2023届高三第七次百校大联考试卷

数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1. 若复数z满足$z(1+i)=i^5$，则其共轭复数$\bar{z}$在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 已知集合$A=\{x|x^2-x-6>0\}$，$B=\{x|y=\sqrt{9-x^2}\}$，则$A\cap B=$

A. $[-3,-2)$　　B. $[-3,-2]$　　C. $[-3,-2]\cup\{3\}$　　D. $[-3,-2)\cup\{3\}$

3. $\sin 226^\circ\cos 196^\circ-\sin 164^\circ\sin 44^\circ$等于

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

4. 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3}=1(a>\sqrt{3})$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，$A$为上顶点，若$\triangle AF_1F_2$的面积为$\sqrt{3}$，则$\triangle AF_1F_2$的周长为

A. 8　　B. 7　　C. 6　　D. 5

5. 已知非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，则"$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|$"是"$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$"成立的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 世界公认的三大著名数学家为阿基米德、牛顿、高斯，其中享有"数学王子"美誉的高斯提出了取整函数$y=[x]$，$[x]$表示不超过x的最大整数，例如$[1.1]=1$，$[-1.1]=-2$. 已知$f(x)=\left[x+\frac{4}{x}\right]$，$x\in\left[\frac{1}{2},6\right)$，则函数$f(x)$的值域为

A. $\{4,6,8\}$　　B. $\{4,5,6\}$　　C. $\{4,5,6,7,8\}$　　D. $\{4,8\}$

7. 已知三棱锥$P-ABC$的外接球O，PC为球O的直径，且$PC=2$，$PA=PB=\sqrt{3}$，$AB=1$，那么三棱锥$P-ABC$的体积为

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{6}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

8. 已知定义在$\mathbf{R}$上的偶函数$y=f(x)$的导函数为$y=f'(x)$，当$x>0$时，$\frac{xf'(x)+f(x)}{x}>0$，且$f(2)=1$，则不等式$f(2x-1)<\frac{2}{2x-1}$的解集为

A. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$　　B. $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$

C. $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

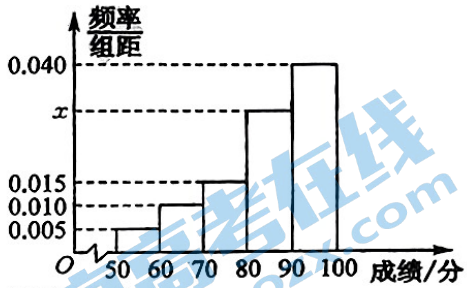
二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9. 在二项式$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2x}\right)^6$的展开式中，下列说法正确的是

A. 常数项是$\frac{15}{4}$　　B. 各项的系数和是 64

C. 第 4 项二项式系数最大　　D. 奇数项二项式系数和为-32

10. 在某市高三年级举行的一次模拟考试中，某学科共有 20000 人参加考试. 为了了解本次考试学生成绩情况，从中抽取了n名学生的成绩（成绩均为正整数，满分为 100 分）进行统计，其成绩都在区间[50，100]内. 按照[50，60)，[60，70)，[70，80)，[80，90)，[90，100]的分组作出频率分布直方图如图所示. 其中，成绩落在区间[90，100]内的人数为 40，则下列结论正确的是



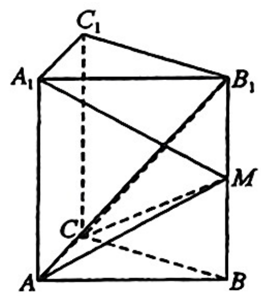
A. $n=1000$

B. 图中$x=0.030$

C. 估计该市全体学生成绩的平均分为 84 分（同一组数据用该组区间的中点值作代表）

D. 若对 80 分以上的学生授予“优秀学生”称号，则该市约有 14000 人获得该称号

11. 如图，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=4$，$AC=3$，$BC=AA_1=5$，M是BB_1上的点，则下列结论正确的是



A. $AC\perp A_1M$

B. 若M是BB_1的中点，异面直线AA_1，CM夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. 平面AB_1C将三棱柱截成一个五面体和一个四面体

D. A_1M+MC的最小值是$\sqrt{106}$

12. 过抛物线$x^2=8y$的焦点F的直线交抛物线于A，B两点，分别过A，B作抛物线的切线交于点P，则下列说法正确的是

A. 若直线AB的倾斜角为$\frac{\pi}{4}$，则$|AB|=16$　　B. 点P在直线$y=-4$上

C. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$　　D. $\frac{|AB|+1}{|PF|}$的最小值为$\frac{9}{4}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 曲线 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$在点$(1,f(1))$处的切线方程为________.

14. 若直线 $2x-y+a=0$ 被圆$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 截得的弦长为 2，则实数 a 的值为________.

15.《笑林广记》中有这样一则笑话："有自负棋高者. 与人角，连负三局. 次日，人问之曰：昨日较棋几局？答曰：三局. 又问：胜负如何？ 曰：第一局我不曾赢，第二局他不曾输，第三局我本等要和，他不肯罢了."已知每局对弈结果有胜、和、负三种情形，根据"自负棋艺者"的回答，判断他"与人角"仅和了 1 局，则这一判断正确的概率为________.

16. 黎曼猜想由数学家波恩哈德・黎曼于 1859 年提出，是至今仍未解决的世界难题. 黎曼猜想涉及到很多领域的应用，有些数学家将黎曼猜想的攻坚之路趣称为："各大行长躲在银行保险柜前瑟瑟发抖，不少黑客则潜伏敲着键盘蓄势待发". 黎曼猜想研究的是无穷级数 $\xi(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-s}=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots$，我们经常从无穷级数的部分和$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}$入手. 已知正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且满足 $S_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$，则$\left[\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_{400}}\right]=$________(其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数).

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知公差不为 0 的等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，且 a_2,a_4-2,a_6 成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=3^{a_n-1}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

18.（12 分）

已知△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $c\sin A=\sqrt{3}a+\sqrt{3}a\cos C$.

(1)求角 C 的大小；

(2)若 $c=2\sqrt{3}$，角 A 与角 B 的内角平分线相交于点 D，求△ABD 面积的最大值.

19.（12 分）

农业科研人员为了提高某农作物的产量，在一块试验田中随机抽取该农作物 50 株作研究，单株质量（单位：克）落在各个小组的频数分布如下表：

数据分组	$[12.5,15.5)$	$[15.5,18.5)$	$[18.5,21.5)$	$[21.5,24.5)$	$[24.5,27.5)$	$[27.5,30.5)$	$[30.5,33.5]$
频数	4	8	10	12	10	3	3

（1）根据频数分布表，求该农作物单株质量落在$[27.5,33.5]$的概率（用频率估计概率）；

（2）求这 50 株农作物质量的样本平均数 $\overline{X}$；（同一组数据用该组区间的中点值作代表）

（3）若这种农作物单株质量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 近似为样本平均数 $\overline{X}$，σ^2 近似为样本方差 S^2，经过计算知 $S^2=22.2516$，求 $P(X<26.94)$.

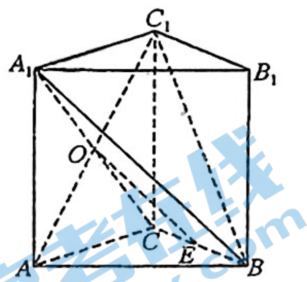
附：①若 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)=0.6826$，$P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)=0.9544$；② $\sqrt{22.2516}\approx4.72$.

20.（12 分）

如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$底面 ABC，$AC\perp BC$，$AC=BC=2$，$AA_1=4$，O 为侧面 AA_1C_1C 的对角线的交点，E 为棱 BC 的中点.

（1）求证：$OE//$平面 A_1BC_1；

（2）求直线 OE 与平面 ABC_1 所成角的正弦值.



21.（12 分）

已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\sqrt{5}$.

（1）求双曲线 C 的渐近线方程；

（2）动直线 l 分别交双曲线 C 的渐近线于 A，B 两点（A，B 分别在第一、四象限），且$\triangle OAB$（O 为坐标原点）的面积恒为 8，是否存在总与直线 l 有且只有一个公共点的双曲线 C，若存在，求出双曲线 C 的方程；若不存在，说明理由.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=(x-a-1)e^x-\dfrac{1}{2}ax^2+a^2x$.

（1）当 $a=0$ 时，求函数 $f(x)$的单调区间；

（2）若 $f(x)$在$(-\infty,0)$上只有一个极值，且该极值小于$-e^a-1$，求实数 a 的取值范围.

大联考数学七
参考答案、提示及评分细则

1. D　由 $z(1+\mathrm{i})=\mathrm{i}^5$，得 $z=\frac{\mathrm{i}^5}{1+\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{1+\mathrm{i}}{2}$，所以 $\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}$，则 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点的坐标为 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，位于第四象限.

2. A　由已知可得 $A=\{x|x^2-x-6>0\}=\{x|x>3$ 或 $x<-2\}$，$B=\{x|9-x^2\geqslant 0\}=\{x|-3\leqslant x\leqslant 3\}$，所以 $A\cap B=\{x|-3\leqslant x<-2\}$.

3. C　$\sin 226^\circ\cos 196^\circ-\sin 164^\circ\sin 44^\circ=-\sin 46^\circ(-\cos 16^\circ)-\sin 16^\circ\cos 46^\circ=\sin 46^\circ\cos 16^\circ-\cos 46^\circ\sin 16^\circ=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$.

4. C　由题知，$S_{\triangle AF_1F_2}=\frac{1}{2}\times 2c\times b=\sqrt{3}c=\sqrt{3}$，$\therefore c=1$，$a=\sqrt{b^2+c^2}=2$，由椭圆的定义知 $|AF_1|+|AF_2|=2a=4$，$\therefore\triangle AF_1F_2$ 的周长为 $4+2=6$.

5. B　若 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|$；若 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$，当 $\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 时，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(0,1)$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$ 成立，但 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$.

6. C　易知 $y=x+\frac{4}{x}$，$x\in\left[\frac{1}{2},6\right)$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上单调递减，$[2,6)$ 上单调递增. 当 $x=2$ 时，$y=x+\frac{4}{x}=4$；当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$y=\frac{1}{2}+8$；当 $x=6$ 时，$y=x+\frac{4}{x}=6+\frac{2}{3}$；所以 $f(x)\in\left[4,\frac{17}{2}\right]$，则函数 $f(x)$ 的值域为 $\{4,5,6,7,8\}$.

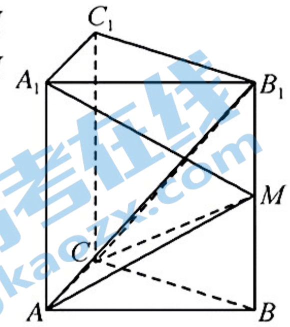
7. D　由 PC 为球 O 的直径可知，$PA\perp AC$，$PB\perp BC$，即 $AC=BC=1$，所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形，即 $\triangle ABC$ 外接圆的半径 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 因为球 O 的半径 $R=1$，所以点 O 到平面 ABC 的距离 $d=\sqrt{R^2-r^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，即顶点 P 到平面 ABC 的距离为 $2d=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$\therefore V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{6}$.

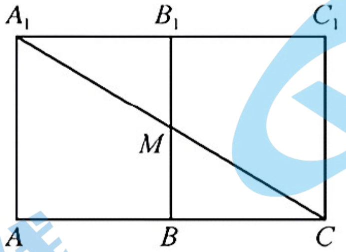
8. C　当 $x>0$ 时，$\frac{xf'(x)+f(x)}{x}>0$，所以当 $x>0$ 时，$xf'(x)+f(x)>0$，令 $F(x)=xf(x)$，则当 $x>0$ 时，$F'(x)=xf'(x)+f(x)>0$，故 $F(x)=xf(x)$ 在 $x>0$ 时，单调递增，又因为 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为偶函数，所以 $F(x)=xf(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为奇函数，故 $F(x)=xf(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，因为 $f(2)=1$，所以 $F(2)=2f(2)=2$，当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f(2x-1)<\frac{2}{2x-1}$ 可变形为 $(2x-1)f(2x-1)<2$，即 $F(2x-1)<F(2)$，因为 $F(x)=xf(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $2x-1<2$，解得 $x<\frac{3}{2}$，故 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$；当 $x<\frac{1}{2}$ 时，$f(2x-1)<\frac{2}{2x-1}$ 可变形为 $(2x-1)f(2x-1)>2$，即 $F(2x-1)>F(2)$，因为 $F(x)=xf(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $2x-1>2$，解得 $x>\frac{3}{2}$，故无解. 综上不等式 $f(2x-1)<\frac{2}{2x-1}$ 的解集为 $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

9. AC　二项式 $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2x}\right)^6$ 的展开式通项为 $T_{k+1}=\mathrm{C}_6^k\cdot(\sqrt{x})^{6-k}\cdot\left(-\frac{1}{2x}\right)^k=\mathrm{C}_6^k\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k\cdot x^{3-\frac{3}{2}k}$. 令 $3-\frac{3}{2}k=0$，可得 $k=2$，故常数项是 $\mathrm{C}_6^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{4}$，A 正确；各项的系数和是 $\left(1-\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$，B 错误；展开式共 7 项，第 4 项二项式系数最大，C 正确；奇数项二项式系数和为 $2^5=32$，D 错误.

10. BCD　因为成绩落在区间 $[90,100]$ 内的人数为 40，所以 $n=\frac{40}{0.04\times 10}=100$，故 A 错误；由 $(0.005+0.010+0.015+x+0.040)\times 10=1$，得 $x=0.030$，故 B 正确；学生成绩平均分为：$0.005\times 10\times 55+0.010\times 10\times 65+0.015\times 10\times 75+0.030\times 10\times 85+0.040\times 10\times 95=84$，故 C 正确；因为 $20000\times(0.04+0.03)\times 10=14000$，，故 D 正确.

11. ACD　因为 $AA_1\perp AC$，$BA\perp AC$，且 $AA_1\cap BA=A$，所以 $AC\perp$ 平面 AA_1B_1B，又 $A_1M\subset$ 平面 AA_1B_1B，故 $AC\perp A_1M$，故 A 正确；BB_1 与 CM 的夹角即为异面直线 AA_1，CM 夹角，故异面直线 AA_1，CM 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$；B 错误；由图知，平面 AB_1C 将三棱柱截成四棱锥 $B_1-ACC_1A_1$ 和三棱锥 B_1-ABC，一个五面体和一个四面体，C 正确；将平面 AA_1B_1B 和平面 CC_1B_1B 展开，展开为一个平面，如下图，当 A_1，M，C 共线时，A_1M+MC 的最小值为 $\sqrt{106}$，故 D 正确.





12. ACD　由题可得，抛物线的焦点坐标为 $F(0,2)$. 直线 AB：$y=x+2$，与抛物线 $x^2=8y$ 联立得 $y^2-12y+4=0$，所以 $y_1+y_2=12$，所以 $|AB|=y_1+y_2+4=12+4=16$，故 A 正确；设 $A\left(x_1,\frac{x_1^2}{8}\right)$，$B\left(x_2,\frac{x_2^2}{8}\right)$，由 $x^2=8y$，所以 $y'=\frac{x}{4}$，所以 AP：$y-\frac{x_1^2}{8}=\frac{x_1}{4}(x-x_1)$，即为 $y=\frac{x_1x}{4}-\frac{x_1^2}{8}$，同理可得 BP：$y=\frac{x_2x}{4}-\frac{x_2^2}{8}$，由 $\begin{cases}y=\frac{x_1}{4}x-\frac{x_1^2}{8},\\ y=\frac{x_2}{4}x-\frac{x_2^2}{8},\end{cases}$ 解得 $y_P=\frac{x_1x_2}{8}$，由题意可知 AB 斜率存在，设 AB：$y=kx+2$，联立 $\begin{cases}x^2=8y,\\ y=kx+2\end{cases}$ 可知 $x^2-8kx-16=0$，$x_1x_2=-16$，所以 $y_P=-2$，所以点 P 在直线 $y=-2$ 上，故 B 错误；因为 $k_{AP}=\frac{x_1}{4}$，$k_{BP}=\frac{x_2}{4}$，所以 $k_{AP}\cdot k_{BP}=\frac{x_1x_2}{16}=-1$，所以 $AP\perp BP$，故 C 正确；因为 $P\left(\frac{x_1+x_2}{2},-2\right)$，即为 $P(4k,-2)$，所以 $|PF|=\sqrt{16k^2+16}=4\sqrt{k^2+1}$，因为 $|AB|=y_1+y_2+4=8k^2+8$，所以 $\frac{|AB|+1}{|PF|}=\frac{8k^2+9}{4\sqrt{k^2+1}}=2\sqrt{k^2+1}+\frac{1}{4\sqrt{k^2+1}}$，令 $t=\sqrt{k^2+1}\geqslant 1$，则原式 $=2t+\frac{1}{4t}$. 因为函数 $y=2t+\frac{1}{4t}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以当 $t=1$，即 $k=0$ 时取到最小值，其最小值为 $\frac{9}{4}$，故 D 正确.

13. $x-y-1=0$　$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，$f(1)=0$，$f'(1)=1$，切线方程为 $y=x-1$，即 $x-y-1=0$.

14. -1　由题知直线过圆心 $(1,1)$，故 $2\times 1-1+a=0$，$a=-1$.

15. $\frac{1}{2}$　该人对弈结果的所有可能情形：负负负、负和负、和负负、和和负、负负胜、负和胜、和负胜、和和胜. 故"仅和了 1 局"的概率为 $\frac{1}{2}$.

16. 38　当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)$，$a_1=\frac{1}{a_1}$，$a_1^2=1$，$\because a_n>0$，$\therefore a_1=S_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，$\therefore 2S_n=S_n-S_{n-1}+\frac{1}{S_n-S_{n-1}}$，$S_n+S_{n-1}=\frac{1}{S_n-S_{n-1}}$，$\therefore S_n^2-S_{n-1}^2=1$，$\therefore\{S_n^2\}$ 是以 1 为首项，公差为 1 的等差数列，$\therefore S_n^2=n$，$\because a_n>0$，$\therefore S_n>0$，$S_n=\sqrt{n}$，$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{2}{2S_n}$，又 $n>1$ 时，$\frac{2}{2S_n}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$ 令 $S=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_{400}}$，$S>2[(\sqrt{401}-\sqrt{400})+(\sqrt{400}-\sqrt{99})+\cdots+(\sqrt{2}-1)]=2(\sqrt{401}-1)>38$，$S<2[(\sqrt{400}-\sqrt{399})+(\sqrt{399}-\sqrt{398})+\cdots+(\sqrt{2}-1)]+1=2(\sqrt{400}-1)+1=39$，即 $38<S<39$，从而 $[S]=38$.

17. 解：(1) 由已知得 $(a_1+3d-2)^2=(a_1+d)(a_1+5d)$，$a_1=d^2-3d+1$，…………………………………… 2 分

又因为 $a_1=1$，所以 $d^2-3d+1=1$，解得 $d=3$ 或 $d=0$（舍去），…………………………………………………… 4 分

所以 $a_n=3n-2$. …… 5 分

(2)由(1)得 $b_n=3^{3n-3}$，因为 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{3^{3(n+1)-3}}{3^{3n-3}}=27$， …………………………………………………………… 8 分

所以 $\{b_n\}$ 是以 $b_1=1$ 为首项，以 27 为公比的等比数列，所以 $S_n=\frac{1}{26}(27^n-1)$. …………………………… 10 分

18. 解：(1)由正弦定理及 $c\sin A=\sqrt{3}a+\sqrt{3}a\cos C$，得 $\sin C\sin A=\sqrt{3}\sin A+\sqrt{3}\sin A\cos C$. ……………… 2 分

$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore \sin A\neq 0$，$\therefore \sin C=\sqrt{3}(1+\cos C)$， ……………………………………………………… 3 分

$\therefore 2\sin\left(C-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$，$\therefore \sin\left(C-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………………………………………………………………… 4 分

$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore C-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，

$\therefore C-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$，$\therefore C=\frac{2\pi}{3}$. ……………………………………………………………………………………………… 6 分

(2)由题意可知 $\angle ADB=\frac{5\pi}{6}$. …………………………………………………………………………………………… 7 分

由余弦定理知 $AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB$， ……………………………………………………… 8 分

故 $12\geqslant 2AD\cdot BD+\sqrt{3}AD\cdot BD$，即 $AD\cdot BD\leqslant\frac{12}{2+\sqrt{3}}=12(2-\sqrt{3})$，当 $AD=BD=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ 时，等号成立.

…… 10 分

所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot BD\cdot\sin\angle ADB\leqslant\frac{1}{2}\times 12\times(2-\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}-9$，

即 $\triangle ABD$ 面积的最大值为 $6\sqrt{3}-9$. ……………………………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)根据频数分布表可知，单株质量落在[27.5，33.5)的概率为 $P=\frac{3+3}{50}=0.12$. …………………… 3 分

(2)样本平均数 $\overline{X}=0.08\times 14+0.16\times 17+0.20\times 20+0.24\times 23+0.20\times 26+0.06\times 29+0.06\times 32=22.22$，

这 50 株农作物质量的样本平均数为 22.22. …………………………………………………………………………… 7 分

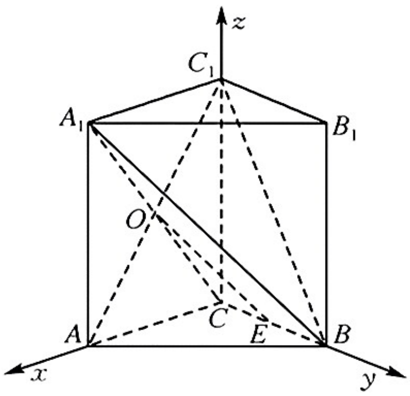
(3)依题意 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，因为 $\mu=\overline{X}=22.22$，$\sigma^2=S^2=22.2516$，$\sigma\approx 4.72$，

所以 $P(22.22-4.72<X\leqslant 22.22+4.72)=0.6826$，所以 $P(X<26.94)=0.5+\frac{0.6826}{2}=0.8413$. … 12 分

20. 解：(1)证明：由题易知，该三棱柱为直三棱柱，所以侧面 AA_1C_1C 为矩形，可得 O 为 A_1C 的中点，

又由 E 为 BC 的中点，可得 $A_1B/\!/OE$.

因为 $OE\not\subset$ 平面 A_1BC_1，$A_1B\subset$ 平面 A_1BC_1，所以 $OE/\!/$ 平面 A_1BC_1. … 4 分



(2)由题可以 CA，CB，CC_1 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，

则 $O(1,0,2)$，$E(0,1,0)$，$A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C_1(0,0,4)$，

$\overrightarrow{OE}=(-1,1,-2)$，$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{AC_1}=(-2,0,4)$， …………………… 7 分

设平面 ABC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x+2y=0,\\ -2x+4z=0,\end{cases}$

令 $z=1$，则 $x=2$，$y=2$，$\therefore \boldsymbol{m}=(2,2,1)$， ………………………………………………… 10 分

设直线 OE 与平面 ABC_1 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{OE},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{OE}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{OE}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{6}}{9}$. …………………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)因为离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$，$c^2=a^2+b^2$，

所以 $5a^2=a^2+b^2$，$4a^2=b^2$，$\frac{b}{a}=2$， ………………………………………………………………………… 2 分

所以双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm 2x$. …………………………………………………… 3 分

(2)存在符合题意的双曲线，

设双曲线的两条渐近线分别为 $l_1:y=2x,l_2:y=-2x$，双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4a^2}=1$，

依题意得直线 l 的斜率不为零，

因此设直线 l 的方程为 $x=my+t,-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2},t>0$， …………………………………… 5 分

设直线 l 交 x 轴于点 $C(t,0),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}x=my+t,\\y=2x,\end{cases}$ 得 $y_1=\frac{2t}{1-2m}$，同理得 $y_2=\frac{-2t}{1+2m}$. …………………………………… 6 分

由$\triangle OAB$ 的面积 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OC|\cdot|y_1-y_2|=8$，

得$\frac{1}{2}t\left|\frac{2t}{1-2m}+\frac{2t}{1+2m}\right|=8$，

即 $t^2=4|1-4m^2|=4(1-4m^2)>0$,(1) …………………………………………………… 8 分

联立$\begin{cases}x=my+t,\\\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4a^2}=1,\end{cases}$ 得$(4m^2-1)y^2+8mty+4(t^2-a^2)=0$,,

因为 $4m^2-1<0$，所以，直线 l 与双曲线只有一个公共点当且仅当 $\Delta=0$，

即 $\Delta=64m^2t^2-16(4m^2-1)(t^2-a^2)=0$，

化简得 $4m^2a^2+t^2-a^2=0$， …………………………………………………… 10 分

将(1)式代入可得 $4m^2a^2+4(1-4m^2)-a^2=0$，

$(a^2-4)(4m^2-1)=0$，

解得 $a^2=4$， …………………………………………………… 11 分

因此双曲线的方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$，

因此，存在总与直线 l 有且只有一个公共点的双曲线，双曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$. ………… 12 分

22. 解：(1)$a=0$ 时，$f(x)=(x-1)e^x,f'(x)=xe^x$， …………………………………………………… 1 分

令 $f'(x)>0$，得 $x>0$；令 $f'(x)<0$，得 $x<0$， …………………………………………………… 2 分

∴函数 $f(x)$ 的单调递增区间为$(0,+\infty)$；单调递减区间为$(-\infty,0)$. ……………………………… 3 分

(2)$f(x)=(x-a-1)e^x-\frac{1}{2}ax^2+a^2x$，

$f'(x)=(x-a)e^x-ax+a^2=(x-a)(e^x-a)$， …………………………………………………… 4 分

当 $a=0$ 时，$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，无极值. …………………………………………… 5 分

当 $a<0$ 时，$f(x)$在$(a,0)$上单调递增，在$(-\infty,a)$上单调递减. ………………………………… 6 分

∴$f(x)$在 $x=a$ 处取得极小值，∴$f(a)=-e^a+\frac{1}{2}a^3<-e^a-1$，∴$a<-\sqrt[3]{2}$. ………………………… 7 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=a$(正值舍去)，或 $x=\ln a,0<a<1$.

$f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上单调递增，在$(\ln a,0)$上单调递减，

∴$f(x)$在 $x=\ln a$ 处取得极大值. …………………………………………………… 9 分

设 $n(a)=f(\ln a)=(\ln a-a-1)a-\frac{1}{2}a\ln^2a+a^2\ln a=a\ln a(1-\frac{1}{2}\ln a+a)-a^2-a$，

$n'(a)=(1+\ln a)(1-\frac{1}{2}\ln a+a)+a\ln a(1-\frac{1}{2a})-2a-1=-\frac{1}{2}\ln^2a+2a\ln a-a$.

∵$0<a<1$，∴$\ln a<0$，从而有 $n'(a)<0$，

∴$n(a)$在$(0,1)$上单调递减，∴$n(a)>n(1)=-2>-e^a-1$，∴$0<a<1$ 不合题意. ……………… 11 分

当 $a\geq 1$ 时，$\ln a\geq 0$，$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增，此时 $f(x)$在$(-\infty,0)$上无极值，不合题意.

综上，a 的取值范围为$(-\infty,-\sqrt[3]{2})$. …………………………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

微信搜一搜

北京高考资讯