

绝密★启用前

2021 届高三期末预热联考 理数试卷

本试卷共 4 页, 23 题(含选考题)。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

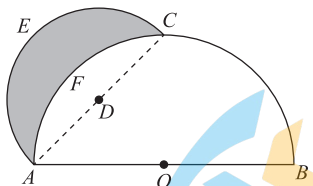
注意事项:

1. 答题前, 先将自己的姓名、考号等填写在试题卷和答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答: 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答: 用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答: 先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用 2B 铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内, 写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
5. 考试结束后, 请将本试题卷和答题卡一并上交。

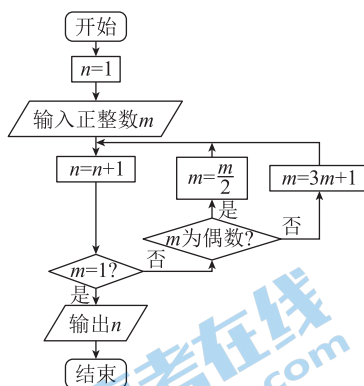
第 I 卷

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 集合 $M = \{x \in \mathbf{R} | 0 < x \leq 2020\}$, $N = \{x | x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 $M \cap N$ 所含元素个数为
A. 2020 B. 2021 C. 3 D. 1010
2. 复数 z 满足 $(z+i)(2+i) = 5$ (i 为虚数单位), 则复数 z 的虚部为
A. -2 B. -2i C. 2 D. 2i
3. 在平行四边形 $ABCD$ 中, E 为对角线 AC 上一点, 且 $\vec{AE} = 2\vec{EC}$, 则 $\vec{EB} =$
A. $\frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AD}$ B. $-\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AD}$ C. $\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}$ D. $\frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AD}$
4. 德国汉堡大学的学生提出一个猜想: 对于每个正整数, 如果它是奇数, 对它乘 3 再加 1; 如果它是偶数, 对它除以 2, 这样循环, 最终结果都能得到 1. 如图是验证此猜想的一个程序框图, 若输入正整数 m 的值为 5, 则输出的 n 的值是
A. 6 B. 7 C. 8 D. 9
5. 如图是古希腊著名的天才几何学家希波克拉底(公元前 470 年~公元前 410 年)用于求月牙形图形面积所构造的几何图形, 先以 AB 为直径构造半圆 O , C 为弧 AB 的中点, D 为线段 AC 的中点, 再以 AC 为直径构造半圆 D , 则由曲线 AEC 和曲线 AFC 所围成的图形为月牙形. 在图形 $ABCE$ 内任取一点, 则该点在月牙形内的概率为



- A. $\frac{1}{1+2\pi}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3+\pi}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2+\pi}$ D. $\frac{1}{1+\pi}$



6. “ $k > 5$ ”是“曲线 $C: \frac{x^2}{k-3} + \frac{y^2}{7-k} = 1 (k \in \mathbf{R})$ 是焦点在 x 轴上的椭圆”的
A. 充要条件 B. 既不充分也不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 充分不必要条件

7. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x+y-4 \geq 0, \\ 2x-y-2 \leq 0, \\ x-2y+5 \geq 0, \end{cases}$ 则 $\ln y - \ln x$ 的取值范围为
A. $[0, 1]$ B. $[0, \ln \frac{4}{3}]$ C. $[\ln \frac{3}{4}, \ln 3]$ D. $[0, \ln 3]$

8. 已知函数 $f(x) = \sin(2020x + \frac{\pi}{3}) + \cos(2020x - \frac{\pi}{6})$ 的最大值为 M , 函数 $f(x)$ 分别在 $x = m$ 和 $x = n$ 处取得极值 ($m \neq n$), 则 $M|m-n|$ 的最小值为

- A. $\frac{\pi}{2020}$ B. $\frac{\pi}{1010}$ C. $\frac{\pi}{505}$ D. $\frac{3\pi}{1010}$
9. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过点 F 且斜率为 2 的直线为 l , $M(-4, 0)$, 若抛物线 C 上存在一点 N , 使 M, N 关于直线 l 对称, 则抛物线 C 的方程为
A. $y^2 = 2x$ B. $y^2 = 4x$ C. $y^2 = 6x$ D. $y^2 = 8x$

10. 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB = CD = \sqrt{5}$, $AD = BC = 2$, $AC = 1$, 且二面角 $B-AC-D$ 等于 $\frac{\pi}{3}$, 则三棱锥 $A-BCD$ 的内切球的表面积为

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. π

11. 已知 $a = 0.75$, $b = 2\log_5 2$, $c = \frac{1}{2}\log_2 3$, 则 a, b, c 的大小关系是

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $b < a < c$ D. $c < b < a$
12. 已知 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上可导的图像不间断的偶函数, 导函数为 $f'(x)$, 且当 $x > 0$ 时, 满足 $f'(x) + 2xf(x) > 0$, 则不等式 $e^{1-2x}f(x-1) > f(-x)$ 的解集为
A. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ B. $(-\infty, \frac{1}{2})$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(0, +\infty)$

第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第 13~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22~23 题为选考题, 考生根据要求作答。

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分。

13. 已知 $a = \int_{-1}^1 (1 + \sqrt{1-x^2}) dx$, 则 $[(a - \frac{\pi}{2})x - \frac{1}{x}]^4$ 的展开式中的常数项为 _____。
14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1 = 2$, 前 n 项和为 S_n , 且 $a_{n+1} = S_n + 2, n \in \mathbf{N}^*$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n =$ _____。
15. 关于函数 $f(x) = |\cos x - \frac{1}{2}| + \cos x$, 有以下四个结论, 其中正确的有 _____。(填写所有你认为正确的序号)
① $f(x)$ 的周期为 π ; ② $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \pi$ 对称;
③ $f(x)$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$; ④ $f(x)$ 在 $[-\pi, 2\pi]$ 上与直线 $y = 1$ 有三个交点。

16. 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(-x)$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{e^x}{x}$, 若 $f^2(x) - 2mf(x) + 4m = 0$ 有 8 个不同的实数解, 则实数 m 的取值范围是 _____。

三、解答题: 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $(b-c)\sin(A+B) = (b-a)(\sin A + \sin B)$.

- (1) 求角 A 的大小;
- (2) 若 BC 边上的中线 $AD = \sqrt{6}$, 求 $b+c$ 的最大值。

18. (本小题满分 12 分)

某学校高三理科实验班共计 40 名学生,在备考复习教学中进行了 8 次规范性的考试,将每个学生 8 次考试的数学平均分、物理平均分制成茎叶图如下. 数学满分 150 分,达到或超过 120 分认为是良好的;物理满分 120 分,成绩达到或超过 96 分认为是良好的. 已知数学良好的学生中,恰好有 4 人物理不好.

数学平均分	物理平均分
	7 9 5
	8 9 7 7 6
8	9 9 8 8 7 7 6 6 5 4 3 2
7 5 5	10 9 9 8 8 7 7 6 6 5 4 2 0
7 6 6 5 3 2	11 9 8 7 6 5 3 2 1 0
9 8 6 6 6 6 5 5 3 3 2 1	12 0 0
8 7 5 5 4 4 3 3 2 2 0 0	13
7 5 4 3	14
0 0	15

- (1) 求数学成绩的众数、中位数;
 (2) 请填写下面列联表,并根据列联表判断是否有 99.5% 的把握认为学生物理良好与数学良好有关?

	数学良好	数学不好	合计
物理良好			
物理不好			
合计			

(3) 在物理不好的学生中按照数学是否良好分层抽取 5 位同学,再从这 5 位同学中抽取两位进行数学基础是否对物理学习有影响的深度访谈,求被抽到的两位同学恰好有一位数学良好的概率.

附:参考公式及数据:

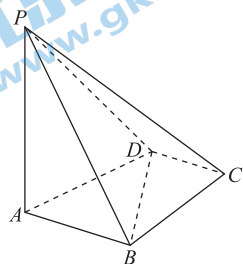
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}, n = a+b+c+d.$$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19. (本小题满分 12 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB=BD=DA=2\sqrt{3}$, $BC=CD=2$.

- (1) 求证: 平面 $PAC \perp$ 平面 PBD ;
 (2) 若直线 CD 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 求平面 PCD 与平面 PBC 所成锐二面角的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为 $2\sqrt{6}$, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
 (2) 已知点 $D(2, 2)$, 若不过坐标原点 O 且斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C 交于点 M, N , 且满足 $\vec{OM} + \vec{ON} = \lambda \vec{OD}$, 求 $\triangle MON$ 面积最大时直线 l 的方程.

21. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$, $g(x) = e^{2x} - 2ax$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 在 $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$ 上的值域;
 (2) 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, 不等式 $g(x) \geq f'(x)$ 恒成立 ($f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数), 求实数 a 的取值范围.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

已知在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 曲线 C_2

的参数方程是 $\begin{cases} x = \frac{t}{2} + \frac{1}{2t} \\ y = \frac{t}{2} - \frac{1}{2t} \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

- (1) 求曲线 C_1, C_2 的交点的极坐标;
 (2) 求以曲线 C_1, C_2 的交点为顶点的四边形的各边的极坐标方程.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = 2|x-1| - |x+1|$.

- (1) 在答题卡所给出的网格坐标系中作出函数 $f(x)$ 的图象 (不要求写作法), 并直接写出函数 $f(x)$ 的最小值;
 (2) 已知函数 $g(x) = |x+a| - 2|x-a|$, 若存在 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ 使 $f(x_1) + 5 = g(x_2)$, 求实数 a 的取值范围.

