# 高三数学参考答案

1. B　$|i(3-i)+2|=|3+3i|=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$.

2. D　因为$|\boldsymbol{a}|=3$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-5$,所以$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=9+10=19$.

3. C　因为 $A=\{x\mid x^2+1\leqslant10\}=[-3,3]$,$B=\{y\mid y\geqslant-1\}=[-1,+\infty)$,所以 $A\cap B=[-1,3]$.

4. C　因为平面 $ABC\perp$平面 $BCD$,平面 $ABC\cap$平面 $BCD=BC$,$BC\perp BD$,
所以 $BD\perp$平面 $ABC$,所以 $BD\perp AC$. 因为 $AB=AC$, $O$ 为线段 $BC$ 的中点,
所以 $BC\perp AO$,同理可得 $AO\perp$平面 $BCD$.

5. A　由题意 $L(p_1)-L(p_2)=a\lg\dfrac{p_1}{p_2}=a\lg100=60-20$,得 $a=20$,$L(p)=20\lg\dfrac{p}{p_0}$,因此 $L(p')=20\lg\dfrac{p'}{p_0}\leqslant50$,$L(p')-L(p_2)=20\lg\dfrac{p'}{p_2}\leqslant30$,则 $p'\leqslant10\sqrt{10}p_2$. $L(p_1)-L(p')=20\lg\dfrac{p_1}{p'}\geqslant10$,则 $p'\leqslant\dfrac{\sqrt{10}}{10}p_1$.

6. B　由函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象可知 $A=2$,$\dfrac{3}{4}T=\dfrac{13\pi}{12}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\pi}{4}$,则 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$. 由 $f(\dfrac{13\pi}{12})=2\sin(2\times\dfrac{13\pi}{12}+\varphi)=2$,解得 $\varphi=-\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi$,

则 $f(x)=2\sin(2x-\dfrac{5\pi}{3})$,故 $f(\dfrac{3\pi}{4})=2\sin(2\times\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{5\pi}{3})=-1$.

7. A　因为 $a-c=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{32}-\sqrt{27}}{2\sqrt{6}}>0$,所以 $a>c$.

$c-b=\sqrt{2}-\sqrt{5}+\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{2}$,因为$(2\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(2\sqrt{5})^2=4\sqrt{6}-9=\sqrt{96}-\sqrt{81}>0$,且 $2\sqrt{2}+\sqrt{3}>0$,$2\sqrt{5}>0$,所以 $2\sqrt{2}+\sqrt{3}>2\sqrt{5}$,所以 $c-b>0$,所以 $c>b$. 故 $a>c>b$.

8. D　记 $E$ 的右焦点为 $F_1$,$MF$ 的中点为 $P$,连接 $MF_1$,$PF_1$(图略),因为$\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{NF}$,$O$ 为 $FF_1$ 的中点,所以 $ON/\!/PF_1$,则 $MF\perp PF_1$,从而$|MF_1|=|FF_1|=2c$. 又 $\tan\angle MFF_1=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$,所以 $\cos\angle MFF_1=\dfrac{|MF|}{2|FF_1|}=\dfrac{3}{4}$,则$|MF|=3c$,$|MF|-|MF_1|=3c-2c=c=2a$,故 $E$ 的离心率为 2.

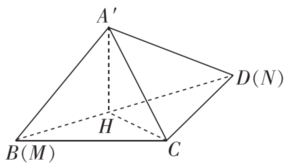
9. AC　将已知的 6 个数按照从小到大的顺序排列为 46,50,54,58,62,80. $7\times20\%=1.4$,$7\times40\%=2.8$.
若 $x\leqslant46$,则这组数据的第 20 百分位数与第 40 百分位数分别是 46 和 50,$50-46\neq3$;
若 $x\geqslant54$,则这组数据的第 20 百分位数与第 40 百分位数分别是 50 和 54,$54-50\neq3$.

所以 $46<x<54$，则这组数据的第 20 百分位数与第 40 百分位数分别是 $x$ 和 50，或 50 和 $x$，则 $|50-x|=3$，解得 $x=47$ 或 53.

10. BCD　因为 $f'(x)=3x^2-6x=3(x-1)^2-3\geqslant-3$，所以 $l_m$ 的斜率的最小值为 $-3$. 因为 $f'(0)=0$，$f(0)=1$，所以 $l_0$ 的方程为 $y=1$. 因为 $f'(-1)=9$，$f(-1)=-3$，所以 $l_{-1}$ 的方程为 $y+3=9(x+1)$，即 $y=9x+6$.

11. AB　因为 $|CD|=5$，所以 $|PQ|$ 的最小值为 $|CD|-1-2=2$，所以圆 $C$ 与圆 $D$ 外离，圆 $C$ 与圆 $D$ 有 4 条公切线，A，B 均正确. 因为直线 $CD$ 的方程为 $y=-\frac{4}{3}x$，代入 $x^2+y^2=1$，得 $x=\pm\frac{3}{5}$，当 $|PQ|$ 取得最小值时，$P$ 为线段 $CD$ 与圆 $C$ 的交点，所以 $P$ 点的坐标为 $(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$，C 错误. 过点 $C$ 作圆 $D$ 的切线，切点为 $M$(图略)，则 $|CM|=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$，当 $P$ 为线段 $MC$ 的延长线与圆 $C$ 的交点，且点 $Q$ 与 $M$ 重合时，$|PQ|=1+\sqrt{21}$，此时点 $D$ 到直线 $PQ$ 的距离等于 2，D 错误.

12. ABD　设 $AM=x$，因为 $AM=AN$，点 $H$ 为 $MN$ 的中点，所以 $A'H\perp MN$，且 $AH=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，底面 $MBCDN$ 的面积为 $16-\frac{1}{2}x^2(0<x\leqslant4)$，所以五棱锥 $A'-MBCDN$ 的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{6}x(16-\frac{1}{2}x^2)(0<x\leqslant4)$. 当点 $M$ 为 $AB$ 的中点时，五棱锥 $A'-MBCDN$ 的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{6}\times2\times(16-\frac{1}{2}\times2^2)=\frac{14\sqrt{2}}{3}$，A 正确. 当点 $M$ 与点 $B$ 重合时，三棱锥 $A'-BCD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{6}\times4\times(16-\frac{1}{2}\times4^2)=\frac{16\sqrt{2}}{3}$，B 正确. 连接 $HC$，因为 $A'H\perp HC$，$A'C=A'B=A'D=BC=4$，所以三棱锥 $A'-BCD$ 的表面积为 $16+2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=8(2+\sqrt{3})$，设三棱锥 $A'-BCD$ 内切球的半径为 $r$，则 $\frac{1}{3}r\times8(2+\sqrt{3})=\frac{16\sqrt{2}}{3}$，解得 $r=4\sqrt{2}-2\sqrt{6}$，C 错误. 五棱锥 $A'-MBCDN$ 的体积 $V(x)=\frac{\sqrt{2}}{6}x(16-\frac{1}{2}x^2)(0<x\leqslant4)$，则 $V'(x)=\frac{\sqrt{2}}{6}(16-\frac{3}{2}x^2)$，令 $V'(x)>0$，得 $0<x<\frac{4\sqrt{6}}{3}$；令 $V'(x)<0$，得 $\frac{4\sqrt{6}}{3}<x\leqslant4$. 所以 $V(x)_{\max}=V(\frac{4\sqrt{6}}{3})=\frac{128\sqrt{3}}{27}$，D 正确.




13. 10　根据抛物线的定义可得点 $A$ 到 $C$ 的焦点的距离 $d=5+\frac{p}{2}=10$，解得 $p=10$.

14. 1120　由 $2^n=256$，得 $n=8$. $(2x^{-2}-x^3)^8$ 的通项公式为 $T_{r+1}=C_8^r(2x^{-2})^{8-r}(-x^3)^r=C_8^r2^{8-r}(-1)^rx^{5r-16}$. 令 $5r-16=4$，得 $r=4$，所以展开式中含 $x^4$ 的项为 $T_5=C_8^42^4x^4=1120x^4$.

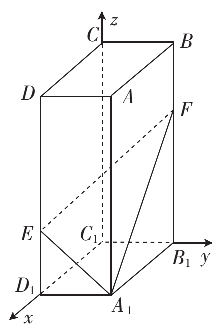
15. $-7$　因为 $f(x)$ 是奇函数，且 $f(x+1)$ 是偶函数，所以 $f(x+1)=f(-x+1)=-f(x-1)=$

$f(x-3)$，故 $f(x)$是 4 为周期的周期函数，则 $f(2023)+f(2024)=f(-1)+f(0)=-f(1)$
$=-7$.

16. $2\sqrt{3}$　$\tan 80^\circ-\tan 20^\circ=\tan(80^\circ-20^\circ)(1+\tan 80^\circ\tan 20^\circ)=\sqrt{3}\left(1+\dfrac{\sin 80^\circ\sin 20^\circ}{\cos 80^\circ\cos 20^\circ}\right)=$
$\sqrt{3}\left(1+\dfrac{\cos 10^\circ\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ\cos 20^\circ}\right)=\sqrt{3}\left(1+\dfrac{2\cos^2 10^\circ}{\cos 20^\circ}\right)=\sqrt{3}\left(1+\dfrac{1+\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}\right)=\sqrt{3}\left(2+\dfrac{1}{\cos 20^\circ}\right)$，
所以$\dfrac{\tan 80^\circ-\tan 20^\circ}{1+\dfrac{1}{2\cos 20^\circ}}=2\sqrt{3}$.

17. 解：(1)设$\{a_n\}$的公差为 $d$，则$\begin{cases}a_1+2d=13,\\a_1+12d=53,\end{cases}$ ………………………… 2 分
解得$\begin{cases}a_1=5,\\d=4,\end{cases}$ ………………………………………………… 4 分
所以 $a_n=4n+1$. ………………………………………………… 5 分
(2)(方法一)$S_n=2(a_1+a_2+\cdots+a_n)+\dfrac{-1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)}$ ………………………… 7 分
$=2\times\dfrac{(5+4n+1)n}{2}-\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$ ………………………………… 9 分
$=4n^2+6n-\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$. ………………………………………… 10 分
(方法二)当 $n$ 为偶数时，$S_n=2(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ ………………………… 6 分
$=2\times\dfrac{(5+4n+1)n}{2}=4n^2+6n$； ………………………………… 7 分
当 $n$ 为奇数时，$S_n=2(a_1+a_2+\cdots+a_n)-1$ ………………………… 8 分
$=4n^2+6n-1$. ………………………………………………… 9 分
综上，$S_n=\begin{cases}4n^2+6n-1, n\text{ 为奇数},\\4n^2+6n, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ ………………………… 10 分

18. 解：以 $C_1$ 为坐标原点，$C_1D_1$，$C_1B_1$，$C_1C$ 所在直线分别为 $x$，$y$，$z$ 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，……………………………… 1 分
则 $A_1(2,1,0)$，$E(2,0,1)$，$F(0,1,2)$，所以$\overrightarrow{A_1E}=(0,-1,1)$，$\overrightarrow{EF}=(-2,1,1)$. ……………………………………… 3 分




(1)证明：因为$\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{EF}=0$，所以 $EF\perp A_1E$. ………………… 5 分
(2)设平面 $A_1EF$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{A_1E}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$
即$\begin{cases}-y+z=0,\\-2x+y+z=0.\end{cases}$
不妨取 $z=1$，则 $\boldsymbol{m}=(1,1,1)$. ………………………………………… 7 分

易得 $C_1C\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\overrightarrow{C_1C}$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量，且 $\overrightarrow{C_1C}=(0,0,3)$. ······ 9 分

$\cos\langle \boldsymbol{m},\overrightarrow{C_1C}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{C_1C}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{C_1C}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ······ 11 分

故平面 $A_1EF$ 与平面 $ABCD$ 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ······ 12 分

19. 解：(1) 因为 $(a-c)\cos B=b(\cos A-\cos C)$，所以 $(\sin A-\sin C)\cos B=(\cos A-\cos C)\sin B$， ······ 1 分

则 $\sin A\cos B-\sin C\cos B=\cos A\sin B-\cos C\sin B$，则 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin C\cos B-\cos C\sin B$，则 $\sin(A-B)=\sin(C-B)$， ······ 2 分

所以 $A-B=C-B$，即 $A=C$ 或 $A-B+C-B=\pi$(舍去). ······ 3 分

由 $A=C$，得 $a=c$，因为 $c^2+3b^2=2a^2$，所以 $a^2=3b^2$，即 $a=\sqrt{3}b$， ······ 5 分

则 $\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{a}{b}=\sqrt{3}$. ······ 6 分

(2) 由 $c^2+3b^2=2a^2$，得 $b^2=\dfrac{2}{3}a^2-\dfrac{1}{3}c^2$，

则 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+c^2-\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{3}c^2}{2ac}=\dfrac{a}{6c}+\dfrac{2c}{3a}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{a}{6c}\cdot\dfrac{2c}{3a}}=\dfrac{2}{3}$， ······ 8 分

当且仅当 $a=2c=2$ 时，等号成立，$\cos B$ 取得最小值 $\dfrac{2}{3}$， ······ 9 分

此时 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$， ······ 10 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. ······ 12 分

20. 解：(1) 依题意可得 $\begin{cases}-a=-2,\\ \dfrac{\frac{7}{4}}{a^2}+\dfrac{\frac{27}{16}}{b^2}=1,\end{cases}$ ······ 2 分

解得 $a=2$，$b^2=3$， ······ 3 分

所以 $M$ 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ······ 4 分

(2) 联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x-1),\end{cases}$ 消去 $y$ 得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4(k^2-3)=0$， ······ 5 分

则 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4(k^2-3)}{3+4k^2}$. ······ 6 分

因为 $y=k(x-1)$ 经过定点 $(1,0)$，且点 $(1,0)$ 在 $M$ 的内部，所以 $\Delta>0$ 恒成立. ······ 7 分

由 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{8k^2}{4(k^2-3)}=-1$， ······ 8 分

解得 $k^2=1$. ………………………………………………………………………………………… 9 分

所以 $x_1+x_2=\frac{8}{7}, x_1x_2=-\frac{8}{7}$, ……………………………………………………………… 10 分

所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\times\sqrt{(\frac{8}{7})^2+4\times\frac{8}{7}}=\frac{24}{7}$. ………… 12 分

21. 解:(1)$X$ 的可能取值为 2,3,4, ………………………………………………………………… 1 分

则 $P(X=2)=(\frac{2}{5})^2=\frac{4}{25}, P(X=3)=2\times\frac{2}{5}\times(1-\frac{2}{5})=\frac{12}{25}, P(X=4)=(1-\frac{2}{5})^2=\frac{9}{25}$, …

………………………………………………………………………………………………………… 4 分

则 $X$ 的分布列为

| $X$ | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{4}{25}$ | $\frac{12}{25}$ | $\frac{9}{25}$ |

………………………………………………………………………………………………………… 5 分

故 $E(X)=2\times\frac{4}{25}+3\times\frac{12}{25}+4\times\frac{9}{25}=\frac{80}{25}=\frac{16}{5}$. ………………………………………… 6 分

(2)当 $n\geqslant3$ 时,得分累计 $n$ 分,即在得到 $n-1$ 分后再得 1 分,或在得到 $n-2$ 分后再得 2 分,

………………………………………………………………………………………………………… 7 分

所以 $P(n)=\frac{2}{5}P(n-1)+\frac{3}{5}P(n-2)$, ……………………………………………………………… 8 分

则 $P(n)-P(n-1)=-\frac{3}{5}[P(n-1)-P(n-2)]$. ………………………………………………………… 9 分

因为 $P_1=\frac{2}{5}, P_2=\frac{3}{5}+(\frac{2}{5})^2=\frac{19}{25}$,所以 $P_2-P_1=\frac{9}{25}$,

所以$\{P(n+1)-P(n)\}$为等比数列,且首项为$\frac{9}{25}$,公比为$-\frac{3}{5}$, ………………………… 10 分

则 $P(n+1)-P(n)=\frac{9}{25}(-\frac{3}{5})^{n-1}, P_n-P_1=P_2-P_1+P_3-P_2+\cdots+P_n-P_{n-1}=\frac{9}{25}\times[1+$

$(-\frac{3}{5})+\cdots+(-\frac{3}{5})^{n-2}]=\frac{9}{25}\times\frac{1-(-\frac{3}{5})^{n-1}}{1-(-\frac{3}{5})}$, ………………………………………………… 11 分

则 $P_n=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}(-\frac{3}{5})^n$,故当 $n\geqslant3$ 时,$P_n=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}(-\frac{3}{5})^n$. ……………………………… 12 分

22. (1)解:当 $a=0$ 时,$f'(x)=e^x-1$. ………………………………………………………… 1 分

当 $x>0$ 时,$f'(x)>0$;当 $x<0$ 时,$f'(x)<0$. ………………………………………………… 2 分

所以 $f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,0)$,单调递增区间为$(0,+\infty)$. ……………………… 3 分

所以 $f(x)$在 $x=0$ 处取得极小值,且极小值为$-1$,$f(x)$无极大值. ……………………… 4 分

(2)证明：$f'(x)=e^x-3ax^2-1$ 的导函数 $f''(x)=e^x-6ax$，$f''(x)$的导函数 $f'''(x)=e^x-6a$.
…………………………………………………………………………………………………… 5 分

当 $x\geqslant0$，且 $a\leqslant\frac{1}{6}$时，$f'''(x)=e^x-6a\geqslant0$，………………………………………………………… 6 分

所以 $f''(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，所以 $f''(x)\geqslant f''(0)=1$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立.
…………………………………………………………………………………………………… 7 分

令函数 $F(x)=[f'(x)+f'(x_2)](x-x_2)-2[f(x)-f(x_2)]$，

则 $F'(x)=f''(x)(x-x_2)-f'(x)+f'(x_2)$，$F''(x)=f'''(x)(x-x_2)$. ………………… 8 分

当 $x>x_2\geqslant0$ 时，$F''(x)>0$，所以 $F'(x)$在$(x_2,+\infty)$上单调递增，……………………… 9 分

则 $F'(x)>F'(x_2)=0$，所以 $F(x)$在$(x_2,+\infty)$上单调递增， ………………………… 10 分

则 $F(x)>F(x_2)=0$，即$[f'(x)+f'(x_2)](x-x_2)-2[f(x)-f(x_2)]>0$， ………… 11 分

因为 $x_1>x_2$，所以$[f'(x_1)+f'(x_2)](x_1-x_2)-2[f(x_1)-f(x_2)]>0$，

又 $x_1-x_2>0$，所以$\frac{f'(x_1)+f'(x_2)}{2}>\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$. ………………………………… 12 分