北京市朝阳区 2016～2017 学年度第一学期期末统一考试

高三年级数学试卷(理工类)　　2017. 1

(考试时间 120 分钟　　满分 150 分)

本试卷分为选择题(共 40 分)和非选择题(共 110 分)两部分

第一部分(选择题　共 40 分)

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x|2^x<1\}$,$B=\{x|x-2<0\}$,则 $(\complement_U A)\cap B=$

A. $\{x|x>2\}$　　B. $\{x|0\leqslant x<2\}$

C. $\{x|0<x\leqslant 2\}$　　D. $\{x|x\leqslant 2\}$

2. 在复平面内,复数 $\frac{2}{1+i}$ 对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 下列函数中,既是偶函数,又在区间 $[0,1]$ 上单调递增的是

A. $y=\cos x$　　B. $y=-x^2$　　C. $y=(\frac{1}{2})^{|x|}$　　D. $y=|\sin x|$

4. 若 $a>0$,且 $a\neq 1$,则"函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数"是"函数 $y=(2-a)x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数"的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 从 0,1,2,3,4 中任选两个不同的数字组成一个两位数,其中偶数的个数是

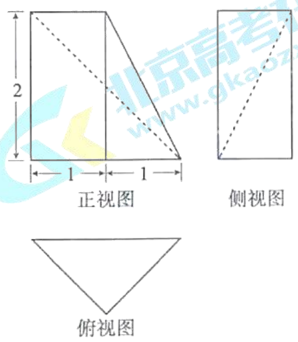
A. 6　　B. 8

C. 10　　D. 12

6. 某四棱锥的三视图如图所示,其俯视图为等腰直角三角形,则该四棱锥的体积为

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{4}{3}$

C. $\sqrt{2}$　　D. 4



(第 6 题图)

7. 在 Rt△ABC 中，$\angle A=90°$，点 D 是边 BC 上的动点，且 $|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{AC}|=4$，$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$ $(\lambda>0,\mu>0)$，则当 $\lambda\mu$ 取得最大值时，$|\overrightarrow{AD}|$ 的值为

A. $\frac{7}{2}$　　B. 3　　C. $\frac{5}{2}$　　D. $\frac{12}{5}$

8. 某校高三(1)班 32 名学生全部参加跳远和掷实心球两项体育测试．跳远和掷实心球两项测试成绩合格的人数分别为 26 人和 23 人，两项成绩都不合格的有 3 人，则两项成绩都合格的人数是

A. 23　　B. 20　　C. 21　　D. 19

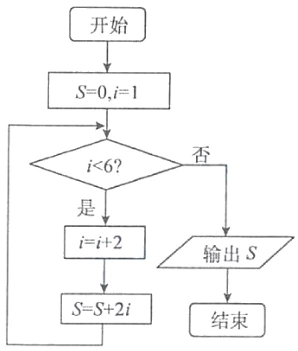
第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在答题卡上．

9. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ 的一条渐近线方程为 $3x+2y=0$，则 b 等于________．

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n．若 $a_1=2$，$S_2=a_3$，则 $a_2=$________，$S_{10}=$________．

11. 执行如图所示的程序框图，则输出 S 的结果为________．



（第 11 题图）

12. 在△ABC 中，已知 $\angle B=45°$，$AC=\sqrt{2}BC$，则 $\angle C=$________．

13. 设 D 为不等式组 $\begin{cases}x+y\geqslant 0,\\ x-y\leqslant 0,\\ x+3y\leqslant 3\end{cases}$ 表示的平面区域，对于区域 D 内除原点外的任一点 $A(x,y)$，则 $2x+y$ 的最大值是________；$\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的取值范围是________．

14. 若集合 M 满足：$\forall x,y\in M$，都有 $x+y\in M$，$xy\in M$，则称集合 M 是封闭的．显然，整数集 $\mathbf{Z}$，有理数集 $\mathbf{Q}$ 都是封闭的．对于封闭的集合 $M(M\subseteq\mathbf{R})$，$f:M\to M$ 是从集合 M 到集合 M 的一个函数，

①如果 $\forall x,y\in M$ 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，就称 f 是保加法的；

②如果 $\forall x,y\in M$ 都有 $f(xy)=f(x)\cdot f(y)$，就称 f 是保乘法的；

③如果 f 既是保加法的，又是保乘法的，就称 f 在 M 上是保运算的．

在上述定义下，集合 $\{\sqrt{3}m+n\mid m,n\in\mathbf{Q}\}$________封闭的（填"是"或"不是"）；若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上保运算，并且是不恒为零的函数，请写出满足条件的一个函数 $f(x)=$________．

三、解答题:本大题共 6 小题,共 80 分．解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程．

15.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期;

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$ 上的最大值和最小值.

16.（本小题满分 13 分）

甲、乙两位同学参加数学文化知识竞赛培训．现分别从他们在培训期间参加的若干次测试成绩中随机抽取 8 次,记录如下:

甲:82　81　79　78　95　88　93　84

乙:92　95　80　75　83　80　90　85

（Ⅰ）用茎叶图表示这两组数据;

（Ⅱ）现要从中选派一人参加正式比赛,从所抽取的两组数据分析,你认为选派哪位同学参加较为合适？并说明理由;

（Ⅲ）若对甲同学今后的 3 次测试成绩进行预测,记这 3 次成绩中高于 80 分的次数为 ξ（将甲的 8 次成绩中高于 80 分的频率视为概率）,求 ξ 的分布列及数学期望 $E\xi$.

17.（本小题满分 14 分）

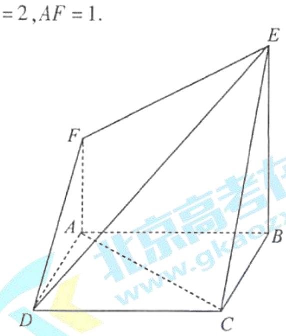
在如图所示的几何体中,四边形 $ABCD$ 为正方形,四边形 $ABEF$ 为直角梯形,其中 $AF\parallel BE$, $AB\perp BE$,平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABEF=AB$, $AB=BE=2$, $AF=1$.

（Ⅰ）求证: $AC\parallel$ 平面 DEF;

（Ⅱ）若二面角 $D-AB-E$ 为直二面角,

（ⅰ）求直线 AC 与平面 CDE 所成角的大小;

（ⅱ）棱 DE 上是否存在点 P,使得 $BP\perp$ 平面 DEF？若存在,求出 $\frac{DP}{DE}$ 的值;若不存在,请说明理由.



18.（本小题满分 13 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 上的动点 P 与其顶点 $A(-\sqrt{3},0)$, $B(\sqrt{3},0)$ 不重合.

（Ⅰ）求证:直线 PA 与直线 PB 的斜率乘积为定值;

（Ⅱ）设点 M,N 在椭圆 C 上,O 为坐标原点,当 $OM\parallel PA$, $ON\parallel PB$ 时,求 $\triangle OMN$ 的面积.

19.（本小题满分 14 分）

设函数 $f(x)=\ln(x-1)+ax^2+x+1$, $g(x)=(x-1)e^x+ax^2$, $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若函数 $g(x)$ 有两个零点，试求 a 的取值范围；

（Ⅲ）证明 $f(x)\leqslant g(x)$.

20.（本小题满分 13 分）

设 $m,n(3\leqslant m\leqslant n)$ 是正整数，数列 A_m：$a_1,a_2,\cdots,a_m$，其中 $a_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 是集合 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 中互不相同的元素．若数列 A_m 满足：只要存在 $i,j(1\leqslant i<j\leqslant m)$ 使 $a_i+a_j\leqslant n$，总存在 $k(1\leqslant k\leqslant m)$ 有 $a_i+a_j=a_k$，则称数列 A_m 是"好数列".

（Ⅰ）当 $m=6$, $n=100$ 时，

（ⅰ）若数列 A_6：$11,78,x,y,97,90$ 是一个"好数列"，试写出 x,y 的值，并判断数列：$11,78,90,x,97,y$ 是否是一个"好数列"？

（ⅱ）若数列 A_6：$11,78,a,b,c,d$ 是"好数列"，且 $a<b<c<d$，求 a,b,c,d 共有多少种不同的取值？

（Ⅱ）若数列 A_m 是"好数列"，且 m 是偶数，证明：$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}\geqslant\dfrac{n+1}{2}$.

北京市朝阳区 2016-2017 学年度第一学期高三年级期末统一考试

数学答案（理工类） 2017．1

一、选择题：（满分 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	D	A	C	B	C	B

二、填空题：（满分 30 分）

题号	9	10	11	12	13	14
答案	3	4，110	30	$105°$	$\frac{9}{4}$，$[-\sqrt{2},0]$	是，$f(x)=x,x\in\mathbf{Q}$

（注：两空的填空，第一空 3 分，第二空 2 分）

三、解答题：（满分 80 分）

15．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$

$$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$$

$$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6}).$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π． ……………………………………………………7 分

（Ⅱ）因为 $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{4}$，所以 $-\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{2\pi}{3}$.

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 2；

当 $2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$，即 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 -1．…………………………13 分

16．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）作出茎叶图如下：

甲		乙
9 8	7	5
8 4 2 1	8	0 0 3 5
5 3	9	0 2 5

……………………………………4 分

（Ⅱ）派甲参赛比较合适．理由如下：

$$\overline{x}_{甲}=\frac{1}{8}(70\times2+80\times4+90\times2+8+9+1+2+4+8+3+5)=85，$$

$\overline{x_乙}=\frac{1}{8}(70\times1+80\times4+90\times3+5+0+0+3+5+0+2+5)=85$，

$$s_甲^2=\frac{1}{8}\left[(78-85)^2+(79-85)^2+(81-85)^2+(82-85)^2+(84-85)^2+\right.$$

$$\left.(88-85)^2+(93-85)^2+(95-85)^2\right]=35.5，$$

$$s_乙^2=\frac{1}{8}\left[(75-85)^2+(80-85)^2+(80-85)^2+(83-85)^2+(85-85)^2+\right.$$

$$\left.(90-85)^2+(92-85)^2+(95-85)^2\right]=41.$$

因为 $\overline{x_甲}=\overline{x_乙}$，$s_甲^2<s_乙^2$，

所以，甲的成绩较稳定，派甲参赛比较合适．　　…………………………8 分

注：本小题的结论及理由均不唯一，如果考生能从统计学的角度分析，给出其他合理回答，同样给分．如

派乙参赛比较合适．理由如下：

从统计的角度看，甲获得 85 分以上（含 85 分）的频率为 $f_1=\frac{3}{8}$，

乙获得 85 分以上（含 85 分）的频率为 $f_2=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$．

因为 $f_2>f_1$，所以派乙参赛比较合适．

（III）记“甲同学在一次数学竞赛中成绩高于 80 分”为事件 A，

$P(A)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$．　……………………………………………………　9 分

随机变量 ξ 的可能取值为 0，1，2，3，且 $\xi\sim B(3,\frac{3}{4})$．

$\therefore P(\xi=k)=C_3^k\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{3-k}$，$k=0,1,2,3$．

所以变量 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

……………………………………………………11 分

$E\xi=0\times\frac{1}{64}+1\times\frac{9}{64}+2\times\frac{27}{64}+3\times\frac{27}{64}=\frac{9}{4}$．

（或 $E\xi=nP=3\times\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$.）　……………………………………………13 分

17. （本小题满分 14 分）

证明：（Ⅰ）连结 BD，设 $AC\bigcap BD=O$，

因为四边形 $ABCD$ 为正方形，

所以 O 为 BD 中点.

设 G 为 DE 的中点，连结 OG,FG，

则 $OG//BE$，且 $OG=\frac{1}{2}BE$.

由已知 $AF//BE$，且 $AF=\frac{1}{2}BE$，

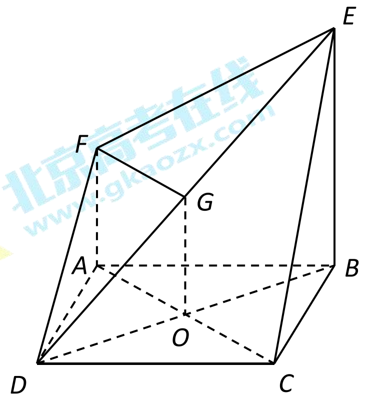
所以 $AF//OG,OG=AF$.

所以四边形 $AOGF$ 为平行四边形.

所以 $AO//FG$，即 $AC//FG$.

因为 $AC\not\subset$ 平面 DEF， $FG\subset$ 平面 DEF，

所以 $AC//$平面 DEF. ……………………………………………………5 分



（Ⅱ）由已知， $AF//BE,AB\perp BE$，

所以 $AF\perp AB$.

因为二面角 $D-AB-E$ 为直二面角，

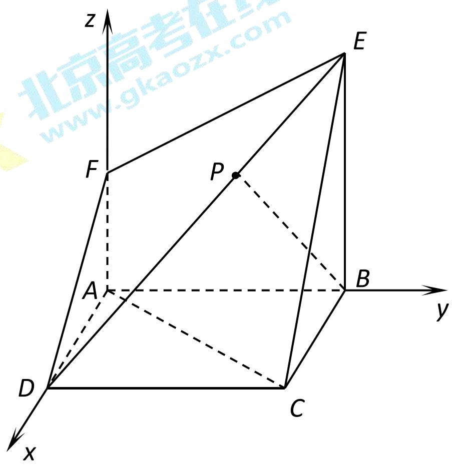
所以平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$.

所以 $AF\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $AF\perp AD,AF\perp AB$.

四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $AB\perp AD$.

所以 AD,AB,AF 两两垂直.



以 A 为原点， AD,AB,AF 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系（如图）.

因为 $AB=BE=2AF=2$，

所以 $A(0,0,0),B(0,2,0),C(2,2,0),D(2,0,0),E(0,2,2),F(0,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{AC}=(2,2,0),\overrightarrow{CD}=(0,-2,0),\overrightarrow{CE}=(-2,0,2)$.

（i）设平面 CDE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-2y=0,\\ -2x+2z=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y=0,\\ x-z=0.\end{cases}$

取 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$.

设直线 AC 与平面 CDE 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{AC},\boldsymbol{n}\rangle\right|=\left|\dfrac{2}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\right|=\dfrac{1}{2}$，

因为 $0\le\theta\le 90°$，所以 $\theta=30°$.

即直线 AC 与平面 CDE 所成角的大小为 $30°$. ……………………………………9 分

（ii）假设棱 DE 上存在点 P，使得 $BP\perp$ 平面 DEF .

设 $\dfrac{DP}{DE}=\lambda(0\le\lambda\le 1)$，则 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DE}$.

设 $P(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{DP}=(x-2,y,z)$，

因为 $\overrightarrow{DE}=(-2,2,2)$，所以 $(x-2,y,z)=\lambda(-2,2,2)$.

所以 $x-2=-2\lambda,y=2\lambda,z=2\lambda$，所以 P 点坐标为 $(2-2\lambda,2\lambda,2\lambda)$.

因为 $B(0,2,0)$，所以 $\overrightarrow{BP}=(2-2\lambda,2\lambda-2,2\lambda)$.

又 $\overrightarrow{DF}=(-2,0,1),\overrightarrow{EF}=(0,-2,-1)$，所以 $\begin{cases}\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DF}=-2(2-2\lambda)+2\lambda=0,\\ \overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{EF}=-2(2\lambda-2)-2\lambda=0.\end{cases}$

解得 $\lambda=\dfrac{2}{3}$.

因为 $\dfrac{2}{3}\in[0,1]$，所以 DE 上存在点 P，使得 $BP\perp$ 平面 DEF，且 $\dfrac{DP}{DE}=\dfrac{2}{3}$.

（另解）假设棱 DE 上存在点 P，使得 $BP\perp$ 平面 DEF .

设 $\dfrac{DP}{DE}=\lambda(0\le\lambda\le 1)$，则 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DE}$.

设 $P(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{DP}=(x-2,y,z)$，

因为 $\overrightarrow{DE}=(-2,2,2)$，所以 $(x-2,y,z)=\lambda(-2,2,2)$.

所以 $x-2=-2\lambda, y=2\lambda, z=2\lambda$，所以 P 点坐标为 $(2-2\lambda, 2\lambda, 2\lambda)$.

因为 $B(0,2,0)$，所以 $\overrightarrow{BP}=(2-2\lambda, 2\lambda-2, 2\lambda)$.

设平面 DEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_0, y_0, z_0)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DF}=0, \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}=0 \end{cases}$ 由 $\overrightarrow{DF}=(-2,0,1), \overrightarrow{EF}=(0,-2,-1)$，

得 $\begin{cases} -2x_0+z_0=0, \\ -2y_0-z_0=0. \end{cases}$

取 $x_0=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,-1,2)$.

由 $\overrightarrow{BP}=\mu\boldsymbol{m}$，即 $(2-2\lambda, 2\lambda-2, 2\lambda)=\mu(1,-1,2)$，

可得 $\begin{cases} 2-2\lambda=\mu, \\ 2\lambda-2=-\mu, \\ 2\lambda=2\mu. \end{cases}$ 解得 $\lambda=\dfrac{2}{3}$.

因为 $\dfrac{2}{3}\in[0,1]$，所以 DE 上存在点 P，使得 $BP\perp$ 平面 DEF，且 $\dfrac{DP}{DE}=\dfrac{2}{3}$.

……………………………………………………………14 分

18．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）设 $P(x_0, y_0)$，则 $\dfrac{{x_0}^2}{3}+\dfrac{{y_0}^2}{2}=1$.

所以直线 PA 与 PB 的斜率乘积为 $\dfrac{y_0}{x_0+\sqrt{3}}\times\dfrac{y_0}{x_0-\sqrt{3}}=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-3}=\dfrac{6-2x_0^2}{3(x_0^2-3)}=-\dfrac{2}{3}$. …4 分

（Ⅱ）依题直线 OM, ON 的斜率乘积为 $-\dfrac{2}{3}$.

①当直线 MN 的斜率不存在时，直线 OM, ON 的斜率为 $\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，设直线 OM 的方程

是 $y=\dfrac{\sqrt{6}}{3}x$，由 $\begin{cases} 2x^2+3y^2=6, \\ y=\dfrac{\sqrt{6}}{3}x, \end{cases}$ 得 $x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$， $y=\pm1$.

取 $M(\dfrac{\sqrt{6}}{2},1)$，则 $N(\dfrac{\sqrt{6}}{2},-1)$. 所以 ΔOMN 的面积为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

②当直线 MN 的斜率存在时,设直线 MN 的方程是 $y=kx+m$,

由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ 2x^2+3y^2-6=0 \end{cases}$ 得 $(3k^2+2)x^2+6kmx+3m^2-6=0$.

因为 M， N 在椭圆 C 上，

所以 $\Delta=36k^2m^2-4(3k^2+2)(3m^2-6)>0$，解得 $3k^2-m^2+2>0$.

设 $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=-\dfrac{6km}{3k^2+2}$， $x_1x_2=\dfrac{3m^2-6}{3k^2+2}$.

$$|MN|=\sqrt{(k^2+1)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{(k^2+1)[(\frac{-6km}{3k^2+2})^2-4\times\frac{3m^2-6}{3k^2+2}]}$$

$$=2\sqrt{\frac{6(k^2+1)(3k^2-m^2+2)}{(3k^2+2)^2}}.$$

设点 O 到直线 MN 的距离为 d，则 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$.

所以 ΔOMN 的面积为 $S_{\Delta OMN}=\dfrac{1}{2}\times d\times|MN|=\sqrt{\dfrac{6m^2(3k^2-m^2+2)}{(3k^2+2)^2}}$ ……①.

因为 $OM//PA$, $ON//PB$，直线 OM, ON 的斜率乘积为 $-\dfrac{2}{3}$，所以 $\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=-\dfrac{2}{3}$.

所以 $\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=\dfrac{(kx_1+m)(kx_2+m)}{x_1x_2}=\dfrac{k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2}=\dfrac{2m^2-6k^2}{3m^2-6}$.

由 $\dfrac{2m^2-6k^2}{3m^2-6}=-\dfrac{2}{3}$，得 $3k^2+2=2m^2$. ……②

由①②，得 $S_{\Delta OMN}=\sqrt{\dfrac{6m^2(3k^2-m^2+2)}{(3k^2+2)^2}}=\sqrt{\dfrac{6m^2(2m^2-m^2)}{4m^4}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

综上所述， $S_{\Delta OMN}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. ……………………………………13 分

19. （本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域是 $(1,+\infty)$， $f'(x)=\dfrac{x(2ax-2a+1)}{x-1}$.

当 $a=1$ 时， $f'(2)=4a+2=6$， $f(2)=4a+3=7$.

所以函数 $f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y-7=6(x-2)$.

即 $y=6x-5$. ……………………………………4 分

（Ⅱ）函数 $g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，由已知得 $g'(x)=x(\mathrm{e}^x+2a)$.

①当 $a=0$ 时，函数 $g(x)=(x-1)\mathrm{e}^x$ 只有一个零点；

②当 $a>0$，因为 $\mathrm{e}^x+2a>0$，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $g'(x)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $g'(x)>0$.

所以函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $g(0)=-1$， $g(1)=a$，

因为 $x<0$，所以 $x-1<0,\mathrm{e}^x<1$，所以 $\mathrm{e}^x(x-1)>x-1$，所以 $g(x)>ax^2+x-1$.

取 $x_0=\dfrac{-1-\sqrt{1+4a}}{2a}$，显然 $x_0<0$ 且 $g(x_0)>0$.

所以 $g(0)g(1)<0$， $g(x_0)g(0)<0$.

由零点存在性定理及函数的单调性知，函数有两个零点.

③当 $a<0$ 时，由 $g'(x)=x(\mathrm{e}^x+2a)=0$，得 $x=0$，或 $x=\ln(-2a)$.

i）当 $a<-\dfrac{1}{2}$，则 $\ln(-2a)>0$.

当 x 变化时， $g'(x),g(x)$ 变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\ln(-2a))$	$\ln(-2a)$	$(\ln(-2a),+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	-1	↘		↗

注意到 $g(0)=-1$，所以函数 $g(x)$ 至多有一个零点，不符合题意.

ii）当 $a=-\dfrac{1}{2}$，则 $\ln(-2a)=0$， $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，函数 $g(x)$ 至多有一个零点，

不符合题意.

若 $a>-\frac{1}{2}$，则 $\ln(-2a)\le 0$.

当 x 变化时，$g'(x),g(x)$ 变化情况如下表：

x	$(-\infty,\ln(-2a))$	$\ln(-2a)$	$(\ln(-2a),0)$	0	$(0,+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗		↘	-1	↗

注意到当 $x<0,a<0$ 时，$g(x)=(x-1)e^x+ax^2<0$，$g(0)=-1$，所以函数 $g(x)$ 至多有一个零点，不符合题意.

综上，a 的取值范围是 $(0,+\infty)$.　　……………………………………………9 分

（III）证明：$g(x)-f(x)=(x-1)e^x-\ln(x-1)-x-1$.

设 $h(x)=(x-1)e^x-\ln(x-1)-x-1$，其定义域为 $(1,+\infty)$，则证明 $h(x)\ge 0$ 即可.

因为 $h'(x)=xe^x-\frac{x}{x-1}=x(e^x-\frac{1}{x-1})$，取 $x_1=1+e^{-3}$，则 $h'(x_1)=x_1(e^{x_1}-e^3)<0$，且 $h'(2)>0$.

又因为 $h''(x)=(x+1)e^x+\frac{1}{(x-1)^2}>0$，所以函数 $h'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单增.

所以 $h'(x)=0$ 有唯一的实根 $x_0\in(1,2)$，且 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0-1}$.

当 $1<x<x_0$ 时，$h'(x)<0$；当 $x>x_0$ 时，$h'(x)>0$.

所以函数 $h(x)$ 的最小值为 $h(x_0)$.

所以 $h(x)\ge h(x_0)=(x_0-1)e^{x_0}-\ln(x_0-1)-x_0-1$

$=1+x_0-x_0-1=0$.

所以 $f(x)\le g(x)$.　　……………………………………………………14 分

20．（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）（ⅰ） $x=89, y=100$，或 $x=100, y=89$；

数列：$11,78,90,x,97,y$ 也是一个“好数列”． ……………………………………3 分

（ⅱ）由（ⅰ）可知，数列必含 $89,100$ 两项，

若剩下两项从 $90,91,\cdots,99$ 中任取，则都符合条件，有 $C_{10}^2=45$ 种；

若剩下两项从 $79,80,\cdots,88$ 中任取一个，则另一项必对应 $90,91,\cdots,99$ 中的一个，有 10 种；

若取 $68\le a\le 77$，则 $79\le 11+a\le 88$，$90\le 22+a\le 99$，“好数列”必超过 6 项，不符合；

若取 $a=67$，则 $11+a=78\in A_6$，另一项可从 $90,91,\cdots,99$ 中任取一个，有 10 种；

若取 $56<a<67$，则 $67<11+a<78$，$78<22+a<89$，“好数列”必超过 6 项，不符合；

若取 $a=56$，则 $b=67$，符合条件，

若取 $a<56$，则易知“好数列”必超过 6 项，不符合；

综上，a,b,c,d 共有 66 种不同的取值． ……………………………………7 分

（Ⅱ）证明：由（Ⅰ）易知，一个“好数列”各项任意排列后，还是一个“好数列”．

又“好数列” $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 各项互不相同，所以，不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_m$．

把数列配对：$a_1+a_m, a_2+a_{m-1},\cdots,a_{\frac{m}{2}}+a_{\frac{m}{2}+1}$，

只要证明每一对和数都不小于 $n+1$ 即可．

用反证法，假设存在 $1\le j\le \dfrac{m}{2}$，使 $a_j+a_{m+1-j}\le n$，

因为数列单调递增，所以 $a_{m-j+1}<a_1+a_{m-j+1}<a_2+a_{m-j+1}<\cdots<a_j+a_{m-j+1}\le n$，

又因为“好数列”，故存在 $1\le k\le m$，使得 $a_i+a_{m+1-j}=a_k(1\le i\le j)$，

显然 $a_k>a_{m+1-j}$，故 $k>m+1-j$，所以 a_k 只有 $j-1$ 个不同取值，而 a_i+a_{m+1-j} 有 j 个不同取值，矛盾．

所以，$a_1+a_m, a_2+a_{m-1},\cdots,a_{\frac{m}{2}}+a_{\frac{m}{2}+1}$ 每一对和数都不小于 $n+1$，

故 $a_1+a_2+\cdots+a_m\ge \dfrac{m}{2}(n+1)$，即 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}\ge \dfrac{n+1}{2}$． …………………13 分