

高三数学参考答案

1.B $B = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty), A \cap B = \{-1\}$.

2.D $(3 + 2i)(2 - 2i) = 6 - 6i + 4i - 4i^2 = 10 - 2i$.

3.C 令 $2^x = 3$, 可得 $x = \log_2 3$, 则 $f(3) = \log_2 3$.

4.D 2019 年的居民消费水平比 2020 年的居民消费水平高, A 错误.2019 年的城镇居民消费水平比 2020 年的城镇居民消费水平高, B 错误.2018 年至 2022 年我国居民消费水平数据从小到大排序为

25245, 27439, 27504, 31013, 31718, $5 \times 60\% = 3$, 2018 年至 2022 年我国居民消费水平数据的 60% 分位数为

$$\frac{27504 + 31013}{2} = 29258.5 \text{ 元, C 错误.设我国农村人口数为 } x, \text{ 城镇人口数为 } y, \text{ 则}$$

$$31718 = \frac{19530x + 38289y}{x + y}, \text{ 化简得 } \frac{y}{x} = \frac{12188}{6571} > \frac{3}{2}, \text{ 所以 2022 年我国城镇人口数比农村人口数的 1.5 倍}$$

还要多, D 正确.

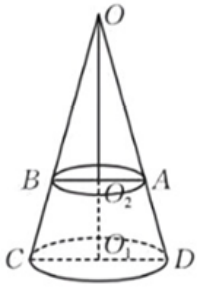
5.C 因为 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\alpha$, 所以 $\sqrt{2}\sin\alpha = \sin\alpha$, 则 $\sin\alpha = 0$, 即 $\alpha = k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

$$\text{所以 } \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(k\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

6.B 延长 CB, DA 交于点 O , 设圆台上、下底面的圆心分别为 O_2, O_1 . 连接 OO_1 ,

$$\text{设 } OB = x, O_2B = r, O_1C = R. \text{ 因为 } \triangle OO_2B \sim \triangle OO_1C, \text{ 所以 } \frac{r}{R} = \frac{OB}{OC},$$

$$\text{则 } x = 20\text{cm}. \text{ 设所求圆心角为 } \theta, \text{ 则 } x\theta = 2\pi r, \text{ 所以 } \theta = \frac{2\pi r}{x} = \frac{\pi}{2}.$$



7.A 圆 $M: x^2 - 6x + y^2 - 6y + 16 = 0$, 即圆 $M: (x-3)^2 + (y-3)^2 = 2$, 圆心 $M(3,3)$ 到直线 l 的距离为 d , AB 的中点为 C . 因为 $|OA| = |AB|$, 所以 $|OC| = 3|AC|$. 因为 $|OM| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$, 所以 $|OC| = \sqrt{|OM|^2 - d^2} = \sqrt{18 - d^2}$. 又因为 $|AC| = \sqrt{2 - d^2}$, 所以 $\sqrt{18 - d^2} = 3\sqrt{2 - d^2}$, 解得 $d = 0$, 所以直线 l 经过圆心 $M(3,3)$, 所以 $k = \frac{3-0}{3-0} = 1$.

8.C 令 $t = \omega x + \varphi$, 由题意可得 $\sin t = 0$ 在 $\left(\varphi, \frac{\pi\omega}{2} + \varphi\right)$ 上有解.

因为 $\sin t = 0$ 在 $[a, b]$ 内有解的最短区间长度为 $b - a = \pi$. 所以 $\frac{\pi\omega}{2} + \varphi - \varphi > \pi$, 解得 $\omega > 2$.

9.AC $|OB| = c = |OF_1| = |OF_2|$, 点 B 在以 O 为圆心, $|OF_1|$ 为半径的圆上, 所以 $BF_1 \perp BF_2$, A 正确. 直线 BF_2 的斜率为 $-\frac{b}{c-a}$, 直线 AO 的斜率为 $-\frac{b}{a}$, $-\frac{b}{c-a}$ 与 $-\frac{b}{a}$ 不一定相等, 所以直线 BF_2 与直线 AO 不一定

平行, B 错误. $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot b = ab = 2$, 双曲线 C 的焦距为 $2c = 2\sqrt{a^2 + b^2} \dots 2\sqrt{2ab} = 2\sqrt{4} = 4$,

当且仅当 $a = b = \sqrt{2}$ 时, 等号成立, 所以双曲线 C 的焦距的最小值为 4, C 正确, D 错误.

10.ACD 设等差数列 $2, 5, 8, 11, 14, \dots$ 的通项公式为 $b_n = 3n - 1$. 数阵中前 7 行共 $1 + 2 + 3 + \dots + 7 = 28$ 个数,

数阵中前 7 行所有数的和为 $2 \times 28 + \frac{28 \times 27 \times 3}{2} = 1190$, A 正确.

令 $b_n = 3n - 1 = 101$, 解得 $n = 34$, 前 7 行共 28 个数, 第 8 行有 8 个数, 所以 101 是数阵中第 8 行从左至右的第 6 个数, B 错误. 记每一行的第 1 个数组成数列 $\{a_n\}$, 则

$a_1 = 2, a_2 - a_1 = 3, a_3 - a_2 = 6 = 3 \times 2, a_4 - a_3 = 9 = 3 \times 3, \dots, a_n - a_{n-1} = 3 \times (n-1)$, 累加得

$a_n - a_1 = 3 \times (1 + 2 + 3 + \dots + n - 1) = \frac{3n(n-1)}{2}$, 所以 $a_n = \frac{3n^2 - 3n + 4}{2}$, $a_{10} = 137$, C 正确. 数阵中第 10 行

从左至右的第 4 个数是 $137 + (4-1) \times 3 = 146$, D 正确.

11. ACD 令 $x = y = 0$, 可得 $f(0) = 0$.

令 $x = y = 1$, 可得 $[f(1)]^2 = f(1)$. 因为当 $x > 0$ 时, $f(x) \neq 0$, 所以 $f(1) = 1$.

令 $x = y$, 可得 $[f(x)]^2 = f(x^2) \dots 0$.

因为 $x^2 \dots 0$, 所以当 $x \dots 0$ 时, $f(x) \dots 0$.

又因为当 $x > 0$ 时, $f(x) \neq 0$, 所以当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$.

令 $y = 1$, 可得 $f(x)[f(x) - f(x-1)] = f(x)$, ①

所以 $f(x) - f(x-1) = 1$, $f(x+1) - f(x) = 1$, 两式相加可得 $f(x+1) - f(x-1) = 2$.

令 $y = -1$, 可得 $f(x)[f(x) - f(x+1)] = f(-x)$. ②

①-②可得 $f(x)[f(x+1) - f(x-1)] = f(x) - f(-x)$, 化简可得 $f(x) = -f(-x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数, C 正确.

由 $f(x) - f(x-1) = 1$, 可得

$f(2) = f(1) + 1 = 2$, $f(3) = f(2) + 1 = 3$, $f(4) = f(3) + 1 = 4, \dots, f(10) = 10$, B 错误.

由 $\begin{cases} f(x+1) - f(x) = 1, \\ f(x) = -f(-x), \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1, \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(-\frac{1}{2}\right), \end{cases}$ 解得 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, A 正确.

令 $x = x_1, y = x_1 - x_2$, 可得 $f(x_1) - f(x_2) = \frac{f(x_1(x_1 - x_2))}{f(x_1)}$.

令 $0 < x_2 < x_1$, 则 $x_1 - x_2 > 0, x_1(x_1 - x_2) > 0$.

因为当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, 所以 $f(x_1) > 0, f(x_1(x_1 - x_2)) > 0$,

所以 $f(x_1) - f(x_2) = \frac{f(x_1(x_1 - x_2))}{f(x_1)} > 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, D 正确.

$$12.4 \quad |PF| = \frac{p}{4} + \frac{p}{2} = 3, \text{ 解得 } p = 4.$$

13. $\frac{12}{25}; \frac{81}{125}$ (本题第一空 2 分, 第二空 3 分) 到第 3 局才分出胜负, 则前两局甲、乙各赢一局, 其概率

$$\text{为 } C_2^1 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}.$$

若甲获胜, 分 2 种情况:

$$\textcircled{1} \text{ 甲连赢 2 局, 其概率为 } \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25},$$

$$\textcircled{2} \text{ 前两局甲、乙各赢一局, 第三局甲赢, 其概率为 } C_2^1 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{36}{125}.$$

$$\text{故甲获胜的概率为 } \frac{9}{25} + \frac{36}{125} = \frac{81}{125}.$$

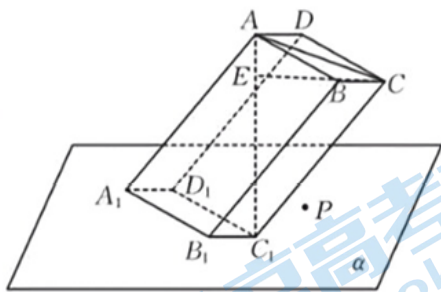
14. $\sqrt{51}$ 过点 C 作 $CE \perp AC_1$, 垂足为 E , 连接 AC . 易得 $CE \parallel$ 平面 α ,

所以点 C 到平面 α 的距离为 C_1E . $AC = 3\sqrt{2}, AC_1 =$

$$\sqrt{AC^2 + CC_1^2} = 3\sqrt{6}, CE = \frac{AC \cdot CC_1}{AC_1} = 2\sqrt{3}, C_1E =$$

$\sqrt{CC_1^2 - CE^2} = 2\sqrt{6}$. 过点 C 作 $CC' \perp$ 平面 α , 垂足为 C' (图略). 当 C', C_1, P 三点共线, 且

$$C'P = C'C_1 + C_1P \text{ 时, } PC \text{ 取得最大值, 最大值为 } \sqrt{C_1E^2 + (C'C_1 + C_1P)^2} = \sqrt{C_1E^2 + (CE + C_1P)^2} = \sqrt{51}.$$



$$15. \text{解: (1) 设 } \{a_n\} \text{ 的公比为 } q, \text{ 则 } \begin{cases} a_1 + a_1q = 6, \\ a_1 \cdot a_1q^2 = a_1q^3, \end{cases}$$

解得 $a_1 = q = 2$ 或 $q = -3$ (舍去).

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^n$.

(2) 因为 $\{a_n\}$ 是递增数列, 所以 $M_n = 2^n, m_n = 2$,

$$b_n = \frac{M_n + m_n}{2} = \frac{2^n + 2}{2} = 2^{n-1} + 1.$$

$$S_n = \frac{1-2^n}{1-2} - n = 2^n + n - 1.$$

16. 解: (1) 数字 2 填在第 2 个空格中的概率为 $\frac{C_{97}^1}{C_{99}^3} = \frac{1}{1617}$.

(2) 由题意可得 $2, x, 98$, 且 $x \in \mathbf{N}_+$.

$$P(x) = \frac{C_{x-1}^1 C_{99-x}^1}{C_{99}^3} = \frac{(x-1)(99-x)}{C_{99}^3}.$$

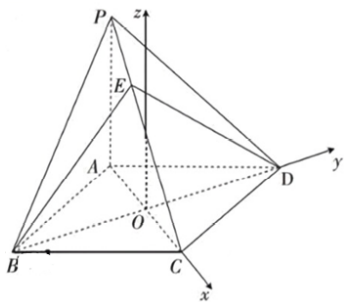
当 $x = 50$ 时, $P(x)$ 取得最大值, 最大值为 $\frac{49^2}{C_{99}^3} = \frac{49}{3201}$.

17. (1) 证明: 记 $AC \cap BD = O$.

因为四边形 $ABCD$ 是菱形, 所以 $BD \perp AC$.

因为 $BD \perp PC, PC \subset$ 平面 $PAC, AC \subset$ 平面 PAC 且 $AC \cap PC = C$,

所以 $BD \perp$ 平面 PAC .



因为 $PA \subset$ 平面 PAC , 所以 $BD \perp PA$.

因为 $PA \perp AC, AC \subset$ 平面 $ABCD, BD \subset$ 平面 $ABCD$, 且

$AC \cap BD = O$, 所以 $PA \perp$ 平面 $ABCD$.

(2) 解: 以 O 为坐标原点, 分别以 $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ 的方向为 x, y 轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系.

设 $AB = 4$, 则 $B(0, -2\sqrt{3}, 0), D(0, 2\sqrt{3}, 0), E(-1, 0, 3), \overrightarrow{BE} = (-1, 2\sqrt{3}, 3), \overrightarrow{BD} = (0, 4\sqrt{3}, 0)$.

设平面 BDE 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overline{BD} = 4\sqrt{3}y = 0, \\ \vec{m} \cdot \overline{BE} = -x + 2\sqrt{3}y + 3z = 0, \end{cases} \text{令 } x=3, \text{ 得 } \vec{m} = (3, 0, 1).$$

平面 ABD 的一个法向量为 $\vec{n} = (0, 0, 1)$.

$$|\cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

易得二面角 $A-BD-E$ 为锐角, 故二面角 $A-BD-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

18. (1) 解: 由题意得椭圆 C 的半焦距 $c=1$, 且 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 所以 $a=2$.

又因为 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$, 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 证明: 当直线 l 的斜率为 0 时, 直线 l 的方程为 $x=0$

此时 AB 为椭圆 C 的长轴, 以弦 AB 为直径的圆的方程为 $x^2 + y^2 = 4$, 该圆的半径为 2.

圆 $(x - \frac{3}{4})^2 + y^2 = \frac{25}{16}$ 的半径为 $\frac{5}{4}$, 两圆的圆心距为 $2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$.

满足圆 $(x - \frac{3}{4})^2 + y^2 = \frac{25}{16}$ 恒与以弦 AB 为直径的圆相切.

当直线 l 的斜率不为 0 时, 设直线 l 的方程为 $x = ty + 1$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, AB 的中点为 $M(x_0, y_0)$.

$$\text{联立} \begin{cases} x = ty + 1, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{得 } (3t^2 + 4)y^2 + 6ty - 9 = 0,$$

$$\text{所以 } y_1 + y_2 = -\frac{6t}{3t^2 + 4}, y_1 y_2 = -\frac{9}{3t^2 + 4},$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{3t}{3t^2 + 4}, x_0 = ty_0 + 1 = \frac{4}{3t^2 + 4}.$$

$$|AB| = \sqrt{1+t^2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{12(t^2 + 1)}{3t^2 + 4}.$$

记圆 $(x - \frac{3}{4})^2 + y^2 = \frac{25}{16}$ 的圆心为 $N(\frac{3}{4}, 0)$,

$$|MN| = \sqrt{\left(\frac{4}{3t^2+4} - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3t}{3t^2+4}\right)^2} = \frac{9t^2+4}{4(3t^2+4)}.$$

$$\frac{1}{2}|AB| - |MN| = \frac{6(t^2+1)}{3t^2+4} - \frac{9t^2+4}{4(3t^2+4)} = \frac{5(3t^2+4)}{4(3t^2+4)} = \frac{5}{4}.$$

满足圆 $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{16}$ 恒与以弦 AB 为直径的圆相切.

综上, 圆 $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{16}$ 恒与以弦 AB 为直径的圆相切.

19.解: (1) $f(a) = \sqrt{a}, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-a}}, f'(a) = \frac{1}{\sqrt{a}}.$

曲线 $y = f(x)$ 在点 $(a, f(a))$ 处的切线方程为 $y - \sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}(x - a).$

因为该切线过点 $(4, 2)$, 所以 $2 - \sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}(4 - a)$, 解得 $a = 4.$

(2) 因为 $f(x) = \sqrt{2x-a}, ae^{x-1}$, 所以 $a > 0$, 且 $x > \frac{a}{2}.$

两边平方可得 $a^2 e^{2x-2} \dots 2x - a.$

令函数 $g(x) = a^2 e^{2x-2} - 2x + a \left(x > \frac{a}{2}\right), g'(x) = 2(a^2 e^{2x-2} - 1).$

令函数 $h(x) = a^2 e^{2x-2} - 1, h'(x) = 2a^2 e^{2x-2} > 0$, 所以 $h(x)$ 是增函数.

令 $g'(x) = 2(a^2 e^{2x-2} - 1) = 0$, 得 $x = 1 - \ln a.$

下面比较 $1 - \ln a$ 与 $\frac{a}{2}$ 的大小.

令函数 $u(a) = 1 - \ln a - \frac{a}{2}, u'(a) = -\frac{a+2}{2a} < 0, u(a)$ 是减函数.

因为 $u(1) = \frac{1}{2} > 0, u(2) = -\ln 2 < 0$, 所以存在 $a_0 \in (1, 2)$, 使得当 $a \in (0, a_0)$ 时, $u(a) > 0$,

即 $1 - \ln a > \frac{a}{2}$. 当 $a \in [a_0, +\infty)$ 时, $u(a) \leq 0$, 即 $1 - \ln a \leq \frac{a}{2}.$

当 $a \in (0, a_0)$ 时,

当 $x \in \left(\frac{a}{2}, 1 - \ln a\right)$ 时, $h(x) < 0$, 即 $g'(x) < 0$;

当 $x \in (1 - \ln a, +\infty)$ 时, $h(x) > 0$, 即 $g'(x) > 0$.

所以 $g(x)$ 在 $\left(\frac{a}{2}, 1 - \ln a\right)$ 上单调递减, 在 $(1 - \ln a, +\infty)$ 上单调递增.

$$g(x)_{\min} = g(1 - \ln a) = a^2 e^{-2 \ln a} - 2(1 - \ln a) + a = 2 \ln a + a - 1.$$

令函数 $v(a) = 2 \ln a + a - 1$, $v'(a) = \frac{2}{a} + 1 > 0$, 所以 $v(a)$ 是增函数.

由题意可得 $g(x)_{\min} = 2 \ln a + a - 1 \leq 0$, 又因为 $v(1) = 0$, 所以 $1, a < a_0$.

当 $a \in [a_0, +\infty)$ 时, $g(x)_{\min} = g\left(\frac{a}{2}\right) > 0$, 符合题意.

综上, a 的取值范围为 $[1, +\infty)$.