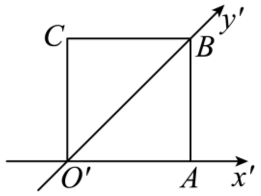
2023 北京理工大附中高二（上）期中

数　　学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 如图，一个水平放置的平面图形的直观图是边长为 2 的正方形，则原图形的周长是（　）



A. 16　　　　B. 12　　　　C. $4+8\sqrt{2}$　　　　D. $4+4\sqrt{2}$

2. 已知 m，n 为两条不同的直线，α，β 为两个不同的平面，则下列命题中正确的是（　　）

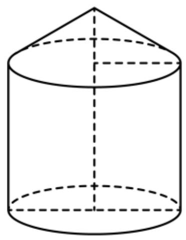
A. 若 $m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m//\beta$，$n//\beta$，则 $\alpha//\beta$

B. 若 $n//m$，$n\perp\alpha$，则 $m\perp\alpha$

C. 若 $m\perp\alpha$，$m\perp n$，则 $n//\alpha$

D. 若 $\alpha//\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则 $m//n$

3. 如图所示，圆柱与圆锥的组合体，已知圆锥部分的高为 $\frac{1}{2}$，圆柱部分的高为 2，底面圆的半径为 1，则该组合体的体积为（　）



A. $\frac{\pi}{3}$　　　　B. 2π　　　　C. $\frac{13\pi}{6}$　　　　D. $\frac{5\pi}{2}$

4. 已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 是不共面的三个向量，则能构成空间的一个基底的一组向量是（　　）

A. $3\vec{a}$，$\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{a}+2\vec{b}$　　　　B. $2\vec{b}$，$\vec{b}-2\vec{a}$，$\vec{b}+2\vec{a}$

C. $\vec{a}$，$2\vec{b}$，$\vec{b}-\vec{c}$　　　　D. $\vec{c}$，$\vec{a}+\vec{c}$，$\vec{a}-\vec{c}$

5. 设 x、$y\in\mathbf{R}$，向量 $\vec{a}=(x,1,1)$，$\vec{b}=(1,y,1)$，$\vec{c}=(3,-6,3)$ 且 $\vec{a}\perp\vec{c}$，$\vec{b}//\vec{c}$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|=$（　　）

A. $2\sqrt{2}$　　　　B. $2\sqrt{3}$　　　　C. 4　　　　D. 3

6. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 AB_1 与平面 ACC_1A_1 所成的角为（　）

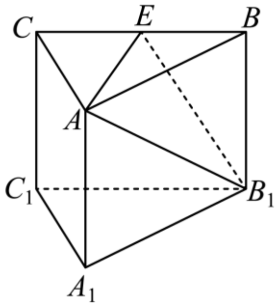
A. $30°$　　　　B. $45°$　　　　C. $60°$　　　　D. $90°$

7. 已知点 P 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 A_1D_1 上的一个动点，设异面直线 AB 与 CP 所成的角为 α，

则 $\cos\alpha$ 的最小值是（　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

8. 如图，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，侧棱 $AA_1\perp$ 底面 $A_1B_1C_1$，底面三角形 $A_1B_1C_1$ 是正三角形，E 是 BC 的中点，则下列叙述正确的是（　）



A. CC_1 与 B_1E 是异面直线

B. $AC\perp$ 平面 ABB_1A_1

C. AE，B_1C_1 为异面直线，且 $AE\perp B_1C_1$

D. A_1C_1 // 平面 AB_1E

9. 在正三棱锥 $P-ABC$ 中，O 是 $\triangle ABC$ 的中心，$PA=AB=2$，则 $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA}=$(　)

A. $\frac{5}{9}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{8}{3}$

10. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 BC 的中点，点 P 在底面 $ABCD$ 上移动，且满足 $B_1P\perp D_1E$，则线段 B_1P 的长度的最大值为(　)

A. 2　　B. 3　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.

11. 设向量 $\overrightarrow{AB}=(1,2,4)$，$\overrightarrow{CD}=(m,1,1)$，$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$，则实数 $m=$________.

12. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3，则 C_1 到平面 A_1BD 的距离为______.

13. 已知直线 m，n 的方向向量分别为 $\vec{a}=(1,-2,2)$，$\vec{b}=(1,3,0)$，则直线 m，n 夹角的余弦值为______.

14. 在古代数学中，把正四棱台叫做方亭，数学家刘徽用切割的方法巧妙地推导出了方亭的体积公式 $V=\frac{1}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)h$，$a$ 为方亭的下底面边长，b 为上底面边长，h 为高.某地计划在一片平原地带挖一条笔直的沟渠，渠的横截面为等腰梯形，上底为10 米，下底为6 米，深 2 米，长为837.5 米，并把挖出的土堆成一个方亭，设计方亭的下底面边长为70 米，高为6 米，则其侧面与下底面所成的二面角的正切值为________.

15. 已知圆锥的底面半径为 $2\sqrt{3}$，高为 2，S 为顶点，A，B 为底面圆周上的两个动点，则下列说法正确的是______.

①圆锥的体积为8π；

②圆锥侧面展开图的圆心角大小为$\sqrt{3}\pi$；

③圆锥截面 SAB 面积的最大值为$4\sqrt{3}$；

④若圆锥的顶点和底面上的所有点都在一个球面上，则此球的体积为$\dfrac{256}{3}\pi$.

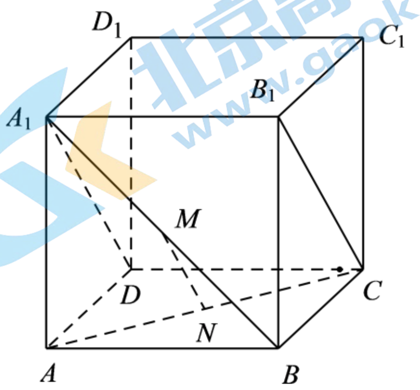
三、解答题共 4 小题，共 40 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16. 设$x,y\in \mathrm{R}$，向量$\vec{a}=(x,1,1)$，$\vec{b}=(1,y,1)$，$\vec{c}=(2,-4,2)$，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，$\vec{b}\,//\,\vec{c}$.

（1）求$|\vec{a}+\vec{b}|$；

（2）求向量$\vec{a}+\vec{b}$与$2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$夹角的大小.

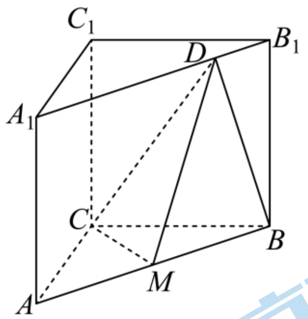
17. 如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，棱长为 2，M、N分别为A_1B、AC的中点.



（1）证明：$MN\,//$平面BCC_1B_1；

（2）求A_1B与平面A_1B_1CD所成角的大小.

18. 如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC=CC_1$，M为AB的中点，D在A_1B_1上且$A_1D=3DB_1$.



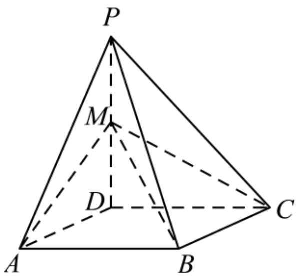
（1）求证：平面$CMD\perp$平面ABB_1A_1；

（2）求直线CM与平面CBD所成角的正弦值；

（3）求二面角$B-CD-M$的余弦值.

19. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为菱形，且$AB=2$，$\angle ABC=2\angle BAD$，

$\angle PDC=\dfrac{\pi}{2}$，点 M 为棱 DP 的中点.



（1）在棱 BC 上是否存在一点 N，使得 CM // 平面 PAN，并说明理由；

（2）若 $PB\perp AC$，二面角 $B-CM-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ 时，求点 A 到平面 BCM 的距离.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【答案】A

【分析】根据斜二测画法分析运算.

【详解】在直观图中，$O'A=2,O'B=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

可得原图形是平行四边形，其底边长 2，高为$2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$，

则另一边长为$\sqrt{2^2+(4\sqrt{2})^2}=6$，所以原图形的周长为$2\times(2+6)=16$.

故选：A.

2.【答案】B

【分析】根据空间线面位置关系依次判断各选项即可得答案.

【详解】解：对于 A，若$m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m//\beta$，$n//\beta$，$m\cap n=P$，则$\alpha//\beta$，故错误；

对于 B，$n//m$，$n\perp\alpha$，则$m\perp\alpha$，正确；

对于 C，$m\perp\alpha$，$m\perp n$，则$n//\alpha$或$n\subset\alpha$，故错误；

对于 D，若$\alpha//\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则$m//n$或异面，故错误.

故选：B

3.【答案】C

【分析】利用圆柱和圆锥的体积公式即可求解.

【详解】依题意可知，底面圆的半径为$r=1$，圆柱部分的高为$h_1=2$，圆锥部分的高为$h_2=\frac{1}{2}$，

所以圆柱部分的体积为$V_1=\pi r^2h_1=\pi\times1^2\times2=2\pi$，

圆锥部分的体积为$V_2=\frac{1}{3}\pi r^2h_2=\frac{1}{3}\times\pi\times1^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\pi$，

所以该组合体的体积为$V=V_1+V_2=2\pi+\frac{1}{6}\pi=\frac{13}{6}\pi$.

故选：C.

4.【答案】C

【分析】利用空间向量的基底的定义，逐项判断作答.

【详解】向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$是不共面的三个向量，

对于 A，$3\vec{a}=2(\vec{a}-\vec{b})+(\vec{a}+2\vec{b})$，则向量$3\vec{a},\vec{a}-\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}$共面，A 不能构成空间基底；

对于 B，$2\vec{b}=(\vec{b}-2\vec{a})+(\vec{b}+2\vec{a})$，则向量$2\vec{b},\vec{b}-2\vec{a},\vec{b}+2\vec{a}$共面，B 不能构成空间基底；

对于 D，$2\vec{c}=(\vec{a}+\vec{c})-(\vec{a}-\vec{c})$，则向量$\vec{c},\vec{a}+\vec{c},\vec{a}-\vec{c}$共面，D 不能构成空间基底；

对于 C，假定向量$\vec{a},2\vec{b},\vec{b}-\vec{c}$共面，则存在不全为 0 的实数$\lambda_1,\lambda_2$，使得$\vec{a}=2\lambda_1\vec{b}+\lambda_2(\vec{b}-\vec{c})$，

整理得$\vec{a}-(2\lambda_1+\lambda_2)\vec{b}+\lambda_2\vec{c}=\vec{0}$，而向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$不共面，则有$\begin{cases}1=0\\2\lambda_1+\lambda_2=0\\\lambda_2=0\end{cases}$，显然不成立，

所以向量$\vec{a},2\vec{b},\vec{b}-\vec{c}$不共面，能构成空间的一个基底，C 能构成空间基底.

故选：C

5.【答案】D

【分析】利用空间向量垂直与共线的坐标表示求出x、y的值，求出向量$\vec{a}+\vec{b}$的坐标，利用空间向量的模长公式可求得结果.

【详解】因为$\vec{a}\perp\vec{c}$，则$\vec{a}\cdot\vec{c}=3x-6+3=0$，解得$x=1$，则$\vec{a}=(1,1,1)$，

因为$\vec{b}//\vec{c}$，则$\dfrac{1}{3}=\dfrac{y}{-6}$，解得$y=-2$，即$\vec{b}=(1,-2,1)$，

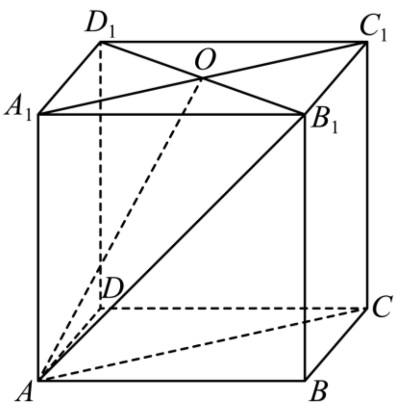
所以，$\vec{a}+\vec{b}=(2,-1,2)$，因此，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{4+1+4}=3$.

故选：D.

6.【答案】A

【分析】根据给定条件，作出直线与平面所成的角，再在三角形中求解作答.

【详解】正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，连接$B_1D_1\cap A_1C_1=O$，连接AO，如图，



则有$B_1O\perp A_1C_1$，而$AA_1\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，$B_1O\subset$平面$A_1B_1C_1D_1$，即有$B_1O\perp AA_1$，

又$AA_1\cap A_1C_1=A_1,AA_1,A_1C_1\subset$平面$ACC_1A_1$，因此$B_1O\perp$平面$ACC_1A_1$，

则$\angle B_1AO$是直线AB_1与平面ACC_1A_1所成的角，

在$\mathrm{Rt}\triangle AB_1O$中，$\angle AOB_1=90^\circ$，$B_1O=\dfrac{1}{2}B_1D_1=\dfrac{1}{2}AB_1$，则有$\angle B_1AO=30^\circ$，

所以直线AB_1与平面ACC_1A_1所成的角为30°.

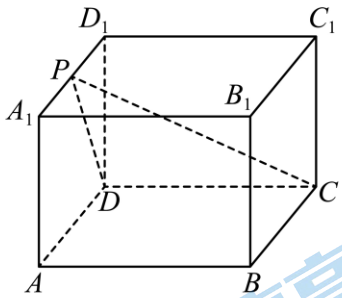
故选：A

7.【答案】A

【分析】由正方体的性质可知所求为 $\cos\angle DCP$ 的最小值，又因为 $CD\perp DP$，可知当点 P 在 A_1 处时，$\cos\alpha$ 有最小值，计算可得结果.

【详解】解：由正方体的性质可知：$AB//CD$，则异面直线 AB 与 CP 所成的角为直线 CD 与直线 CP 所成的角，即 $\angle DCP$ 或其补角. 又因为 $CD\perp$ 平面 ADD_1A_1，所以 $CD\perp DP$，即求 $\cos\angle DCP$ 的最小值.

$\cos\alpha=\dfrac{CD}{CP}=\dfrac{CD}{\sqrt{CD^2+DD_1^{\ 2}+D_1P^2}}$，当点 P 在 A_1 处时，$(\cos\alpha)_{\min}=\dfrac{a}{\sqrt{3}a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



故选：A.

8.【答案】C

【分析】

逐一分析选项，得到正确答案，A.根据是否共面分析；B.用反证法证明；C.利用线面垂直的性质定理证明；D.利用 $AC/\!/A_1C_1$，判断线面是否平行.

【详解】对于 A, CC_1 与 B_1E 都在平面 CC_1B_1B 内，且 CC_1 与 B_1E 是相交直线，故 A 错误；

对于 B，假设 $AC\perp$ 平面 ABB_1A_1，则 AC 垂直于平面内的任一条直线，即 $AC\perp AB$，这与题设"底面三角形 $A_1B_1C_1$ 是正三角形"矛盾，所以假设不成立，故 B 错误；

对于 C，$\because$ 点 $B_1\notin AE$，直线 B_1C_1 交平面 AEB_1 于点 B_1，$\therefore AE$，B_1C_1 为异面直线；

由题知△ABC 是正三角形，又 E 是 BC 的中点，$\therefore AE\perp BC$，又 $AE\perp C_1C$，且 $BC\cap C_1C=C$ $\therefore AE\perp$ 底面 BB_1C_1C，$\therefore AE\perp B_1C_1$，故 C 正确；

对于 D，$\because$ 直线 AC 交平面 AB_1E 于点 A，又 $AC/\!/A_1C_1$，$\therefore$ 直线 A_1C_1 与平面 AB_1E 相交，故 D 错误.

故选：C

【点睛】本题考查异面直线判断、异面直线垂直、线面垂直、线面平行等命题的真假性判断，考查学生的空间想象能力与逻辑推理能力，属于基础题.

9.【答案】D

【分析】将 $\overrightarrow{PA}$ 转化为 $\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}$，由三棱锥是正三棱锥可知 $PO\perp OA$，即可将 $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA}$ 转化为 $|\overrightarrow{PO}|^2$，结合勾股定理即可求解.

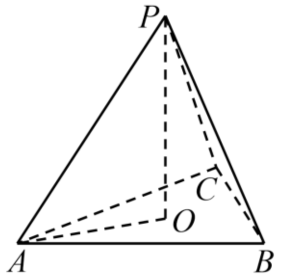
【详解】$\because P-ABC$ 为正三棱锥，O 为△ABC 的中心，

$\therefore PO\perp$ 平面 ABC，△ABC 是等边三角形，$\therefore PO\perp AO$，

$\therefore \overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OA}=0, |AO|=\frac{2}{3}\cdot|AB|\cdot\sin 60^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

故 $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PO}\cdot\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}\right)=\left|\overrightarrow{PO}\right|^2=|AP|^2-|AO|^2=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$.

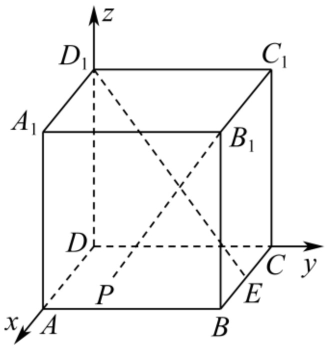
故选：D.



10. 【答案】B

【分析】以 D 为原点，DA、DC、DD_1 所在直线分别为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系，设 $P(a,b,0)$，根据 $\overrightarrow{B_1P}\cdot\overrightarrow{D_1E}=0$ 求出 a、b 之间的关系，利用两点间距离公式结合二次函数性质可求 B_1P 长度的最大值.

【详解】以 D 为原点，DA、DC、DD_1 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $D_1(0,0,2)$，$E(1,2,0)$，$B_1(2,2,2)$，设 $P(a,b,0)$，$0\leqslant a\leqslant 2$，$0\leqslant b\leqslant 2$，

则 $\overrightarrow{B_1P}=(a-2,b-2,-2)$，$\overrightarrow{D_1E}=(1,2,-2)$，

$\because B_1P\perp D_1E$，$\therefore \overrightarrow{B_1P}\cdot\overrightarrow{D_1E}=a-2+2(b-2)+4=0$，

$\therefore a+2b-2=0$，则易求 $0\leqslant b\leqslant 1$，

$\left|\overrightarrow{B_1P}\right|^2=(a-2)^2+(b-2)^2+4=(-2b)^2+(b-2)^2+4=5b^2-4b+8$，

由二次函数的性质可知，当 $b=1$ 时，$5b^2-4b+8$ 可取到最大值 9，

$\therefore$ 线段 B_1P 的长度的最大值为 3.

故选：B．

二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.

11.【答案】-6

【分析】

利用向量数量积坐标计算公式直接求解.

【详解】因为 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$，

所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = m + 2 + 4 = 0$，

解得 $m = -6$.

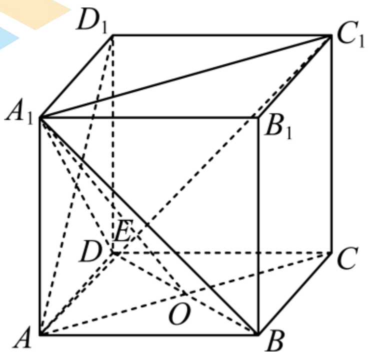
故答案为：-6.

【点睛】求两个向量的数量积有三种方法：利用定义；利用向量的坐标运算；利用数量积的几何意义．具体应用时可根据已知条件的特征来选择，同时要注意数量积运算律的应用．

12.【答案】$2\sqrt{3}$

【分析】根据正方体的性质以及线面垂直的判定定理、性质定理，可得出 $AC_1 \perp$ 平面 A_1BD .构造辅助线得出 AC_1 与平面 A_1BD 的交点 E，然后根据相似三角形，即可得出答案.

【详解】



如图，连接 AC_1， AD_1，

由正方体的性质可知，$C_1D_1 \perp$ 平面 ADD_1A_1， $A_1D \perp AD_1$.

因为 $A_1D \subset$ 平面 ADD_1A_1，所以 $C_1D_1 \perp A_1D$.

因为 $C_1D_1 \subset$ 平面 AC_1D_1， $AD_1 \subset$ 平面 AC_1D_1， $AD_1 \cap C_1D_1 = D_1$，

所以 $A_1D \perp$ 平面 AC_1D_1

因为 $AC_1 \subset$ 平面 AC_1D_1，所以 $A_1D \perp AC_1$.

同理可得 $AC_1 \perp A_1B$.

因为 $A_1D \subset$ 平面 A_1BD， $A_1B \subset$ 平面 A_1BD， $A_1D \cap A_1B = A_1$，

所以 $AC_1 \perp$ 平面 A_1BD .

连接 AC 交 BD 于 O，连接 A_1O 交 AC_1 于点 E，

则 C_1 到平面 A_1BD 的距离即等于 C_1E 的长.

因为 $AA_1//CC_1$，且 $AA_1=CC_1$，所以四边形 ACC_1A_1 为平行四边形.

又 $AO=\frac{1}{2}AC$，所以 $\triangle AOE\backsim\triangle C_1A_1E$，则 $\frac{AE}{C_1E}=\frac{AO}{A_1C_1}=\frac{1}{2}$，

所以 $C_1E=\frac{2}{3}AC_1=2\sqrt{3}$，即 C_1 到平面 A_1BD 的距离为 $2\sqrt{3}$.

故答案为：$2\sqrt{3}$.

13.【答案】$\frac{\sqrt{10}}{6}$

【分析】直接利用向量的夹角公式求解即可.

【详解】设直线 m，n 夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{|1-6|}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{1+9}}=\frac{\sqrt{10}}{6}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{10}}{6}$.

14.【答案】$\frac{6}{25}$

【分析】计算出挖出的土的体积，利用台体体积公式求出 b 的值，然后作出图形，找出其侧面与下底面所成的二面角的平面角，即可计算出侧面与下底面所成的二面角的正切值.

【详解】由题意知挖出的土的体积 $V=837.5\times\frac{1}{2}\times(10+6)\times2=13400$，

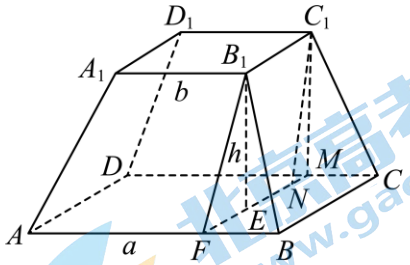
则由 $\frac{1}{3}\times\left(70^2+70b+b^2\right)\times6=13400$，整理得 $b^2+70b-1800=0$，

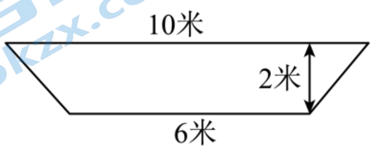
解得 $b=20$ 或 $b=-90$（舍去）.

在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=70$，$A_1B_1=20$，

设点 B_1 在底面 $ABCD$ 内的射影为点 E，点 C_1 在底面 $ABCD$ 内的射影为点 N，

设直线 EN 分别交 AB、CD 于点 F、M，连接 B_1F、C_1M，





因为 $B_1E\perp$ 平面 $ABCD$，$C_1N\perp$ 平面 $ABCD$，所以，$B_1E//C_1N$，

又因为平面 $ABCD//$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以，$B_1E=C_1N$，

故四边形 B_1C_1NE 为矩形，所以，$FM//B_1C_1$，

因为 $AB\perp BC$，$B_1C_1//BC$，则 $FM//BC$，所以，$AB\perp FM$，

因为 $B_1E\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，则 $AB\perp B_1E$，

因为 $FM\cap B_1E=E$，FM、$B_1E\subset$ 平面 B_1C_1MF，所以，$AB\perp$ 平面 B_1C_1MF，

因为 $B_1F\subset$ 平面 B_1C_1MF，所以，$B_1F\perp AB$，

所以，侧面 AA_1B_1B 与底面 $ABCD$ 所成二面角的平面角为 $\angle B_1FE$，

易知四边形 AA_1B_1B、CC_1D_1D 是全等的等腰梯形，且 $BB_1=CC_1$，$\angle ABB_1=\angle DCC_1$，

所以，$B_1F=BB_1\sin\angle ABB_1=CC_1\sin\angle DCC_1=C_1M$，

因为 $FM//BC$，$BF//CM$ 且 $FB\perp BC$，则四边形 $BCMF$ 为矩形，故 $FM=BC$，则 $FM\neq B_1C_1$，

故四边形 B_1C_1MF 为等腰梯形，

因为 $B_1F=C_1M$，$B_1E=C_1N$，$\angle B_1EF=\angle C_1NM=90^\circ$，故 $\triangle B_1EF\cong\triangle C_1NM$，

所以，$EF=MN$，

又因为 $EN=B_1C_1=20$，$FM=BC=70$，故 $EF=\dfrac{FM-EN}{2}=\dfrac{70-20}{2}=25$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle B_1EF$ 中，$\tan\angle B_1FE=\dfrac{B_1E}{EF}=\dfrac{6}{25}$.

故答案为：$\dfrac{6}{25}$.

15.【答案】①②④

【分析】根据题意求出圆锥的母线长，体积，侧面展开图的弧长，轴截面的面积，外接球体积，即可得出结论.

【详解】$\because$ 圆锥的底面半径 $r=2\sqrt{3}$，高为 $h=2$，

$\therefore$ 圆锥的母线长 $SA=SB=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=4$，

$\therefore$ 圆锥的体积 $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi\times\left(2\sqrt{3}\right)^2\times2=8\pi$，①正确；

设圆锥侧面展开图的圆心角大小为 α，则 $2\pi\times2\sqrt{3}=\alpha\times4,\alpha=\sqrt{3}\pi$，②正确；

当圆锥截面 SAB 为圆锥的轴截面时，此时 $SA=SB=4,AB=4\sqrt{3}$，

则 $\cos\angle ASB=\dfrac{SA^2+SB^2-AB^2}{2SA\cdot SB}=-\dfrac{1}{2}$，又 $\angle ASB\in\left(0,\pi\right)$，

$\therefore\angle ASB=\dfrac{2\pi}{3}$，

则当 $\angle ASB=\dfrac{\pi}{2}$ 时，圆锥截面 SAB 面积的最大，

此时 $S_{\triangle ASB}=\dfrac{1}{2}\cdot SA\cdot SA\cdot\sin\angle ASB=\dfrac{1}{2}\times4\times4\times1=8$，故③错误；

圆锥的顶点和底面上的所有点都在同一个球面上，即为圆锥的外接球，

设圆锥的外接球半径为 R，

由球的性质可知 $R^2=\left(h-R\right)^2+r^2$，即 $R^2=\left(2-R\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2$，

解得 $R=4$，

所以外接球体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\times4^3=\dfrac{256\pi}{3}$，④正确

故答案为：①②④.

三、解答题共 4 小题，共 40 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16.【答案】（1）3　（2）$\dfrac{\pi}{2}$

【分析】根据空间向量垂直和平行的性质，求出 x、y，进而求出向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，再进行相应运算即可.

【小问 1 详解】

由题意，$\vec{a}\perp\vec{b}$，$\vec{b}\,//\,\vec{c}$，

可得 $\begin{cases}x+y+1=0\\ \dfrac{1}{2}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=1\\ y=-2\end{cases}$，

则 $\vec{a}=\left(1,1,1\right)$，$\vec{b}=\left(1,-2,1\right)$，所以 $\vec{a}+\vec{b}=\left(2,-1,2\right)$，

故 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+\left(-1\right)^2+2^2}=3$.

【小问 2 详解】

因为 $2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\ 1,4,1$ ，

所以 $\ \vec{a}+\vec{b}\ \cdot\ 2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\ =2\times1+\ -1\ \times4+2\times1=0$，

故向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$.

17.【答案】（1）证明见解析

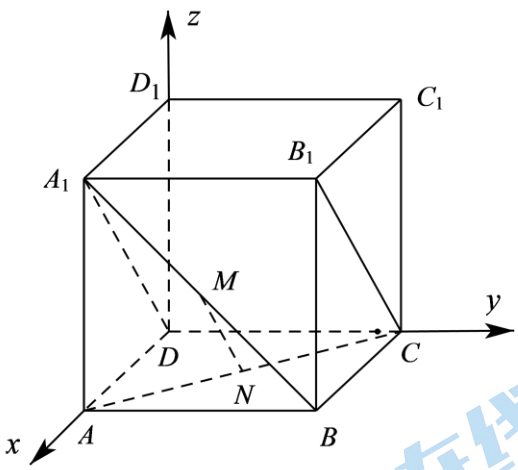
（2）30°

【分析】（1）以点 D 为坐标原点，DA 为 x 轴，DC 为 y 轴，DD_1 为 z 轴建立空间直角坐标系，求出 $\overrightarrow{MN}$ 和平面 BCC_1B_1 的法向量，利用空间向量证明即可，

（2）求出平面 A_1B_1CD 的法向量，利用空间向量求解即可.

【小问 1 详解】

如图，以点 D 为坐标原点，DA 为 x 轴，DC 为 y 轴，DD_1 为 z 轴建立空间直角坐标系.



则 $A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$A_1(2,0,2)$，$B(2,2,0)$，$B_1(2,2,2)$，$M(2,1,1)$，$N(1,1,0)$.

所以 $\overrightarrow{MN}=(-1,0,-1)$，

因为 $DC\perp$ 平面 BCC_1B_1，

所以平面 BCC_1B_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$，

因为 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{DC}=0$，所以 $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{DC}$，

因为 $MN\not\subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以 $MN //$ 平面 BCC_1B_1

【小问 2 详解】

$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{DA_1}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{A_1B}=(0,2,-2)$.

设平面 A_1B_1CD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

则 $\begin{cases}\overrightarrow{DA_1}\cdot\vec{n}=2x+2z=0\\ \overrightarrow{DC}\cdot\vec{n}=2y=0\end{cases}$，令 $z=1$，则 $x=-1$，$y=0$，

所以 $\vec{n}=(-1,0,1)$

设 A_1B 与平面 A_1B_1CD 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{A_1B},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{A_1B}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{A_1B}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{|-2|}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$.

因为 $0^\circ\le\theta<180^\circ$，

所以 A_1B 与平面 A_1B_1CD 所成角为 30° .

18.【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$

（3）$\dfrac{7\sqrt{17}}{51}$

【分析】（1）证明$CM\perp AB, CM\perp AA_1$，推出CM⊥平面ABB_1A_1，进而可得结论；

（2）以C为原点，CA为x轴，CB为y轴，CC_1为z轴，建立空间直角坐标系，利用向量法求直线 CM 与平面CBD所成角的正弦值；

（3）利用向量法求二面角$B-CD-M$ 的余弦值.

【小问 1 详解】

$\because$直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AC=BC=CC_1$，M为AB的中点，

$\therefore CM\perp AB$，$AA_1\perp$平面ABC，$CM\subset$平面ABC

$\therefore CM\perp AA_1$，又$AA_1\cap AB=A$，$AA_1, AB\subset$平面ABB_1A_1，

$\therefore CM\perp$平面ABB_1A_1，又$CM\subset$平面CMD，

$\therefore$平面$CMD\perp$平面ABB_1A_1；

【小问 2 详解】

以C为原点，CA为x轴，CB为y轴，CC_1为z轴，建立空间直角坐标系，

设$AC=BC=CC_1=4a$，

则$C(0,0,0), B(0,4a,0), D(a,3a,4a), M(2a,2a,0)$，

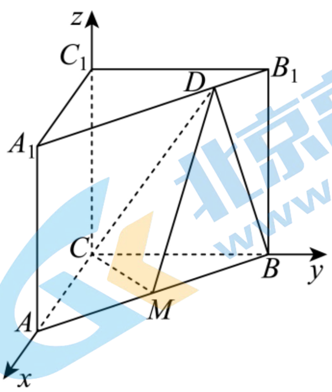
$\overrightarrow{BD}=(a,-a,4a), \overrightarrow{BC}=(0,-4a,0), \overrightarrow{CM}=(2a,2a,0)$

设面BDC的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=xa-ya+4za=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-4ya=0\end{cases}$，取$z=1$，得$\vec{n}=(-4,0,1)$，

设直线CM与平面CBD所成角为θ，

$\sin\alpha=|\cos<\overrightarrow{CM},\vec{n}>|=\left|\dfrac{-8a}{\sqrt{8}a\cdot\sqrt{17}}\right|=\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$;



【小问 3 详解】

设面 CDM 的法向量为 $\vec{m}=(x',y',z')$，又 $\overrightarrow{CD}=(a,3a,4a)$，$\overrightarrow{CM}=(2a,2a,0)$，

$$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CD}=x'a+3y'a+4z'a=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CM}=2x'a+2y'a=0\end{cases}$$，取 $x'=2$ 得 $\vec{m}=(2,-2,1)$，

$$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{-8+1}{\sqrt{16+1}\cdot\sqrt{4+4+1}}=-\frac{7\sqrt{17}}{51}，$$

所以二面角 $B-CD-M$ 的余弦值为 $\frac{7\sqrt{17}}{51}$.

19.【答案】(1）存在，理由见解析；(2）$\sqrt{2}$.

【分析】(1）取 PA 的中点 Q，连结 NQ、MQ，可以证明得四边形 $CNQM$ 为平行四边形，利用线面平行的判定定理可得点 N；

(2）先证明 DE，DC，DP 两两互相垂直，以 D 为坐标原点，建立空间直角坐标系，由二面角 $B-CM-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$，求出 MD 的长度，进而利用点面距的坐标公式求解即可.

【详解】(1）在棱 BC 上存在点 N，使得 CM // 平面 PAN，点 N 为棱 BC 的中点.

证明：取 PA 的中点 Q，连结 NQ、MQ，

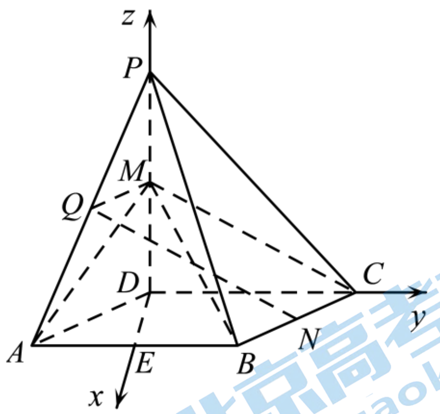
由题意，$MQ\parallel AD$ 且 $MQ=\frac{1}{2}AD$，$CN\parallel AD$ 且 $CN=\frac{1}{2}AD$，

故 $CN\parallel MQ$ 且 $CN=MQ$.

$\therefore$ 四边形 $CNQM$ 为平行四边形.

$\therefore CM\parallel NQ$，又 $CM\not\subset$ 平面 PAN，$NQ\subset$ 平面 PAN，

$\therefore CM\parallel$ 平面 PAN；



(2）取 AB 中点 E，

因为底面 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC\perp BD$，

又 $PB\perp AC$，且 $PB\cap BD=B$，

所以 $AC\perp$ 平面 PBD，即 $PD\perp AC$.

又$\angle PDC=\frac{\pi}{2}$，即$PD\perp DC$，而$DC\cap AC=C$

所以$PD\perp$平面$ABCD$.又$\angle ABC=2\angle BAD$，

所以$\triangle ABD$为正三角形，即$DE\perp AB$，也即$DE\perp DC$

所以DE，DC，DP两两互相垂直（需写出证明过程）.

以D为坐标原点，分别以DE，DC，DP所在直线为x,y,z轴建立空间直角坐标系.

设$MD=a$，则$D(0,0,0)$，$M(0,0,a)$，$C(0,2,0)$，$B(\sqrt{3},1,0)$，$A(\sqrt{3},-1,0)$.

所以$\overrightarrow{MC}=(0,2,-a)$，$\overrightarrow{CB}=(\sqrt{3},-1,0)$.

设平面MBC的一个法向量为$\vec{m}=(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

由$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{MC}=2y-az=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CB}=\sqrt{3}x-y=0\end{cases}$，取$x=1$，得$\vec{m}=\left(1,\sqrt{3},\frac{2\sqrt{3}}{a}\right)$；

取平面DMC的一个法向量为$\vec{n}=(1,0,0)$.

由题意，$\frac{\sqrt{6}}{6}=\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\frac{1}{\sqrt{1+3+\frac{12}{a^2}}}$，解得$a=\sqrt{6}$.

$\therefore\overrightarrow{MA}=(\sqrt{3},-1,-\sqrt{6})$.

设点A到平面BCM的距离为d，则$d=\frac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{MA}|}{|\vec{m}|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\sqrt{2}$.

即点A到平面BCM的距离为$\sqrt{2}$

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！