

2024 届高三级 11 月四校联考 数学 试题

佛山市第一中学、广州市第六中学
汕头市金山中学、中山市第一中学

试卷总分：150 分 考试时间：120 分钟

注意事项：

- 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。本次考试采用特殊编排考号，请考生正确填涂。
- 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

第一部分 选择题（共 60 分）

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40 分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 已知集合 $A = \{x | \lg x \leq 0\}$ ， $B = \{x | |x-1| \leq 1\}$ ，则 $A \cap B =$ ()

- A. A B. B C. $C_R A$ D. $C_R B$

2. 已知向量 $a = (-3, m)$ ， $b = (1, -2)$ ，若 $b \parallel (a - b)$ ，则 m 的值为 ()

- A. -6 B. -4 C. 0 D. 6

3. 若函数 $f(x) = \begin{cases} a^{x-3}, & x \geq 4 \\ -ax + 4, & x < 4 \end{cases}$ ($a > 0, a \neq 1$) 是 R 上的单调函数，则 a 的取值范围为 ()

- A. $(0, 1) \cup (1, \frac{5}{4}]$ B. $(1, \frac{5}{4}]$ C. $(0, \frac{4}{5}]$ D. $[\frac{4}{5}, 1)$

4. 若复数 z 满足 $(1+i)z = |1+i|$ ，则 \bar{z} 的虚部为 ()

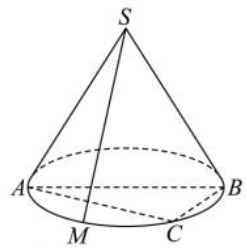
- A. $-\sqrt{2}i$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}i$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2019$ ，且对 $\forall n \in N^*$ 恒有 $a_{n+3} = a_n + 2^n$ ，则 $a_7 =$ ()

- A. 2037 B. 2035 C. 2023 D. 2021

6. 如图，已知圆锥的顶点为 S ， AB 为底面圆的直径，点 M, C 为底面圆周上的点，并将弧 AB 三等分，过 AC 作平面 α ，使 $SB \parallel \alpha$ ，设 α 与 SM 交于点 N ，则 $\frac{SM}{SN}$ 的值为 ()

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$



7. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 R ，且 $f(x)$ 为偶函数， $f(\frac{\pi}{6}) = -2$ ，

且 $3f(x)\cos x + f'(x)\sin x > 0$ ，则不等式 $f(x + \frac{\pi}{2})\cos^3 x - \frac{1}{4} > 0$ 的解集为 ()

- A. $(-\frac{\pi}{3}, +\infty)$ B. $(\frac{\pi}{3}, +\infty)$ C. $(-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ D. $(-\frac{2\pi}{3}, +\infty)$

8. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{1}{2}\sin \omega x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\omega > 0$), 若 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 上无零点, 则 ω 的取值范围是 ()

- A. $(0, \frac{2}{9}] \cup [\frac{8}{9}, +\infty)$ B. $(0, \frac{2}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ C. $(0, \frac{2}{9}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{8}{9}]$ D. $(\frac{2}{9}, \frac{8}{9}] \cup [1, +\infty)$

二、多选题 (本大题共 4 小题, 共 20 分。每小题有多项符合题目要求)

9. 若 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则下列说法正确的是 ()

- A. 若 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则 $q > 1$
 B. 若 $a_1 > 0, 0 < q < 1$, 则 $\{a_n\}$ 是递减数列
 C. 若 $q > 0$, 则 $S_4 + S_6 > 2S_5$
 D. 若 $b_n = \frac{1}{a_n}$, 则 $\{b_n\}$ 是等比数列

10. 已知 $\mathbf{a} = (1, \sqrt{2})$, 若 $|\mathbf{b}| = 1$, 且 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\pi}{6}$, 则 ()

- A. $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{b}|$ B. \mathbf{b} 在 \mathbf{a} 上的投影向量的坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6})$
 C. $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$ D. $\mathbf{b} \perp (2\mathbf{a} - 3\mathbf{b})$

11. 定义 $\max\{a, b\}$ 为 a, b 中较大的数, 已知函数 $f(x) = \max\{\sin x, \cos x\}$, 给出下列结论, 其中正确的是 ()

- A. $f(x)$ 的值域为 $[-1, 1]$
 B. $f(x)$ 是周期函数
 C. $f(x)$ 图象既有对称轴又有对称中心
 D. 不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $\{x | -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < 2k\pi + \pi (k \in \mathbb{Z})\}$

12. 定义在 $(-1, 1)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) - f(y) = f(\frac{x-y}{1-xy})$, 且当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f(x) < 0$, 则下列结论正确的有 ()

- A. $f(x)$ 是奇函数 B. $f(x)$ 是增函数 C. $f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{4}) = f(\frac{2}{3})$ D. $f(\frac{1}{3}) + f(\frac{1}{4}) < f(\frac{1}{2})$

第二部分非选择题 (90 分)

三、填空题 (本大题共 4 小题, 共 20 分)

13. 已知 $y = f(x) - x^2$ 为奇函数, 且 $f(1) = 3$, 则 $f(-1) =$ _____.

14. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $S_n = n^2 - \cos \frac{n}{3}\pi$, 则 $a_6 =$ _____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D , 且 $BD = 1$, 则 $4a + 3c$ 的最小值为_____.

16. 设 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & 0 < x \leq 2 \\ f(4-x), & 2 < x < 4 \end{cases}$, 若方程 $f(x) = m$ 恰有三个不相等的实根, 则这三个根之和为_____ ; 若方程 $f(x) = m$ 恰有四个不相等的实根, 且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则 $(x_1 + x_2)^2 + x_3^2 + x_4^2$ 的取值范围为_____ .

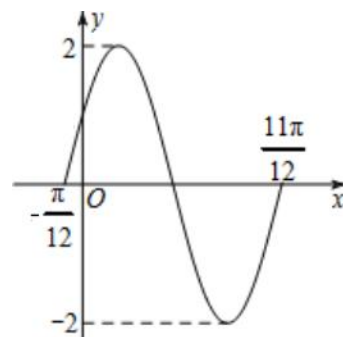
四、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (本小题 10 分)

若 $y = f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示。

(1) 求函数 $y = f(x)$ 的解析式;

(2) 将 $y = f(x)$ 图象上所有点向左平行移动 θ ($\theta > 0$) 个单位长度, 得到 $y = g(x)$ 的图象; 若 $y = g(x)$ 图象的一个对称中心为 $(\frac{5\pi}{6}, 0)$, 求 θ 的最小值。



18. (本小题 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是公差非零的等差数列, $a_1 = 2$, 且 a_1, a_3, a_9 成等比数列。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

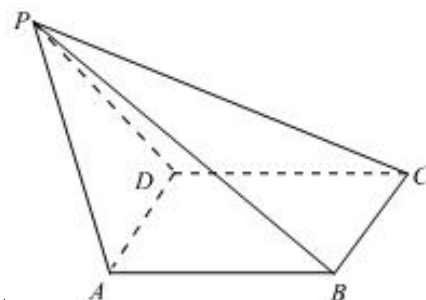
(2) 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = \frac{1}{2}, \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n-1}} = a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

19. (本小题 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, 侧面 PAD 为等边三角形。

(1) 求证: $AD \perp PB$;

(2) 若 $P-AD-B$ 的大小为 120° , 求二面角 $A-PB-C$ 的正弦值。



20.(本小题 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} \ln x - ax (a > 0)$. (e 为自然对数的底数)

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $x = e$ 处的切线平行于 x 轴, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

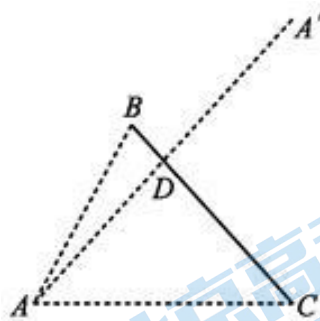
(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{e}, e)$ 上有且仅有两个零点, 求实数 a 的取值范围.

21.(本小题 12 分)

某单位为端正工作人员仪容, 在单位设置一面平面镜. 如图, 平面镜宽 BC 为 $2m$, 某人在 A 点处观察到自己在平面镜中所成的像为 A' , 且仅当线段 AA' 与线段 BC 交于点 D (异于 B, C) 时, 此人能在镜中看到自己的像. 已知 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$.

(1) 若在 A 点处能在镜中看到自己的像, 求 $\frac{AC}{AB}$ 的取值范围;

(2) 求某人在 A 处与其在平面镜中的像的距离 AA' 的最大值.



22.(本小题 12 分)

设函数 $f(x) = ax^2 + \cos x - 1$, $a \in R$,

(1) 当 $a = \frac{1}{\pi}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值;

(2) 当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, 证明: $f(x) \geq 0$;

(3) 证明: $\cos \frac{1}{2} + \cos \frac{1}{3} + \dots + \cos \frac{1}{n} > n - \frac{4}{3}$ ($n \in N, n > 1$)