

北京市八一学校 2020 届高三数学摸底测试

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分,在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

01.已知集合 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{0, 3, 6, 9, 12\}$, 则 $A \cap C_{\mathbb{N}}B =$ 【 】

- | | |
|----------------|----------------|
| A. $\{1,5,7\}$ | B. $\{3,5,7\}$ |
| C. $\{1,3,9\}$ | D. $\{1,2,3\}$ |

02.若 a 为实数,且 $(2+ai)(a-2i)=-4i$, 则 $a=$ 【 】

- | | |
|-------|------|
| A. -1 | B. 0 |
| C. 1 | D. 2 |

03.下列函数中,既是奇函数又是增函数的为 【 】

- | | |
|--------------------|-------------|
| A. $y=x+1$ | B. $y=-x^2$ |
| C. $y=\frac{1}{x}$ | D. $y=x x $ |

04.已知正项数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1, a_2=2, 2a_n^2=a_{n+1}^2+a_{n-1}^2 (n \geq 2)$, 则 a_6 等于 【 】

- | | |
|----------------|------|
| A. 16 | B. 8 |
| C. $2\sqrt{2}$ | D. 4 |

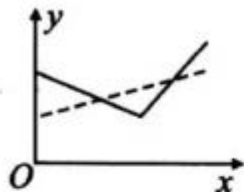
05.已知 m, n 是不同的直线, α, β 是不同的平面, 则下列条件能使 $n \perp \alpha$ 成立的是 【 】

- | | |
|--|-------------------------------------|
| A. $\alpha \perp \beta, m \subset \beta$ | B. $\alpha // \beta, n \perp \beta$ |
| C. $\alpha \perp \beta, n // \beta$ | D. $m // \alpha, n \perp m$ |

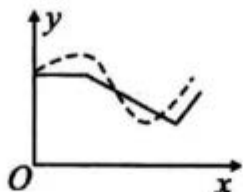
06.设 a, b 是非零向量, " $a \cdot b = |a||b|$ " 是 " $a // b$ " 的 【 】

- | | |
|-------------|---------------|
| A. 充分而不必要条件 | B. 必要而不充分条件 |
| C. 充分且必要条件 | D. 既不充分也不必要条件 |

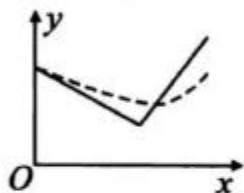
07. 在股票买卖过程中, 经常用到两种曲线, 一种是即时价格曲线 $y=f(x)$, 一种是平均价格曲线 $y=g(x)$ (如 $f(2)=3$ 表示某股票开始交易后第 2 小时的即时价格为 3 元; $g(2)=4$ 表示该股票开始交易后两个小时内所有成交价格的平均值为 4 元)。下面所给出的四个图象中, 实线表示 $y=f(x)$, 虚线表示 $y=g(x)$, 其中可能正确的是 **【 】**



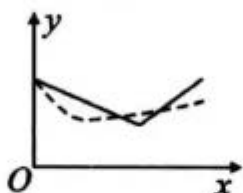
A



B



C



D

08. 已知抛物线 $W: y^2 = x$ 及直线 $m: y = x - 4$. 矩形 $ABCD$ 的顶点 A, B 在 m 上, C, D 在 W 上, 经过 C, D 的直线记为 l 给出下列四个命题:

- ① $\exists s > 0$, 使矩形 $ABCD$ 的面积为 s 的直线 l 不存在;
- ② $\exists s > 0$, 使矩形 $ABCD$ 的面积为 s 的直线 l 仅有一条;
- ③ $\exists s > 0$, 使矩形 $ABCD$ 的面积为 s 的直线 l 仅有两条;
- ④ $\exists s > 0$, 使矩形 $ABCD$ 的面积为 s 的直线 l 仅有三条.

其中所有真命题的序号是

【 】

A. ①②③④

B. ①②③

C. ②③

D. ②③④

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

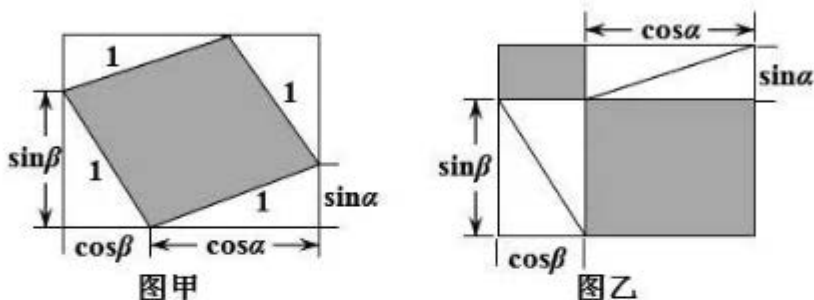
09. 双曲线 $x^2 - 4y^2 = 1$ 的渐近线方程为 _____, 离心率为 _____.

10. 已知圆 $C: x^2 - 2x + y^2 = 0$, 则圆心坐标为 _____; 若直线 l 过点 $(-1, 0)$ 且与圆 C 相切, 则直线 l 的方程为 _____.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=1, b=\sqrt{7}$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $c=$ _____.

12. 甲、乙、丙、丁等 7 人排成一排, 要求甲在中间, 乙丙相邻, 且丁不在两端, 则不同排法共有_____种. (结果用数值表示)

13. “无字证明” (proofs without words), 就是将数学命题用简单、有创意而且易于理解的几何图形来呈现. 请利用图甲、图乙中阴影部分的面积关系, 写出该图所验证的一个三角恒等变换公式_____.



14. 已知函数 $f(x) = e^x - e^{-x}$, 下列命题正确的有_____ (写出所有正确命题的编号)

- ① $f(x)$ 是奇函数;
- ② $f(x)$ 在 R 上是单调增函数;
- ③ 方程 $f(x) = x^2 + 2x$ 有且仅有 1 个实数根;
- ④ 如果对任意 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x) > kx$, 那么 k 的最大值为 2.

三、解答题

15、(本小题满分 13 分)

设函数 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3}) + \sin(x - \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2} \cos 2x, x \in R$

- (1) 求 $f(\frac{\pi}{3})$ 的值;
- (2) 求函数 $f(x)$ 的最大值和最小值。

16、(本小题满分 13 分)

下表为某班学生理科综合能力测试成绩(百分制)的频率分布表, 已知在[80,90)分数段内的学生数为 21 人.

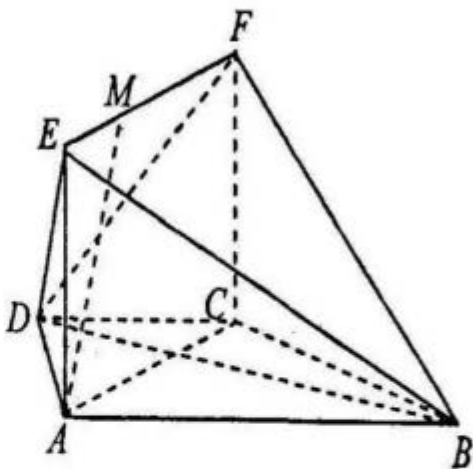
分数段	[65,70)	[70,75)	[75,80)	[80,85)	[85,90)	[90,95)	[95,100)
频率	0.1	0.15	0.2	0.2	0.15	0.1	*

- (1) 求测试成绩在[95, 100]分数段内的人数;
- (2) 现欲从[95, 100]分数段内的学生中抽出 2 人参加物理兴趣小组, 若其中至少有一名男生的概率为 $\frac{3}{5}$ 求[95, 100]分数段内男生的人数;
- (3) 若在[65,70)分数段的女生为 4 人, 现欲从[65, 70)分数段内的学生中抽出 3 人参加培优小组, 为分配到此组的 3 名学生中男生的人数 求 ξ 的分布列及期望 $E\xi$

17. (本小题满分 13 分)

如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AD = DC = CB = a$, $\angle ABC = 60^\circ$ 平面 $ACFE \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ACFE$ 是矩形, $AE = a$, 点 M 在线段 EF 上.

- (1) 求证: $BC \perp$ 平面 $ACFE$;
- (2) 当 EM 为何值时, $AM \parallel$ 平面 BDF ? 证明你的结论;
- (3) 求二面角 $B-EF-D$ 的弦值



18. (本小题满分 13 分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(1, 0)$, M 为椭圆的上顶点, O 为坐标原点, 且 $\triangle OMF$ 是等腰直角三角形.

- (1) 求椭圆的方程;
- (2) 是否存在直线 l 角交椭圆于 P, Q 两点, 且使点 F 为 $\triangle PQM$ 的垂心 (即三角形的三条高线的交点)? 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

19、(本小题满分 14 分)

已知函数 $g(x) = \frac{2}{x} - a \ln x (a \in R)$, $f(x) = 2x + g(x)$.

- (1) 求函数 $g(x)$ 的单调区间
- (2) 若 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有极值, 求 a 的取值范围;
- (3) $a > 0$ 时, 若 $f(x)$ 有唯一的零点 x_0 , 求 $[x_0]$ (只需写出结论)

(注: $[x_0]$ 为取整函数, 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[0.3] = 0, [2.6] = 2, [-1.4] = -2$, 以下数据供参考: $\ln 2 = 0.6931, \ln 3 = 1.099, \ln 5 = 1.609, \ln 7 = 1.946$)

20、(本小题满分 13 分)

已知无穷数列 $\{x_n\}$ 中, x_1, x_2 为正整数, 当 $n \geq 2$ 时, $x_{n+1} = \min\{x_i - x_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$, 其中 $\min\{a, b\}$ 表示 a, b 两个数中最小的数。

- (1) 若 $x_1 = 10, x_2 = 7$, 求 $\{x_n\}$ 的前 100 项和;
- (2) 证明存在正整数 m , 当 $n > m$ 时, $x_n = 0$;
- (3) 若 $x_1 = 2584$, 且 $x_2 < x_1$, 求 x_2 的值, 使得 $\{x_n\}$ 有最多非零项。(秩序写出结论)