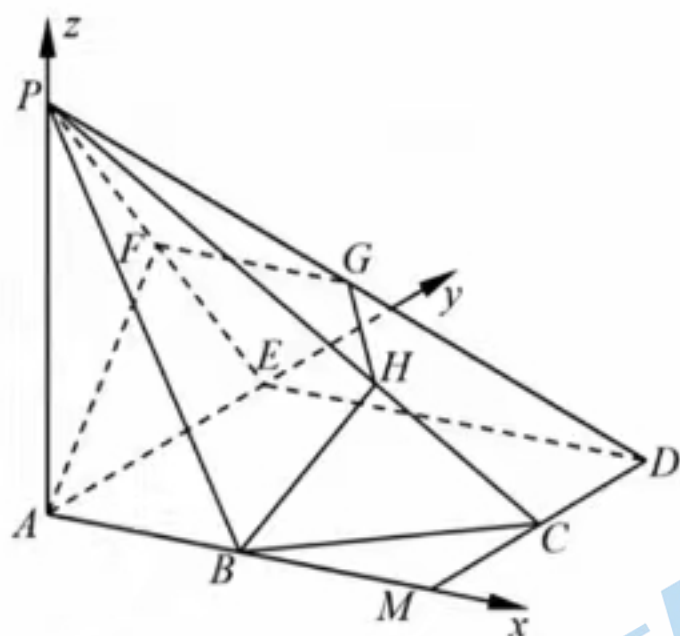
设点 H 的坐标为 (u, v, w) , 因为点 H 在棱 PC 上, 所以可设 $\overrightarrow{PH} = \lambda \overrightarrow{PC}$ ($0 < \lambda < 1$),

即 $(u, v, w - 2) = \lambda(2, 1, -2)$, 所以 $u = 2\lambda$, $v = \lambda$, $w = 2 - 2\lambda$,

因为 $\mathbf{n}$ 是平面 ABF 的法向量, 所以 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$, 即 $(0, -1, 1) \cdot (2\lambda, \lambda, 2 - 2\lambda) = 0$, 解得 $\lambda = \frac{2}{3}$,

所以点 H 的坐标为 $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$,

$$\text{所以 } PH = \sqrt{(\frac{4}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (-\frac{4}{3})^2} = 2.$$



17. (2017 高考北京理 16)

(1) 设 AC, BD 交点为 E , 连接 ME .

因为 $PD \parallel$ 平面 MAC , 平面 $MAC \cap$ 平面 $PBD = ME$,

所以 $PD \parallel ME$.

因为 $ABCD$ 是正方形, 所以 E 为 BD 的中点.

所以 M 为 PB 的中点.

(2) 取 AD 的中点 O , 连接 OP, OE .

因为 $PA = PD$, 所以 $OP \perp AD$.

又因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$,

且 $OP \subset$ 平面 PAD ,

所以 $OP \perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $OE \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $OP \perp OE$.

因为 $ABCD$ 是正方形, 所以 $OE \perp AD$.

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$, 则 $P(0, 0, \sqrt{2})$, $D(2, 0, 0)$, $B(-2, 4, 0)$,

$\overrightarrow{BD} = (4, -4, 0)$, $\overrightarrow{PD} = (2, 0, -\sqrt{2})$.

设平面 BDP 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 4x - 4y = 0, \\ 2x - \sqrt{2}z = 0. \end{cases}$$

令 $x = 1$, 则 $y = 1$, $z = \sqrt{2}$. 于是 $\mathbf{n} = (1, 1, \sqrt{2})$.

平面 PAD 的法向量为 $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$, 所以 $\cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{p} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{p}|} = \frac{1}{2}$.

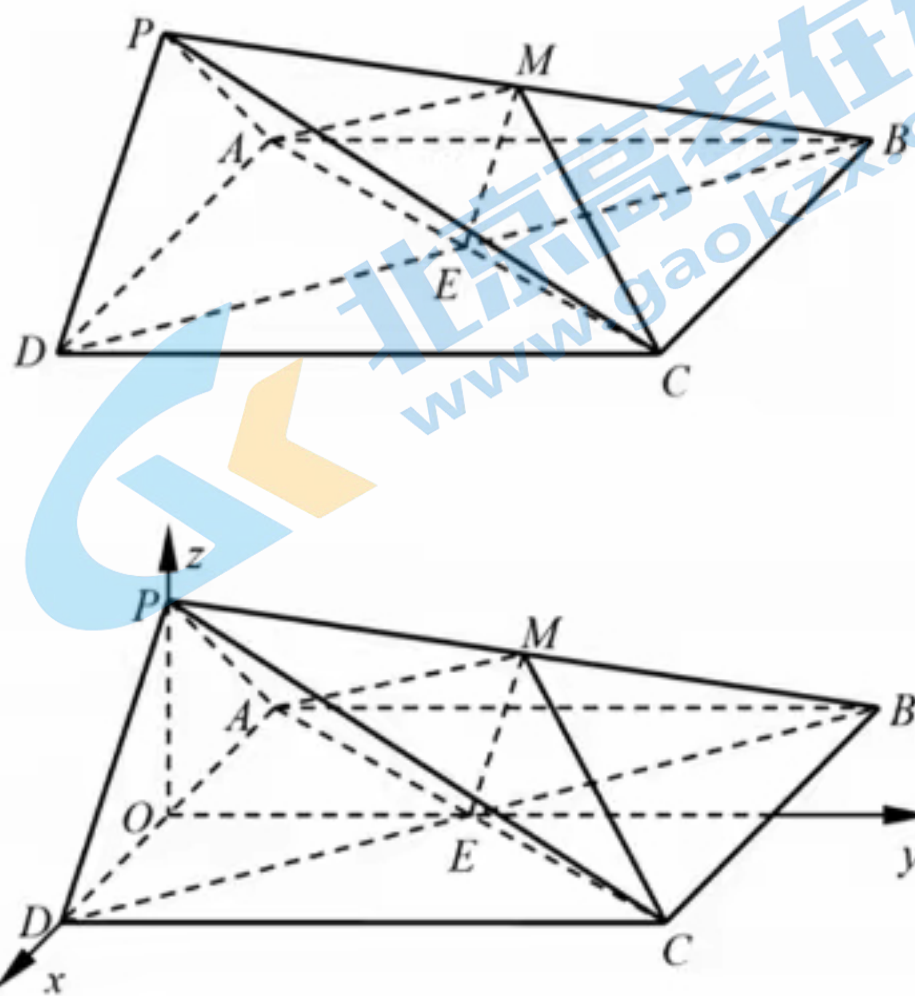
由题知二面角 $B-PD-A$ 为锐角, 所以它的大小为 $\frac{\pi}{3}$.

(3) 由题意知 $M(-1, 2, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $C(2, 4, 0)$, $\overrightarrow{MC} = (3, 2, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

设直线 MC 与平面 BDP 所成角为 α , 则

$$\sin \alpha = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{MC} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{MC}|}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{MC}|} = \frac{2\sqrt{6}}{9}.$$

所以直线 MC 与平面 BDP 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{6}}{9}$.



18. (2017 朝阳二模理 17)

(1) 因为 $A_1D = DC$, $\angle A_1DC = 60^\circ$,

所以 $\triangle A_1DC$ 为等边三角形.

又因为点 F 为线段 CD 的中点,

所以 $A_1F \perp DC$.

由题可知 $ED \perp A_1D$, $ED \perp DC$,

又因为 $G(\frac{3}{2}, 0, 0)$,

所以 $\overrightarrow{GQ} = (0, \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$.

因为 $\boldsymbol{n} = (0, -\sqrt{3}, 1)$, 设直线 GQ 与平面 A_1DE 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{GQ}, \boldsymbol{n} \rangle| = \left| \frac{\overrightarrow{GQ} \cdot \boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{GQ}| |\boldsymbol{n}|} \right| = \left| \frac{0 - \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}}{2 \times \frac{2\sqrt{3}}{4}} \right| = \frac{1}{2}.$$

直线 GQ 与平面 A_1DE 所成角为 30° .

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！



微信搜一搜



京考一点通