2022届高三一轮复习联考(四)　全国卷1

理科数学参考答案及评分意见

1.C 【解析】由并集的概念可知,$A\cup B=(-2,4)$.

2.C 【解析】由题意可知复数 z 在复平面内对应的点的轨迹为:以$(1,0)$为圆心,1 为半径的圆;$|z-i|$(其中 i 为虚数单位)的最大值为$\sqrt{2}+1$.

3.B 【解析】$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_6}+\frac{1}{a_5}=\frac{a_2+a_6}{a_2a_6}+\frac{a_1+a_5}{a_1a_5}=\frac{a_2+a_1+a_6-a_5}{a_2a_5}=10$.

4.C 【解析】因为 $a=\ln 3>1$,$c=\log_3 2\in(0,1)$,$b=\log_5 1.3\in(0,1)$;又因为 $b=\log_5 1.3<\log_5\sqrt{2}<\frac{1}{2}$,所以 $b\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$;$c=\log_3 2>\log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}$,所以 $c\in\left(\frac{1}{2},1\right)$;故 $a>c>b$.

5.D 【解析】$\overrightarrow{BH}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{9}{16}\overrightarrow{BC}\Rightarrow\lambda\mu=\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}=\frac{9}{64}$.

6.B 【解析】设切点为(x_0,y_0),$\frac{1}{x_0-a}=1$,所以 $x_0-a=1\Rightarrow y_0=0$,故切点为$(1,0)$,$a=0$.

7.D 【解析】由数形结合可知:$\frac{T}{4}-\frac{\pi}{2\omega}\geqslant\frac{\pi}{3}\Rightarrow\omega\leqslant\frac{3}{2}$,所以 $0<\omega\leqslant\frac{3}{2}$.

8.D 【解析】由正弦定理可知,$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=2r\Rightarrow r=2$,由球的几何性质可知:$d^2=R^2-r^2\Rightarrow d=2\sqrt{3}$.

球心 O 到平面 ABC 的距离为 $2\sqrt{3}$,选 D.

9.B 【解析】取 BC 的中点为 E,取 BB_1 的中点为 F,取 A_1B_1 的中点为 G,取 A_1D_1 的中点为 H,取 DD_1 的中点为 M,

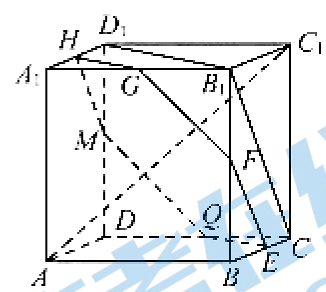
连接 QE,EF,FG,GH,HM,MQ,

$AC_1\perp QE$,$AC_1\perp EF$,所以 $AC_1\perp$平面 $EFGHMQ$,

由题意可知 P 的轨迹为正六边形 $EFGHMQ$,其中$|QE|=|EF|=\sqrt{2}$,

所以点 P 的轨迹的周长为 $6\sqrt{2}$,B 正确;

当点 P 在线段 HG 上运动时,V_{P-MEQ}有最大值$\frac{2}{3}$,CD 错误.



10.A 【解析】作出 $y=f(x)$的图象,由题意可知$[f(x)]_1=0$或$[f(x)]_2=t$,

当$[f(x)]_1=0$时,$x_2=-4$,当 $t=1$ 时,有三个实数根,满足条件;

当 $t=4$ 时,$f(x)=t$ 只有两个实数根,不满足条件,此时与 $y=e^x$ 的交点坐标为$(2\ln 2,4)$,

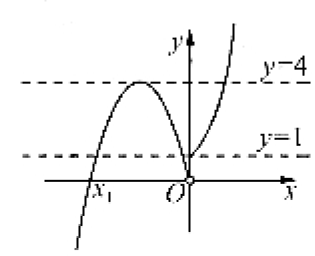
所以 $x_1x_4\in(-8\ln 2,0]$,故 A 错误;

又因为 $x_2+x_3=-4$,所以 $x_1+x_2+x_3+x_4$ 的取值范围为$[-8,-8+2\ln 2)$,B 正确;

当 $t=1$ 时,有三个实数根,满足条件;

当 $t=4$ 时,$f(x)=t$ 只有两个实数根不满足条件;所以 $t\in[1,4)$,故 C 正确;

因为 $x_2+x_3=-4$,且 $x_2<x_3<0$ 所以 $x_2x_3=(-x_2)\cdot(-x_3)<\left[\frac{-(x_2+x_3)}{2}\right]^2=4$,故 D 正确.



11.A 【解析】∵A、B 关于原点对称,设 $A(x_1,y_1)$,$B(-x_1,-y_1)$,$P(x_0,y_0)$,

$\therefore k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_0+y_1}{x_0+x_1}\cdot\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}=\frac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}=-\frac{b^2}{a^2}=e^2-1$,

故 $e^2-1=-\frac{2}{3}$,$\therefore e=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故选 A.

12.C 【解析】设 $f(x)-2\ln x=t$,所以 $f(t)=2\ln t+t\Rightarrow 1-t=2\ln t\Rightarrow t=1$,故 $f(x)=2\ln x+1$,

$g(x)=\frac{f(x)}{x}-a$ 在$(0,e]$上有两个零点,等价于$\frac{f(x)}{x}=a$ 有在$(0,e]$上两个实数根,令$\frac{f(x)}{x}=h(x)$,

$h'(x)=\dfrac{\frac{2}{x}\cdot x-(2\ln x+1)}{x^2}=\dfrac{1-2\ln x}{x^2}$，$h(x)$在区间$(0,\sqrt{e})$上单调递增，$(\sqrt{e},+\infty)$上单调递减.

$h(x)_{\max}=h(\sqrt{e})=\dfrac{2}{\sqrt{e}}$，又因为$h(e)=\dfrac{3}{e}$.

所以a的取值范围为$\left[\dfrac{3}{e},\dfrac{2}{\sqrt{e}}\right)$.

13.10 【解析】根据线性规划的可行域可知，在点(2，2)时，$z=3x-2y$取得最大值10.

14.8 【解析】$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}|AB|^2=8$.

15.2 【解析】$\dfrac{2\cos x(\sin x+\cos x)}{2\sin x(\sin x-\cos x)}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\tan x=2$.

16.$y=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}x$ 【解析】因为PH经过$\triangle PF_1F_2$的内心，根据内角平分线定理可知：$\dfrac{|F_1H|}{|HF_2|}=\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}=3=\dfrac{c+\frac{2a}{3}}{c-\frac{2a}{3}}\Rightarrow\dfrac{3c+2a}{3c-2a}=3\Rightarrow e=\dfrac{4}{3}$，所以$\Omega$的渐近线方程为：$y=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}x$.

17.【解析】(1)$2\sin(A-B)=\sin C\Rightarrow\sin A\cos B=3\cos A\sin B\Rightarrow\tan A=3\tan B$，

所以$\dfrac{\tan A}{\tan B}=3$. ………………………………………………………… 5分

(2)由(1)知$A>B$，所以$\tan B>0$，………………………………………………… 6分

$\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}=\dfrac{2\tan B}{1+3\tan^2 B}=\dfrac{2}{\frac{1}{\tan B}+3\tan B}\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

当且仅当"$\dfrac{1}{\tan B}=3\tan B$"时取等号，此时$B=\dfrac{\pi}{6}$，$A=\dfrac{\pi}{3}$，$C=\dfrac{\pi}{2}$. ……………………………… 9分

因为$c=4$，故$b=2$，$a=2\sqrt{3}$，

所以$S_{\triangle ABC}=2\sqrt{3}$. ………………………………………………………… 12分

18.【解析】当$n=1$时，$a_1=2$，当$n\geqslant2$时，$8S_{n-1}=a_{n-1}^2+4a_{n-1}+4$，

故$8(S_n-S_{n-1})=(a_n^2-a_{n-1}^2)+4a_n-4a_{n-1}\Rightarrow(a_n^2-a_{n-1}^2)=4(a_n+a_{n-1})$，

所以$a_n-a_{n-1}=4$，故数列$\{a_n\}$是以2为首项4为公差的等差数列，

所以：$a_n=4n-2$. ………………………………………………………… 6分

(2)$b_n=\dfrac{4(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{(a_n+2)\cdot(a_{n+1}+2)}}=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n\cdot(n-1)}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$，……………………………… 9分

$T_n=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}=1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}<1$，

所以$T_n<1$. ………………………………………………………… 12分

19.【解析】(1)证明：取AD中点为O，连接PO，OG，

所以：$PO\perp AD$，$OG\perp AD$，$OG\cap PO=O$，

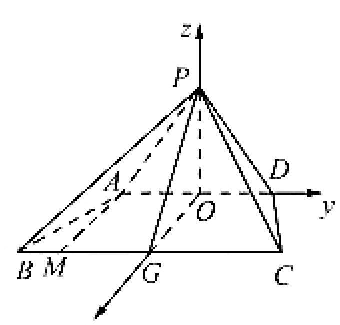
故：$AD\perp$平面POG，$PG\subset$平面POG，

所以：$AD\perp PG$. ………………………………………………………… 5分

(2)当四棱锥的体积取得最大值时，平面$PAD\perp$平面$ABCD$，

平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$，所以$PO\perp$平面$ABCD$，

以O为原点，OG，OD，OP分别为x，y，z轴的非负半轴建立空间直角坐标系$O-xyz$.，



做$AM\perp BC$于M，$\because\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$，$AB=2$，

$\therefore BM=1, AM=\sqrt{3}$，四边形 $ABCD$ 为等腰梯形.

$\therefore BC=AD+2$，又 $\because BC=\dfrac{3}{2}AD$，$\therefore AD=4$. ………………………………………… 7 分

$\therefore PO=2\sqrt{3}$. ………………………………………………………………………… 8 分

$P(0,0,2\sqrt{3})$，$A(0,-2,0)$，$B(\sqrt{3},-3,0)$，$\overrightarrow{AP}(0,2,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},-1,0)$.

平面 ACD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$.

设平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$.

$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}x-y=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=2y+2\sqrt{3}z=0.\end{cases}$ 取 $y=\sqrt{3}$，$\begin{cases}x=1,\\ z=-1.\end{cases}$ 所以 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},-1)$.

$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

所以平面 PAB 与平面 ACD 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ………………………………… 12 分

20.【解析】(1)解：由已知可得：$l:x+y-3=0$，设 $A\left(x_1,\dfrac{x_1^2}{2p}\right)$，$B\left(x_2,\dfrac{x_2^2}{2p}\right)$，

因为 $OA\perp OB$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0\Rightarrow x_1x_2+\dfrac{(x_1x_2)^2}{4p^2}=0\Rightarrow x_1x_2=-4p^2$，……………………… 2 分

联立 $\begin{cases}x^2=2py,\\ y=3-x,\end{cases}\Rightarrow x^2+2px-6p=0$，所以 $x_1x_2=-6p=-4p^2$，故 $p=\dfrac{3}{2}$. ……………………… 4 分

所以 C 的方程为 $x^2=3y$. ………………………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $A\left(x_1,\dfrac{x_1^2}{2p}\right)$，$B\left(x_2,\dfrac{x_2^2}{2p}\right)$，$l:y-2=k(x-1)$

因为 $y'=\dfrac{x}{p}$，所以 $l_{PA}:y=\dfrac{x_1}{p}\cdot x-\dfrac{x_1^2}{2p}$，$l_{PB}:y=\dfrac{x_2}{p}\cdot x-\dfrac{x_2^2}{2p}$，

联立得 $\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2},\\ y=\dfrac{x_1x_2}{2p},\end{cases}$ 所以 $P\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{x_1x_2}{2p}\right)$，………………………………………… 9 分

又因为直线与抛物线相交，故 $\begin{cases}2py=x^2,\\ y=k(x-1)+2,\end{cases}\Rightarrow x^2-2pkx+2pk-4p=0\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=2pk,\\ x_1x_2=2pk-4p,\end{cases}$

故 $P(pk,k-2)$，所以点 P 的轨迹方程为 $y=\dfrac{x}{p}-2$.

当点 P 的轨迹与过 Q 点的抛物线的切线平行时，$|PQ|$ 最小，故 $\dfrac{x_Q}{p}=\dfrac{1}{p}$，所以 $Q\left(1,\dfrac{1}{2p}\right)$，

则 $|PQ|_{\min}=\dfrac{\left|\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{2p}-2\right|}{\sqrt{1+\dfrac{1}{p^2}}}=\dfrac{\left|\dfrac{1}{2}-2p\right|}{\sqrt{1+p^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\Rightarrow p=1$，所以 $Q\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$. ……………………………… 11 分

因为 $M(1,2)$，所以设 $\triangle MOQ$ 外接圆的圆心为 $\left(a,\dfrac{5}{4}\right)$，

则 $a^2+\dfrac{25}{16}=(a-1)^2+\dfrac{9}{16}$，解得 $a=0$，

所以 $\triangle MOQ$ 外接圆的方程为 $x^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{25}{16}$. ………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)函数的定义域为 $(0,+\infty)$；

$f'(x)=x+\dfrac{1}{x}-2\geqslant 0$ 恒成立，

故 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，无单调减区间. …………………………………… 4 分

(2) $g(x)=e^x-(a+2)x$，$(x>0)$，因为函数 $y=g(x)$ 有两个不同的零点 x_1,x_2，

所以 $e^x=(a+2)x$ 有两个不同的根，故 $(a+2)=\frac{e^x}{x}=I(x)$ 有两个不同的根，

$I'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，所以 $y=I(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，$(1,+\infty)$ 上单调递增，

根据图象可知：$a+2>e\Rightarrow a>e-2$. …………………………………… 7 分

因为 $\begin{cases} e^{x_1}=(a+2)x_1, \\ e^{x_2}=(a+2)x_2,\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x_1=\ln(a+2)+\ln x_1,\\ x_2=\ln(a+2)+\ln x_2,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1-x_2=\ln x_1-\ln x_2,\\ x_1+x_2=2\ln(a+2)+\ln x_1x_2,\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=1,\\ x_1+x_2=2\ln(a+2)+\ln x_1x_2.\end{cases}$ …………………………………… 9 分

不妨设 $x_1>x_2$，要证 $x_1+x_2<2\ln(a+2)$，只需证明 $x_1x_2<1$ 即可.

即证 $\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}$，只需证明：$\ln\frac{x_1}{x_2}<\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$，设 $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}=t\ (t>1)$，

即证：$2\ln t-t+\frac{1}{t}<0$ 恒成立.

设 $h(t)=2\ln t-t+\frac{1}{t}$，$h'(t)=\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}-1=\frac{-t^2+2t-1}{t^2}=\frac{-(t-1)^2}{t^2}<0$

所以 $y=h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(t)_{max}<h(1)=0$.

故 $x_1x_2<1$ 恒成立.

所以 $x_1+x_2<2\ln(a+2)$. …………………………………… 12 分

22.【解析】(1) 曲线 E 的极坐标方程为：$\rho^2=\frac{4}{1+\sin^2\theta}$， …………………………………… 3 分

直线 l_1 的普通方程为 $x-y-\sqrt{2}+1=0$ …………………………………… 5 分

(2) 设点 B 对应的参数为 t_1，点 D 对应的参数为 t_2，所以 $|t_1|=2|t_2|$.

因为 l_1 与 l_2 关于直线 $x=\sqrt{2}$ 对称，故 $\alpha+\beta=\pi$. …………………………………… 6 分

联立曲线 E 与直线 l_1 的参数方程得：$(\sqrt{2}+t\cos\alpha)^2+2(1+t\sin\alpha)^2=4$，

$(1+\sin^2\alpha)t^2+(4\sin\alpha+2\sqrt{2}\cos\alpha)t=0$，故 $t_1+t_A=\frac{-2\sqrt{2}(\sqrt{2}\sin\alpha+\cos\alpha)}{1+\sin^2\alpha}=t_1$，

同理：$t_2=\frac{-2\sqrt{2}(\sqrt{2}\sin\alpha-\cos\alpha)}{1+\sin^2\alpha}$. …………………………………… 8 分

故 $\left|\frac{-2\sqrt{2}(\sqrt{2}\sin\alpha+\cos\alpha)}{1+\sin^2\alpha}\right|=2\left|\frac{-2\sqrt{2}(\sqrt{2}\sin\alpha-\cos\alpha)}{1+\sin^2\alpha}\right|\Rightarrow|\sqrt{2}\sin\alpha+\cos\alpha|=2|(\sqrt{2}\sin\alpha-\cos\alpha)|$.

整理得：$5\tan^2\alpha-10\sqrt{2}\tan\alpha+3=0$，所以 $(\tan\alpha)_1=\frac{\sqrt{2}}{6}$ 或 $(\tan\alpha)_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

故 $\tan\alpha\cdot\tan\beta=-\tan^2\alpha=-\frac{1}{18}$ 或 $-\frac{9}{2}$. …………………………………… 10 分

23.【解析】(1) 证明：由题意解得 $f(x)_{min}=1$. …………………………………… 2 分

$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+3}+\sqrt{c^2+1}\leqslant\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{a^2+1+b^2+3+c^2+1}=3\sqrt{3}$. …………………………………… 5 分

(2) 根据题意可知 $f(x)_{min}=4$. …………………………………… 7 分

不等式 $|x+1|+|x-3|\geqslant m^2-3m$ 恒成立.

所以 $m^2-3m-4\leqslant0\Rightarrow-1\leqslant m\leqslant4$. …………………………………… 10 分