中学生标准学术能力诊断性测试 2020 年 9 月测试

理科数学答案

一．选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	A	B	B	B	A	D	C	B	A	B	C

二．填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. $(-2,-1)\cup(1,7)$

14. $(2,\pm2\sqrt{2})$

15. 120

16. $-\dfrac{13}{4}$

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：60 分．

17. 解：

（1）由 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}$，得 $ab=4$ ①…………2 分

又由 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-4=4$，得 $a^2+b^2=8$ ②…………4 分

联立①②解得 $a=b=2$ …………5 分

（2）因为 $2R=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$， …………6 分

所以 $a+b=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}(\sin A+\sin B)=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\left[\sin A+\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)\right]$

$=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{3}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)=4\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)$…………8 分

因为 ΔABC 是锐角三角形，所以 $A\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$，从而 $A+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$．

所以 $\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，…………10 分

所以 $a+b\in\left(2\sqrt{3},4\right]$，即 $a+b$ 的取值范围是 $\left(2\sqrt{3},4\right]$…………12 分

18. 解：

（1）证明：取 PC 中点 G，连接 EG,FG，

则 $EG//DC//AF,EG=\frac{1}{2}DC=AF$，…………2 分

所以 $AEGF$ 是平行四边形，$AE//FG$，…………3 分

$\because AE\not\subset$ 面 PFC，$FG\subset$ 面 PFC，

$\therefore AE//$ 平面 PFC …………5 分

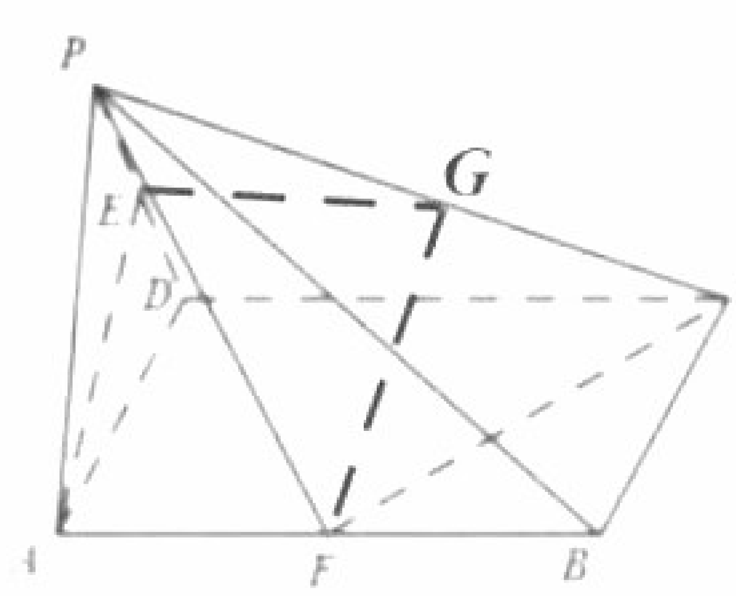
（2）因为 $AF//$ 平面 PDC，所以点 A,F 到平面 PCD 的距离相等 …………6 分

由 $CD\perp AD$，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

可得 $CD\perp$ 平面 PAD，所以 $CD\perp AE$，…………7 分

由 E 是 PD 中点，ΔPAD 是正三角形，所以 $AE\perp PD$，

…………8 分



（第 18 题图）

$CD\cap PD=D$，所以 $AE\perp$ 面 PCD …………9 分

设 $AB=2a$，

则 CF 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{AE}{CF}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+4}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ …………11 分

所以 $a=2$，即 $AB=4$ …………12 分

（建系或作出线面角的平面角按步骤相应给分）

19. 解：

（1）$\because a_n=\frac{n}{n-1}a_{n-1}-\frac{3n}{2}\cdot(-\frac{1}{2})^{n-1}$ $\therefore \frac{a_n}{n}=\frac{a_{n-1}}{n-1}-\frac{3}{2}\cdot(-\frac{1}{2})^{n-1}$，…………2 分

由累加法，当 $n\geq 2$ 时，$\frac{a_n}{n}-\frac{a_1}{1}=-\frac{3}{2}\cdot(-\frac{1}{2})-\frac{3}{2}\cdot(-\frac{1}{2})^2-\cdots-\frac{3}{2}\cdot(-\frac{1}{2})^{n-1}$

代入 $a_1=\frac{1}{2}$ 得，$n\geq 2$ 时，

$$\frac{a_n}{n}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{(-\frac{1}{2})\cdot(1-(-\frac{1}{2})^{n-1})}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-(-\frac{1}{2})^{n-1})=1+(-\frac{1}{2})^n$$ …………4 分

又 $a_1=\frac{1}{2}$ 适合上式，故 $a_n=n+n(-\frac{1}{2})^n(n\in N^*)$． …………5 分

（2）解法一：$2S_n-3n^2+5n>0\Leftrightarrow S_n-\frac{3n^2-5n}{2}>0$，数列 $\{3n-4\}$ 的前 n 项和为 $\frac{3n^2-5n}{2}$，…………6 分

令 $c_n=a_n-3n+4=n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n-2n+4$，其前 n 项和为 $C_n=S_n-\frac{3n^2-5n}{2}$，

…………8 分

则有 $c_1=\frac{3}{2}$，$c_2=\frac{1}{2}$，$c_3=-\frac{19}{8}$，故 $C_1>0$，$C_2>0$，$C_3<0$。

当 $n\geq4$ 时，$c_n=n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n-2n+4=n\cdot\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1\right]-n+4<0$，

则有 $C_n<0$．…………11 分

综上所述，不等式成立的 n 为1与2．…………12 分

解法二：令 $b_n=n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，其前 n 项和为 T_n，用错位相减法求和，

$$T_n=\left(-\frac{1}{2}\right)+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$-\frac{1}{2}T_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

两式相减得：

$$\frac{3}{2}T_n=\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n-n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$=-\frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)-n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$=-\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}+\frac{n}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

所以 $T_n=-\dfrac{2}{9}+\left(\dfrac{2}{9}+\dfrac{n}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$， …………8 分

则有 $S_n=\dfrac{n^2+n}{2}-\dfrac{2}{9}+\left(\dfrac{2}{9}+\dfrac{n}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ …………9 分

记 $f(n)=2S_n-3n^2+5n=-2n^2+6n-\dfrac{4}{9}+\left(\dfrac{4}{9}+\dfrac{2n}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

当 $n=1$ 时，$f(1)=3>0$；当 $n=2$ 时，$f(2)=4>0$；

当 $n\ge 3$ 且 n 为奇数，$-2n^2+6n-\dfrac{4}{9}<0$，$\left(\dfrac{4}{9}+\dfrac{2n}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n<0$，则 $f(n)<0$

当 $n\ge 3$ 且 n 为偶数，

$-2n^2+6n-\dfrac{4}{9}\le -32+24-\dfrac{4}{9}=-\dfrac{76}{9}$，$\left(\dfrac{4}{9}+\dfrac{2n}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n=\left(\dfrac{4}{9}+\dfrac{2n}{3}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n<1$，

则 $f(n)<0$. …………11 分

综上所述，不等式成立的 n 为 1 与 2. …………12 分

20.解：

（1）由于椭圆 C 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故 $a=\sqrt{2}c$. 又 $a^2=b^2+c^2$，所以 $b=c$.

所以椭圆 C 的方程为 $x^2+2y^2=a^2$ …………2 分

又点 $P\left(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 在椭圆上，所以 $a^2=2$，

所以，椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ …………3 分

设直线 PA 的斜率为 $k(k\ne 0)$，则直线 PB 的斜率为 $-k$，

则直线 PA 的方程为 $y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=k(x-1)$.

代入椭圆方程可得 $(2k^2+1)(x-1)^2+(2\sqrt{2}k+2)(x-1)=0$

所以 $x_A=1-\dfrac{2\left(1+\sqrt{2}k\right)}{1+2k^2}$，$y_A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{2\left(k+\sqrt{2}k^2\right)}{1+2k^2}$

同理可知，$x_B=1-\dfrac{2\left(1-\sqrt{2}k\right)}{1+2k^2}$，$y_B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{2\left(-k+\sqrt{2}k^2\right)}{1+2k^2}$ …………5 分

所以 $k_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{2\left(k+\sqrt{2}k^2\right)-2\left(-k+\sqrt{2}k^2\right)}{2\left(1+\sqrt{2}k\right)-2\left(1-\sqrt{2}k\right)}=\dfrac{4k}{4\sqrt{2}k}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故直线 AB 的斜率为定值. …………6 分

（2）设直线 AB 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+t$，直线 $x=1$ 和直线 AB 相交于点 Q，

则 $Q\left(1,t+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，所以 $|PQ|=|t|$.

把 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+t$ 代入 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 可得 $x^2+\sqrt{2}tx+t^2-1=0$ …………8 分

$\because\triangle=2t^2-4(t^2-1)>0,\therefore t^2<2$，由韦达定理，可知 $\begin{cases}x_A+x_B=-\sqrt{2}t\\x_A\cdot x_B=t^2-1\end{cases}$，

所以 $\left(x_B-x_A\right)^2=\left(x_A+x_B\right)^2-4x_Ax_B=2t^2-4\left(t^2-1\right)=4-2t^2$，

即 $\left|x_B-x_A\right|=\sqrt{2\left(2-t^2\right)}$ …………10 分

所以 $S=\dfrac{1}{2}|PQ|\cdot\left|x_B-x_A\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{t^2\left(2-t^2\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\left(t^2-1\right)^2}\left(-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}\right)$

所以当 $t=\pm1$ 时，ΔPAB 的面积 S 取得最大值 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ …………12 分

21.解：

（1）由题意得 $f'(x)=ae^x$，所以，$f'(1)=ae=1$，解得 $a=\dfrac{1}{e}$， …………2 分

又因为 $f(1)=\dfrac{1}{e}\cdot e^1+b=1$，所以 $b=0$，所以 $f(x)=e^{x-1}$ …………3 分

（2）证明：对 x 的取值范围分类讨论：

①$0<x<1$ 时，$e^{-1}<e^{x-1}<1$，$\ln x<0$，所以 $e^{x-1}\cdot\ln x>\ln x$

有：$f(x)\ln x+\dfrac{3}{x}=e^{x-1}\ln x+\dfrac{3}{x}>\ln x+\dfrac{3}{x}$，

令 $g(x)=\ln x+\frac{3}{x}$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}=\frac{x-3}{x^2}<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

所以 $g(x)>g(1)=3>\frac{5}{2}$，即 $f(x)\ln x+\frac{3}{x}=e^{x-1}\ln x+\frac{3}{x}>\ln x+\frac{3}{x}>3>\frac{5}{2}$，

故 $0<x<1$ 时，不等式成立；…………6 分

② $x\ge 1$ 时，先证明不等式 $e^{x-1}\ge x$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立，

令 $h(x)=e^{x-1}-x(x\ge 1)$，则 $h'(x)=e^{x-1}-1\ge 0$，

所以 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)\ge h(1)=0$

即不等式 $e^{x-1}\ge x$ 成立，…………8 分

而此时 $\ln x\ge 0$，于是有 $f(x)\ln x+\frac{3}{x}=e^{x-1}\ln x+\frac{3}{x}\ge x\ln x+\frac{3}{x}$，

要证 $f(x)\ln x+\frac{3}{x}>\frac{5}{2}$ 成立，可证其加强条件：$x\ln x+\frac{3}{x}>\frac{5}{2}$，

即证：$\ln x+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{2x}>0$ 在 $x\ge 1$ 时成立，

令 $m(x)=\ln x+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{2x}(x\ge 1)$，

则 $m'(x)=\frac{1}{x}-\frac{6}{x^3}+\frac{5}{2x^2}=\frac{2x^2+5x-12}{2x^3}=\frac{(2x-3)(x+4)}{2x^3}$，

所以 $m(x)$ 在 $\left[1,\frac{3}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $m(x)\ge m\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{3}$，…………10 分

由于 $\frac{27}{8}>3>e$，因此 $\frac{3}{2}>e^{\frac{1}{3}}$，所以 $\ln\frac{3}{2}>\frac{1}{3}$

所以 $m(x)\ge m\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{3}>0$ ，

即 $m(x)=\ln x+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{5}{2x}>0$

即 $\ln x+\dfrac{3}{x}>\dfrac{5}{2}$

所以 $f(x)\ln x+\dfrac{3}{x}=e^{x-1}\ln x+\dfrac{3}{x}\ge x\ln x+\dfrac{3}{x}>\dfrac{5}{2}$，故 $x\ge1$ 时，命题成立.

综上，当 $x>0$ 时，有 $f(x)\ln x+\dfrac{3}{x}>\dfrac{5}{2}$ 成立. …………12 分

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

（1）解：因为 $\dfrac{|PQ|}{|MN|}+\dfrac{|MN|}{|PQ|}\ge 2\sqrt{\dfrac{|PQ|}{|MN|}\cdot\dfrac{|MN|}{|PQ|}}=2$，

当且仅当 $\dfrac{|PQ|}{|MN|}=\dfrac{|MN|}{|PQ|}$ 即 $|PQ|=|MN|$ 时取“=”

故 $|MN|=|PQ|$

所以直线 PQ 的倾斜角为 45° 或 135° …………2 分

即直线 PQ 的极坐标方程是

$\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=5$，或 $\rho\cos\theta-\rho\sin\theta=5$. …………4 分

（2）解:因为 $24\le|MN|\le26, 24\le|PQ|\le26$，

故 $\dfrac{12}{13}\le\dfrac{|PQ|}{|MN|}\le\dfrac{13}{12}$ …………6 分

又函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{2x}$ 在 $\left(0,\dfrac{\sqrt2}{2}\right]$ 上单调递减，在 $\left[\dfrac{\sqrt2}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

$f(x)$ 在 $\left[\dfrac{12}{13},\dfrac{13}{12}\right]$ 上单调递增.

将 $x=\dfrac{12}{13}, x=\dfrac{13}{12}$ 分别代入，

$f(\frac{12}{13})=\frac{12}{13}+\frac{1}{2}\times\frac{13}{12}=\frac{457}{312}$，$f(\frac{13}{12})=\frac{13}{12}+\frac{1}{2}\times\frac{12}{13}=\frac{241}{156}$ …………9 分

所以 $\frac{|PQ|}{|MN|}+\frac{|MN|}{2|PQ|}$ 的最大值为 $\frac{241}{156}$，最小值为 $\frac{457}{312}$ …………10 分

23. [选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

因为 $a,b\in R^{+}$，$a+2b=a+b+b\geq 3\sqrt[3]{ab^2}$，当且仅当 $\begin{cases}a=b\\a+2b=3\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$ 时取

"=" …………2 分

（1）$\because a+2b=3$，$\therefore 0<ab^2\leq 1$，可得 $\frac{1}{ab^2}\geq 1$，…………3 分

$\because \frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^4}}\geq 3$

当且仅当 $a=b=1$ 时，取到最小值 3. …………5 分

（2）因为 x,y 是正数，且 $\frac{2}{x}+\frac{9}{y}=1$

所以，$\frac{4}{2x^2+x}+\frac{9}{y^2+y}=\frac{\frac{16}{x^2}}{8+\frac{4}{x}}+\frac{\frac{81}{y^2}}{9+\frac{9}{y}}=(\frac{\frac{4}{x}}{\sqrt{8+\frac{4}{x}}})^2+(\frac{\frac{9}{y}}{\sqrt{9+\frac{9}{y}}})^2$

$$=\frac{1}{18}\left[(\sqrt{8+\frac{4}{x}})^2+(\sqrt{9+\frac{9}{y}})^2\right]\left[(\frac{\frac{4}{x}}{\sqrt{8+\frac{4}{x}}})^2+(\frac{\frac{9}{y}}{\sqrt{9+\frac{9}{y}}})^2\right]$$

$\geq\frac{1}{18}(\sqrt{8+\frac{4}{x}}\times\frac{\frac{4}{x}}{\sqrt{8+\frac{4}{x}}}+\sqrt{9+\frac{9}{y}}\times\frac{\frac{9}{y}}{\sqrt{9+\frac{9}{y}}})^2=\frac{1}{18}$，…………8 分

当且仅当 $\frac{\frac{\frac{4}{x}}{\sqrt{8+\frac{4}{x}}}}{\sqrt{8+\frac{4}{x}}}=\frac{\frac{\frac{9}{y}}{\sqrt{9+\frac{9}{y}}}}{\sqrt{9+\frac{9}{y}}}$ 时，即 $\frac{\frac{4}{x}}{8+\frac{4}{x}}=\frac{\frac{9}{y}}{9+\frac{9}{y}}$，即 $y=2x$ 时，取等号。

又 $\frac{4}{x}+\frac{9}{y}=1$，所以当 $x=\frac{17}{2}$，$y=17$ 时，$\frac{4}{2x^2-x}+\frac{9}{y^2-y}$ 取得最小值 $\frac{1}{18}$ ……10 分