2019 北京海淀区高三（上）期末

数　　学（理科）

2019.01

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）双曲线 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$ 的左焦点的坐标为

（A）$(-2,0)$　　（B）$(-\sqrt{2},0)$　　（C）$(-1,0)$　　（D）$(-4,0)$

（2）已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,0),\boldsymbol{b}=(t,1)$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角大小为

（A）$\frac{\pi}{6}$　　（B）$\frac{\pi}{4}$　　（C）$\frac{\pi}{3}$　　（D）$\frac{5\pi}{12}$

（3）已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，公差 $d\neq 0$，且 a_1,a_2,a_5 成等比数列，则 $d=$

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（4）直线 $y=kx+1$ 被圆 $x^2+y^2=2$ 截得的弦长为 2，则 k 的值为

（A）0　　（B）$\pm\frac{1}{2}$　　（C）± 1　　（D）$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

（5）以正六边形的 6 个顶点中的 3 个作为顶点的三角形中，等腰三角形的个数为

（A）6　　（B）7　　（C）8　　（D）12

（6）已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x}$，则“$a<0$”是“函数 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上存在零点”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　　　　　　　（D）既不充分也不必要条件

（7）已知函数 $f(x)=\sin x-\cos x$，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，则下列结论中错误的是

（A）函数 $f(x)$ 的值域与 $g(x)$ 的值域相同

（B）若 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点，则 x_0 是函数 $g(x)$ 的零点

（C）把函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位，就可以得到函数 $g(x)$ 的图象

（D）函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4})$ 上都是增函数

（8）已知集合 $A=\{(s,t)\,|\,1\le s\le 50,1\le t\le 50,\ s\in\mathbf{N},t\in\mathbf{N}\}$．若 $B\subseteq A$，且对任意的 $(a,b)\in B,(x,y)\in B$，均有 $(a-x)(b-y)\le 0$，则集合 B 中元素个数的最大值为

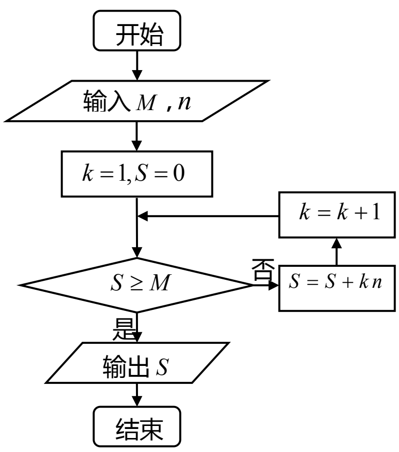
（A）25　　　　（B）49　　　　（C）75　　　　（D）99

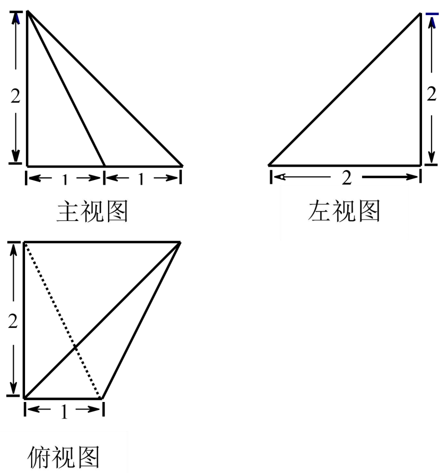
第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）以抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点 F 为圆心，且与其准线相切的圆的方程为________.

（10）执行如下图所示的程序框图，当输入的 M 值为 15，n 值为 4 时，输出的 S 值为________.



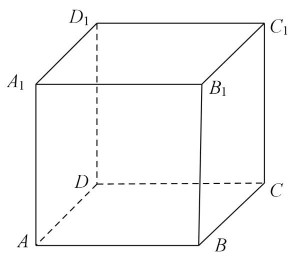


（11）某三棱锥的三视图如上图所示，则这个三棱锥中最长的棱与最短的棱的长度分别为_________，________.

（12）设关于 x,y 的不等式组 $\begin{cases} y\le x, \\ x\le 4, \\ y\ge kx-2 \end{cases}$ 表示的平面区域为 Ω，若 $A(1,-2),B(3,0),C(2,-3)$ 中有且仅有两个点在平面区域 Ω 内，则 k 的最大值为 ________.

（13）在 $\triangle ABC$ 中，$b=\sqrt{3}a$，且 $\cos 2A=\cos B$，则 $\cos A=$________.

（14）正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，动点 M 在线段 CC_1 上，动点 P 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 上，且 $AP\perp$ 平面 MBD_1.



（Ⅰ）当点 M 与点 C 重合时，线段 AP 的长度为________；

（Ⅱ）线段 AP 长度的最小值为________.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（15）（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=a\cos(\frac{\pi}{2}-x)-\cos 2x$，其中 $a>0$.

（Ⅰ）比较 $f(\frac{\pi}{6})$，$f(\frac{\pi}{2})$ 的大小；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上的最小值.

（16）（本小题满分 13 分）

为迎接2022年冬奥会，北京市组织中学生开展冰雪运动的培训活动，并在培训结束后对学生进行了考核．记 X 表示学生的考核成绩，并规定 $X\ge 85$ 为考核优秀．为了了解本次培训活动的效果，在参加培训的学生中随机抽取了30名学生的考核成绩，并作成如下茎叶图：

5	0	1	1	6				
6	0	1	4	3	3	5	8	
7	2	3	7	6	8	7	1	7

8	1 1 4 5 2 9
9	0 2 1 3 0

(Ⅰ)从参加培训的学生中随机选取 1 人，请根据图中数据，估计这名学生考核为优秀的概率；

(Ⅱ)从图中考核成绩满足 $X\in[70,79]$ 的学生中任取3 人，设 Y 表示这3 人中成绩满足 $|X-85|\le 10$ 的人数，求 Y 的分布列和数学期望；

(Ⅲ)根据以往培训数据，规定当 $P\left(\left|\dfrac{X-85}{10}\right|\le 1\right)\ge 0.5$ 时培训有效．请你根据图中数据，判断此次冰雪培训活动是否有效，并说明理由.

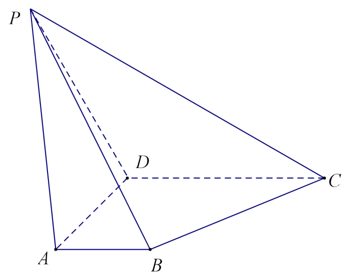
（17）（本小题满分 14 分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $ABCD\perp$ 平面 PCD，底面 $ABCD$ 为梯形，$AB\,//\,CD$，$AD\perp PC$，且 $AB=1, AD=DC=DP=2, \angle PDC=120^\circ$.

（Ⅰ）求证：$AD\perp$ 平面 PCD；

（Ⅱ）求二面角 $B-PD-C$ 的余弦值；

（Ⅲ）若 M 是棱 PA 的中点，求证：对于棱 BC 上任意一点 F，MF 与 PC 都不平行.



（18）（本小题满分 14 分）

已知椭圆 $G:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，过点 $M(-2,0)$ 的直线 l 与椭圆 G 交于不同的两点 A，B.

（Ⅰ）求椭圆 G 的离心率；

（Ⅱ）若点 B 关于 x 轴的对称点为 B'，求线段 AB' 长度的取值范围.

（9）（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{ax-x^2}{e^x}$.

（Ⅰ）当 $a=-1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）当 $a>0$ 时，求证：$f(x)>-\dfrac{2}{e}$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 成立.

（20）（本小题满分 13 分）

设 n 为不小于 3 的正整数，集合 $\Omega_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\{0,1\},i=1,2,3,\cdots,n\}$，对于集合 Ω_n 中的任意元素 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，记

$$\alpha*\beta=(x_1+y_1-x_1y_1)+(x_2+y_2-x_2y_2)+\cdots+(x_n+y_n-x_ny_n).$$

（Ⅰ）当 $n=3$ 时，若 $\alpha=(1,1,0)$，请写出满足 $\alpha*\beta=3$ 的所有元素 β；

（Ⅱ）若 α，$\beta\in\Omega_n$，且 $\alpha*\alpha+\beta*\beta=n$，求 $\alpha*\beta$ 的最大值和最小值；

（Ⅲ）设 S 是 Ω_n 的子集，且满足：对于 S 中的任意两个不同元素 α，β，有 $\alpha*\beta\geq n-1$ 成立，求集合 S 中元素个数的最大值.

数学试题答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. A　　2. B　　3. D　　4. A　　5. C　　6. C　　7. C　　8. D

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. $(x-1)^2+y^2=4$　　10. 24　　11. $2\sqrt{3},2$　　12. 0

13. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　14. $\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.

15．解：（Ⅰ）因为 $f(\frac{\pi}{6})=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}$,

$f(\frac{\pi}{2})=a+1$

所以 $f(\frac{\pi}{2})-f(\frac{\pi}{6})=(a+1)-(\frac{a}{2}-\frac{1}{2})=\frac{a}{2}+\frac{3}{2}$

因为 $a>0$，所以 $\frac{a}{2}+\frac{3}{2}>0$，所以 $f(\frac{\pi}{2})>f(\frac{\pi}{6})$

（Ⅱ）因为 $f(x)=a\sin x-\cos 2x$

$=a\sin x-(1-2\sin^2 x)$

$=2\sin^2 x+a\sin x-1$

设 $t=\sin x$, $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，所以 $t\in[-1,1]$

所以 $y=2t^2+at-1$

其对称轴为 $t=-\frac{a}{4}$

当 $t=-\frac{a}{4}<-1$，即 $a>4$ 时，在 $t=-1$ 时函数取得最小值 $1-a$

当 $t=-\frac{a}{4}\geq -1$，即 $0<a\leq 4$ 时，在 $t=-\frac{a}{4}$ 时函数取得最小值 $-\frac{a^2}{8}-1$

16. 解：（Ⅰ）设该名学生考核成绩优秀为事件 A

由茎叶图中的数据可以知道，30 名同学中，有 7 名同学考核优秀

所以所求概率 $P(A)$ 约为 $\frac{7}{30}$

（II）Y 的所有可能取值为 $0,1,2,3$

因为成绩 $X\in[70,80]$ 的学生共有 8 人，其中满足 $|X-75|\le 10$ 的学生有 5 人

所以 $P(Y=0)=\dfrac{C_3^3}{C_8^3}=\dfrac{1}{56}$，　$P(Y=1)=\dfrac{C_3^2C_5^1}{C_8^3}=\dfrac{15}{56}$

$P(Y=2)=\dfrac{C_3^1C_5^2}{C_8^3}=\dfrac{30}{56}$，　$P(Y=3)=\dfrac{C_5^3}{C_8^3}=\dfrac{10}{56}$

随机变量 Y 的分布列为

Y	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{56}$	$\dfrac{15}{56}$	$\dfrac{30}{56}$	$\dfrac{10}{56}$

$E(Y)=0\times\dfrac{1}{56}+1\times\dfrac{15}{56}+2\times\dfrac{30}{56}+3\times\dfrac{10}{56}=\dfrac{15}{8}$

（III）根据表格中的数据，满足 $\left|\dfrac{X-85}{10}\right|\le 1$ 的成绩有 16 个

所以 $P\left(\left|\dfrac{X-85}{10}\right|\le 1\right)=\dfrac{16}{30}=\dfrac{8}{15}>0.5$

所以可以认为此次冰雪培训活动有效.

17．解：（I）在平面 PCD 中过点 D 作 $DH\perp DC$，交 PC 于 H

因为平面 $ABCD\perp$ 平面 PCD

$DH\subset$ 平面 PCD

平面 $ABCD\cap$ 平面 $PCD=CD$

所以 $DH\perp$ 平面 $ABCD$

因为 $AD\subset$ 平面 $ABCD$

所以 $DH \perp AD$

又 $AD \perp PC$，且 $PC \cap DH = H$

所以 $AD \perp$ 平面 PCD

（Ⅱ）因为 $AD \perp$ 平面 PCD，所以 $AD \perp CD$

又 $DH \perp CD$， $DH \perp AD$

以 D 为原点， DA，DC，DH 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系

所以 $D(0,0,0),A(2,0,0),P(0,-1,\sqrt{3}),C(0,2,0),B(2,1,0)$，

因为 $AD \perp$ 平面 PCD，所以取平面 PCD 的法向量为 $\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$

设平面 PBD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

因为 $\overrightarrow{DP}=(0,-1,\sqrt{3}),\overrightarrow{DB}=(2,1,0)$，所以 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0\end{cases}$

所以 $\begin{cases}-y+\sqrt{3}z=0\\ 2x+y=0\end{cases}$

令 $z=2$ ，则 $y=-2\sqrt{3},x=-\sqrt{3}$ ，所以 $\vec{n}=(-\sqrt{3},2\sqrt{3},2)$

所以 $\cos<\overrightarrow{AD},\vec{n}>=\dfrac{\overrightarrow{AD}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AD}||\vec{n}|}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}=-\dfrac{\sqrt{57}}{19}$

由题知 $B-PD-C$ 为锐角，所以 $B-PD-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{57}}{19}$

（Ⅲ）

法一：

假设棱 BC 上存在点 F，使得 $MF \parallel PC$，显然 F 与点 C 不同

所以 P,M,F,C 四点共面于 α

所以 $FC \subset \alpha$， $PM \subset \alpha$

所以 $B \in FC \subset \alpha$， $A \in PM \subset \alpha$

所以 α 就是点 A,B,C 确定的平面，所以 $P \in \alpha$

这与 $P-ABCD$ 为四棱锥矛盾，所以假设错误，即问题得证

法二：

假设棱 BC 上存在点 F，使得 $MF \,//\, PC$

连接 AC，取其中点 N

在 ΔPAC 中，因为 M,N 分别为 PA,CA 的中点，所以 $MN \,//\, PC$

因为过直线外一点只有一条直线和已知直线平行，所以 MF 与 MN 重合

所以点 F 在线段 AC 上，所以 F 是 AC， BC 的交点 C，即 MF 就是 MC

而 MC 与 PC 相交，矛盾，所以假设错误，问题得证

法三：假设棱 BC 上存在点 F，使得 $MF \,//\, PC$，

设 $\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BC}$，所以 $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BF}=(1,\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})+\lambda(-2,1,0)$

因为 $MF \,//\, PC$，所以 $\overrightarrow{MF}=\mu\overrightarrow{PC}=\mu(0,3,-\sqrt{3})$

所以有 $\begin{cases}1-2\lambda=0\\ \frac{3}{2}+\lambda=3\mu\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}\mu\end{cases}$，这个方程组无解

所以假设错误，即问题得证

18．解：（Ⅰ）

因为 $a^2=2,b^2=1$，所以 $a=\sqrt{2},b=1,c=1$

所以离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（II）**法一：**

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

显然直线 l 存在斜率，设直线 l 的方程为 $y=k(x+2)$

所以 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=k(x+2)\end{cases}$，所以 $(2k^2+1)x^2+8k^2x+8k^2-2=0$

$\Delta=8-16k^2>0$，所以 $k^2<\dfrac{1}{2}$

所以 $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-8k^2}{2k^2+1}\\ x_1x_2=\dfrac{8k^2-2}{2k^2+1}\end{cases}$

因为 $B'(x_2,-y_2)$

所以 $|AB'|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$

因为 $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\dfrac{8-16k^2}{(2k^2+1)^2}$

$$y_1+y_2=k(x_1+2)+k(x_2+2)=k(x_1+x_2)+4=\frac{4k}{2k^2+1}$$

所以 $|AB'|=\sqrt{\dfrac{8-16k^2}{(2k^2+1)^2}+\dfrac{16k^2}{(2k^2+1)^2}}$

$$=\sqrt{\frac{8}{(2k^2+1)^2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{2k^2+1}$$

因为$0\le k^2<\frac{1}{2}$，所以$|AB'|\in(\sqrt{2},2\sqrt{2}]$

法二：

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

当直线l是x轴时，$|AB'|=2\sqrt{2}$

当直线l不是x轴时，设直线l的方程为$x=ty-2$

所以$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\ x=ty-2\end{cases}$，所以$(t^2+2)y^2-4ty+2=0$，

$\Delta=8t^2-16>0$ ，所以$t^2>2$

所以$\begin{cases}y_1+y_2=\frac{4t}{t^2+2}\\ y_1y_2=\frac{2}{t^2+2}\end{cases}$

因为$B'(x_2,-y_2)$

所以$|AB'|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$

因为 $(x_1-x_2)^2=(ty_1-ty_2)^2=t^2(y_1-y_2)^2=t^2[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]=(t^2+1)\frac{16t^2}{(t^2+2)^2}$

所以$|AB'|=\sqrt{(t^2+1)\frac{16t^2}{(t^2+2)^2}-\frac{8t^2}{t^2+2}}$

$$=\sqrt{\frac{8t^4}{(t^2+2)^2}}=\frac{2\sqrt{2}t^2}{t^2+2}=\frac{2\sqrt{2}t^2}{t^2+2}=2\sqrt{2}(1-\frac{2}{t^2+2})$$

因为$t^2>2$，所以$|AB'|\in(\sqrt{2},2\sqrt{2})$

综上，$|AB'|$的取值范围是$(\sqrt{2},2\sqrt{2}]$.

19．解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\dfrac{ax-x^2}{\mathrm{e}^x}$

所以 $f'(x)=\dfrac{x^2-(a+2)x+a}{\mathrm{e}^x}$

当 $a=-1$ 时，$f'(x)=\dfrac{x^2-x-1}{\mathrm{e}^x}$

所以 $f'(1)=\dfrac{-1}{\mathrm{e}}$，而 $f(1)=\dfrac{-2}{\mathrm{e}}$

曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-(-\dfrac{2}{\mathrm{e}})=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}(x-1)$

化简得到 $y=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}x-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

（Ⅱ）法一：

因为 $f'(x)=\dfrac{x^2-(a+2)x+a}{\mathrm{e}^x}$，令 $f'(x)=\dfrac{x^2-(a+2)x+a}{\mathrm{e}^x}=0$

得 $x_1=\dfrac{a+2-\sqrt{a^2+4}}{2},x_2=\dfrac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2}$

当 $a>0$ 时，x，$f'(x)$，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	Z	极大值	]	极小值	Z

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值为 $f(0),f(x_2)$ 中较小的值，

而 $f(0)=0>-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$，所以只需要证明 $f(x_2)>-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$

因为 $x_2^{\ 2}-(a+2)x_2+a=0$，所以 $f(x_2)=\dfrac{ax_2-x_2^{\ 2}}{\mathrm{e}^{x_2}}=\dfrac{a-2x_2}{\mathrm{e}^{x_2}}$

设 $F(x)=\dfrac{a-2x}{e^x}$，其中 $x>0$，所以 $F'(x)=\dfrac{-2-(a-2x)}{e^x}=\dfrac{2x-(a+2)}{e^x}$

令 $F'(x)=0$，得 $x_3=\dfrac{a+2}{2}$，

当 $a>0$ 时，x，$F'(x)$，$F(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,x_3)$	x_3	$(x_3,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	]	极小值	Z

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $F(\dfrac{a+2}{2})=\dfrac{-2}{e^{1+\frac{a}{2}}}$，而 $F(\dfrac{a+2}{2})=\dfrac{-2}{e^{1+\frac{a}{2}}}>\dfrac{-2}{e}$

注意到 $x_2=\dfrac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2}>0$， 所以 $f(x_2)=F(x_2)>-\dfrac{2}{e}$，问题得证

法二：

因为“对任意的 $x>0$，$\dfrac{ax-x^2}{e^x}>-\dfrac{2}{e}$”等价于“对任意的 $x>0$，$\dfrac{ax-x^2}{e^x}+\dfrac{2}{e}>0$”

即“$x>0$，$\dfrac{2e^x+e(ax-x^2)}{e^{x+1}}>0$”，故只需证“$x>0$，$2e^x+e(ax-x^2)>0$”

设 $g(x)=2e^x+e(ax-x^2)$ ，所以 $g'(x)=2e^x+e(a-2x)$

设 $h(x)=g'(x)$，$h'(x)=2e^x-2e$

令 $F'(x)=0$，得 $x_3=1$

当 $a>0$ 时，x，$h'(x)$，$h(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	]	极小值	Z

所以 $h(x)$ $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $h(1)$，而 $h(1)=2\mathrm{e}+\mathrm{e}(a-2)=\mathrm{e}a>0$

所以 $x>0$ 时，$g'(x)=2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}(a-2x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

所以 $g(x)>g(0)$

而 $g(0)=2>0$，所以 $g(x)>0$，问题得证

法三：

“对任意的 $x>0$，$f(x)>-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$” 等价于 “$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值大于 $-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$”

因为 $f'(x)=\dfrac{x^2-(a+2)x+a}{\mathrm{e}^x}$，令 $f'(x)=0$

得 $x_1=\dfrac{a+2-\sqrt{a^2+4}}{2},x_2=\dfrac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2}$

当 $a>0$ 时，x，$f'(x)$，$f(x)$ 在在 $(0,+\infty)$ 上的变化情况如下表：

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	Z	极大值	]	极小值	Z

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值为 $f(0),f(x_2)$ 中较小的值，

而 $f(0)=0>-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$，所以只需要证明 $f(x_2)>-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$

因为 $x_2^{\ 2}-(a+2)x_2+a=0$，所以 $f(x_2)=\dfrac{ax_2-x_2^{\ 2}}{\mathrm{e}^{x_2}}=\dfrac{a-2x_2}{\mathrm{e}^{x_2}}>\dfrac{-2x_2}{\mathrm{e}^{x_2}}$

注意到 $x_2=\dfrac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2}$ 和 $a>0$，所以 $x_2=\dfrac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2}>2$

设 $F(x)=\dfrac{-2x}{\mathrm{e}^x}$，其中 $x>2$

所以 $F'(x)=\dfrac{-2(1-x)}{e^x}=\dfrac{2(x-1)}{e^x}$

当 $x>2$ 时，$F'(x)>0$，所以 $F(x)$ 单调递增，所以 $F(x)>F(2)=-\dfrac{4}{e^2}$

而 $-\dfrac{4}{e^2}-(-\dfrac{2}{e})=\dfrac{2e-4}{e^2}>0$

所以 $f(x_2)>F(x_2)>-\dfrac{2}{e}$，问题得证

法四：

因为 $a>0$，所以当 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{ax-x^2}{e^x}>\dfrac{-x^2}{e^x}$

设 $F(x)=\dfrac{-x^2}{e^x}$，其中 $x>0$

所以 $F'(x)=\dfrac{x(x-2)}{e^x}$

所以 x，$F'(x)$，$F(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	]	极小值	Z

所以 $F(x)$ 在 $x=2$ 时取得最小值 $F(2)=-\dfrac{4}{e^2}$，而 $-\dfrac{4}{e^2}-(-\dfrac{2}{e})=\dfrac{2e-4}{e^2}>0$

所以 $x>0$ 时，$F(x)>-\dfrac{2}{e}$

所以 $f(x)>F(x)>-\dfrac{2}{e}$

20. 解：（Ⅰ）满足 $\alpha*\beta=3$ 的元素为 $(0,0,1),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)$

（Ⅱ）记$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，

注意到$x_i\in\{0,1\}$，所以$x_i(x_i-1)=0$，

所以$\alpha*\alpha=(x_1+x_1-x_1y_1)+(x_2+x_2-x_2x_2)+\cdots+(x_n+x_n-x_nx_n)$

$=x_1+x_2+\cdots+x_n$

$\beta*\beta=y_1+y_2+\cdots+y_n$

因为$\alpha*\alpha+\beta*\beta=n$，所以$x_1+x_2+\cdots+x_n+y_1+y_2+\cdots+y_n=n$

所以$x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n$中有$n$个量的值为 1，$n$个量的值为 0.

显然$0\le\alpha*\beta=(x_1+y_1-x_1y_1)+(x_2+y_2-x_2y_2)+\cdots+(x_n+y_n-x_ny_n)$

$\le x_1+y_1+x_2+y_2+\cdots+x_n+y_n=n$，

当$\alpha=(1,1,\cdots,1)$，$\beta=(0,0,\cdots,0)$时，

α，β满足$\alpha*\alpha+\beta*\beta=n$，$\alpha*\beta=n$. 所以$\alpha*\beta$的最大值为$n$

又$\alpha*\beta=(x_1+y_1-x_1y_1)+(x_2+y_2-x_2y_2)+\cdots+(x_n+y_n-x_ny_n)$

$=n-(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)$

注意到只有$x_i=y_i=1$时，$x_iy_i=1$，否则$x_iy_i=0$

而$x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n$中$n$个量的值为 1，$n$个量的值为 0

所以满足$x_iy_i=1$这样的元素i至多有$\dfrac{n}{2}$个，

当n为偶数时，$\alpha*\beta\ge n-\dfrac{n}{2}=\dfrac{n}{2}$.

当$\alpha=\beta=(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{\frac{n}{2}个},\underbrace{0,0,\cdots,0}_{\frac{n}{2}个})$时，满足$\alpha*\alpha+\beta*\beta=n$，且$\alpha*\beta=\dfrac{n}{2}$.

所以$\alpha*\beta$的最小值为$\dfrac{n}{2}$

当n为奇数时，且$x_iy_i=1$，这样的元素i至多有$\dfrac{n-1}{2}$个，

所以 $\alpha*\beta\geq n-\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{n+1}{2}$.

当$\alpha=(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{\frac{n+1}{2}个},\underbrace{0,0,\cdots,0}_{\frac{n-1}{2}个})$，$\beta=(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{\frac{n-1}{2}个},\underbrace{0,0,\cdots,0}_{\frac{n+1}{2}个})$时，满足$\alpha*\alpha+\beta*\beta=n$，$\alpha*\beta=\dfrac{n-1}{2}$.

所以$\alpha*\beta$的最小值为$\dfrac{n-1}{2}$

综上：$\alpha*\beta$的最大值为n，当n为偶数时，$\alpha*\beta$的最小值为$\dfrac{n}{2}$，当n为奇数时，$\alpha*\beta=\dfrac{n-1}{2}$.

（III）S中的元素个数最大值为$\dfrac{n^2+n+2}{2}$

设集合S是满足条件的集合中元素个数最多的一个

记$S_1=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_1+x_2+\cdots+x_n\geq n-1,\alpha\in S\}$，

$S_2=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_1+x_2+\cdots+x_n\leq n-2,\alpha\in S\}$

显然$S=S_1\cup S_2$，$S_1\cap S_2=\varnothing$

集合S_1中元素个数不超过$n+1$个，下面我们证明集合S_2中元素个数不超过C_n^2个

$\forall\alpha\in S_2$，$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则$x_1+x_2+\cdots+x_n\leq n-2$

则x_1，$x_2,\cdots$，x_n中至少存在两个元素 $x_i=x_j=0$

$\forall\beta\in S_2$，$\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，$\beta\neq\alpha$

因为 $\alpha*\beta\geq n-1$，所以 y_i,y_j不能同时为0

所以对$1\le i<j\le n$中的一组数i,j而言，

在集合S_2中至多有一个元素 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 满足x_i，x_j同时为0

所以集合S_2中元素个数不超过C_n^2个

所以集合S中的元素个数为至多为$n+1+C_n^2=n^2+n+1$

记$T_1=\left\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_1+x_2+\cdots+x_n\ge n-1,\alpha\in\Omega_n\right\}$，则$T_1$中共$n+1$个元素，

对于任意的$\alpha\in T_1$，$\beta\in\Omega_n$，$\alpha*\beta\ge n-1$.

对$1\le i<j\le n$，记$\beta_{i,j}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中$x_i=x_j=0$，$x_t=1$，$t\ne i,t\ne j$

记$T_2=\{\beta_{i,j}\,|\,1\le i<j\le n\}$，

显然$\forall\alpha,\beta\in S_2$，$\alpha\ne\beta$，均有$\alpha*\beta\ge n-1$.

记$S=T_1\bigcup T_2$，S中的元素个数为n^2+n+1，且满足$\forall\alpha,\beta\in S$，$\alpha\ne\beta$，均有$\alpha*\beta\ge n-1$.

综上所述，S中的元素个数最大值为n^2+n+1.