高 三 数 学

本试卷共 22 题，满分 150 分，共 8 页。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1．答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．考生作答时，将答案答在答题卡上。请按照题号在各题的答题区域（黑色线框）内作答，超出答题区域书写的答案无效。在草稿纸、试题卷上答题无效。

3．选择题答案使用 2B 铅笔填涂，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号；非选择题答案使用 0.5 毫米的黑色中性（签字）笔或碳素笔书写，字体工整、笔迹清楚。

4．保持答题卡卡面清洁，不折叠、不破损。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $A=\{x\mid -5<x<2\}$，$B=\{x\mid |x|<3\}$，则 $A\cup B=$

A．$(-\infty,2)$　　B．$(-\infty,3)$　　C．$(-3,2)$　　D．$(-5,3)$

2．已知复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=4\mathrm{i}$，则 $z\cdot\bar{z}=$

A．-8　　B．0　　C．8　　D．$8\mathrm{i}$

3．已知 $\sin\alpha-\sqrt{2}\cos\alpha=0$，则 $\cos 2\alpha=$

A．$-\frac{1}{3}$　　B．0　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{3}$

4．某运动员每次射击击中目标的概率均相等，若三次射击中，至少有一次击中目标的概率为 $\frac{63}{64}$，则射击一次，击中目标的概率为

A．$\frac{7}{8}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{8}$

5. 已知抛物线 C 的焦点为 F，准线为 l，点 A 在 C 上，点 B 在 l 上．若 $|\overrightarrow{AF}|=|\overrightarrow{BF}|=4$，$\overrightarrow{AF}\cdot(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BA})=0$，则 F 到 l 的距离等于

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

6. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x)+f(x)=0$，且当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=\sqrt{x}-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-\frac{9}{4},f(-\frac{9}{4}))$ 处的切线方程为

A．$4x-4y+11=0$　　B．$4x+4y+11=0$

C．$4x-4y+7=0$　　D．$4x+4y+7=0$

7. 图中，正方体 $ABCD-EFGH$ 的每条棱与正八面体 $MPQRSN$（八个面均为正三角形）的一条棱垂直且互相平分．将该正方体的顶点与正八面体的顶点连结，得到图2的十二面体，该十二面体能独立密铺三维空间．若 $AB=1$，则点 M 到直线 RG 的距离等于

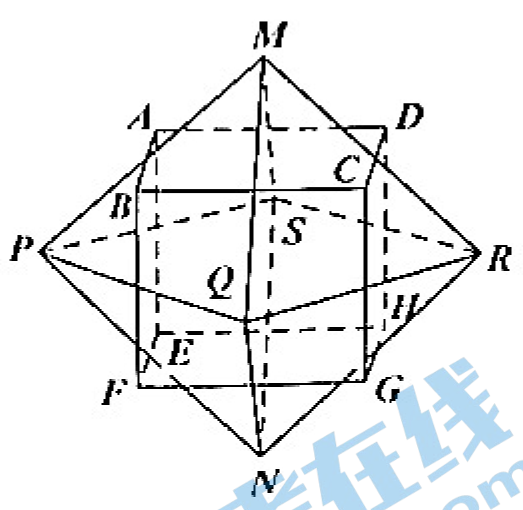


图1

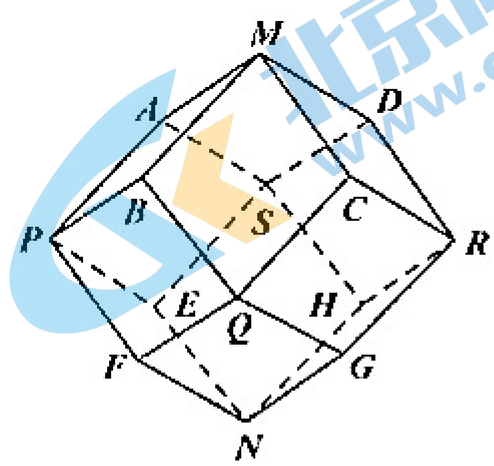


图2

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{7}}{2}$

8. 已知平面向量 a,b,c 满足 $|a|=1$，$b\cdot c=0$，$a\cdot b=1$，$a\cdot c=-1$，则 $|b+c|$ 的最小值为

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．4

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9．已知 AB 为圆 $C:x^2+y^2=4$ 的直径，直线 $l:y=kx+1$ 与 y 轴交于点 M，则

A．l 与 C 恒有公共点

B．$\triangle ABM$ 是钝角三角形

C．$\triangle ABM$ 的面积的最大值为1

D．l 被 C 截得的弦的长度的最小值为 $2\sqrt{3}$

10．已知函数 $f(x)=\sin x\cos x$，$g(x)=\sin x+\cos x$，则

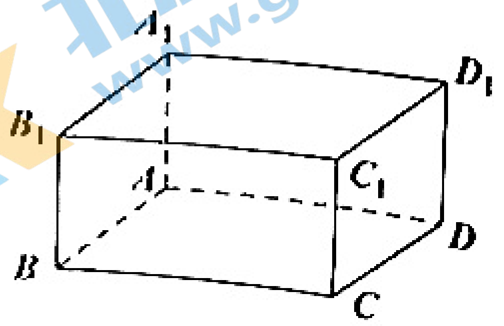
A．$f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 单调递增

B．$f(x)$ 的图象可由 $g(x)$ 的图象平移得到

C．$f(x)$ 图象的对称轴均为 $g(x)$ 图象的对称轴

D．函数 $y=f(x)+g(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$

11．在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=2$，$AA_1=1$，点 P,Q 在底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内，直线 AP 与该长方体的每一条棱所成的角都相等，且 $AP\perp CQ$，则



A．$AP=\sqrt{2}$

B．点 Q 的轨迹长度为 $\sqrt{2}$

C．三棱锥 $D-A_1QB$ 的体积为定值

D．AP 与该长方体的每个面所成的角都相等

12．某商场设有电子盲盒机，每个盲盒外观完全相同，规定每个玩家只能用一个账号登陆，且每次只能随机选择一个开启．已知玩家第一次抽盲盒，抽中奖品的概率为 $\frac{2}{7}$，从第二次抽盲盒开始，若前一次没抽中奖品，则这次抽中的概率为 $\frac{1}{2}$，若前一次抽中奖品，则这次抽中的概率为 $\frac{1}{3}$．记玩家第 n 次抽盲盒，抽中奖品的概率为 P_n，则

A．$P_2=\frac{19}{42}$

B．数列 $\{P_n-\frac{3}{7}\}$ 为等比数列

C．$P_n\le\frac{19}{42}$

D．当 $n\ge 2$ 时，n 越大，P_n 越小

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．设随机变量 $X \sim N(72,\sigma^2)$，若 $P(70<X<73)=0.3$，则 $P(71<X<74)=$______.

14．已知 $(x+m)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6$，且 $a_3+a_6=1$，则 $m=$______.

15．已知函数 $f(x)=|e^x-1|-ax$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围为______.

16．已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，C 的渐近线与圆 $x^2+y^2=a^2$ 在第一象限的交点为 M，线段 MF_2 与 C 交于点 N，O 为坐标原点．若 $MF_1 // ON$，则 C 的离心率为______.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17．（10 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$(a+c)\sin A=\sin A+\sin C$，$c^2+c=b^2-1$．

（1）求 B；

（2）已知 D 为 AC 的中点，$BD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

18.（12 分）

已知$\{a_n\}$为等差数列，且$a_{n+1}=2a_n-2n+3$．

（1）求$\{a_n\}$的首项和公差；

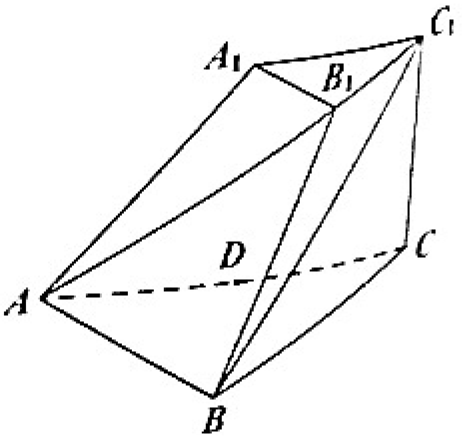
（2）数列$\{b_n\}$满足$b_n=\begin{cases}\dfrac{1}{a_k\cdot a_{k+1}}, & n=3k-2,\\ (-1)^n\cdot a_n, & 3k-1\leqslant n\leqslant 3k,\end{cases}$其中$k,n\in\mathbf{N}^*$，求$\sum\limits_{i=1}^{60}b_i$．

19.（12 分）

如图，三棱台$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=BC=2B_1C_1=2$，D是AC的中点，E是棱BC上的动点．

（1）试确定点E的位置，使AB_1//平面DEC_1；

（2）已知$AB\perp BC_1$，$CC_1\perp$平面ABC．设直线BC_1与平面DEC_1所成的角为θ，试在（1）的条件下，求$\cos\theta$的最小值．



20.（12 分）

港珠澳大桥海底隧道是当今世界上埋深最大、综合技术难度最高的沉管隧道，建设过程中突破了许多世界级难题，其建成标志着我国在隧道建设领域已达到世界领先水平．在开挖隧道施工过程中，若隧道拱顶下沉速率过快，无法保证工程施工的安全性，则需及时调整支护参数．某施工队对正在施工的隧道工程进行下沉量监控量测工作，通过对监控量测结果进行回归分析，建立前 t 天隧道拱顶的累加总下沉量 z（单位：毫米）与时间 t（单位：天）的回归方程，通过回归方程预测是否需要调整支护参数．已知该隧道拱顶下沉的实测数据如下表所示：

t	1	2	3	4	5	6	7
z	0.01	0.04	0.14	0.52	1.38	2.31	4.3

研究人员制作相应散点图，通过观察，拟用函数 $z=ke^{bt}$ 进行拟合．令 $u=\ln z$，计算得：

$\bar{z}=1.24$，$\sum_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})(z_i-\bar{z})=22.37$，$\sum_{i=1}^{7}(z_i-\bar{z})^2=27.5$；$\bar{u}=-1.2$，$\sum_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})(u_i-\bar{u})=25.2$，

$\sum_{i=1}^{7}(u_i-\bar{u})^2=30$．

（1）请判断是否可以用线性回归模型拟合 u 与 t 的关系；（通常 $|r|>0.75$ 时，认为可以用线性回归模型拟合变量间的关系）

（2）试建立 z 与 t 的回归方程，并预测前 8 天该隧道拱顶的累加总下沉量；

（3）已知当拱顶下沉速率超过 9 毫米/天，支护系统将超负荷，隧道有塌方风险．若规定每天下午 6 点为调整支护参数的时间，试估计最迟在第几天需调整支护参数，才能避免塌方．

附：①相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$；

②回归直线 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2},\quad \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x};$$

③参考数据：$\sqrt{210}\approx14.5$，$\ln10\approx2.30$．

21.（12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点分别为 A,B．直线 l 与 C 相切，且与圆 $O:x^2+y^2=4$ 交于 M,N 两点，M 在 N 的左侧.

（1）若 $|MN|=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，求 l 的斜率；

（2）记直线 AM，BN 的斜率分别为 k_1，k_2 证明：k_1k_2 为定值.

22.（12 分）

已知 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-a(x-1)-x\ln x$ 有两个极值点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$．

（1）求 a 的范围；

（2）当 $0<a\le 1-\ln 2$ 时，证明：$a+\frac{1}{2}<f(x_1)+f(x_2)<1$．

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。