华大新高考联盟2020届高三1月教学质量测评

理科数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】C

【命题意图】本题考查一元二次不等式的解法、集合的运算，考查运算求解能力以及化归与转化思想.

【解析】依题意，$N=\{x\mid x(2x-7)\leqslant 0\}=\left\{x\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant\frac{7}{2}\right\}$，故 $M\cup N=\left(-1,\frac{7}{2}\right]$，故选C.

2.【答案】D

【命题意图】本题考查复数的概念、复数的几何意义，考查推理论证能力以及函数与方程思想.

【解析】依题意，$z=a+b\mathrm{i}$，由 $|z-3|=2$，可得 $(a-3)^2+b^2=4(*)$，可知 $M(4,1)$ 不满足 $(*)$ 式，故选D.

3.【答案】B

【命题意图】本题考查指数、对数的大小比较，考查推理论证能力以及化归与转化思想.

【解析】依题意，$a=\sqrt[4]{6}=6^{\frac{1}{4}}>6^0=1$，$b=\log_{\frac{5}{4}}\frac{4}{21}<\log_{\frac{5}{4}}1=0$，$0<c=\left(\frac{1}{3}\right)^{2.9}<\left(\frac{1}{3}\right)^0=1$，故 $a>c>b$，故选B.

4.【答案】B

【命题意图】本题考查推理与证明，考查推理论证能力以及分类讨论思想.

【解析】依题意，三个人制作的所有情况如下所示：

	1	2	3	4	5	6
鸿福齐天	小明	小明	小红	小红	小金	小金
国富民强	小红	小金	小金	小明	小红	小明
兴国之路	小金	小红	小明	小金	小明	小红

若小明的说法正确，则均不满足；若小红的说法正确，则4满足；若小金的说法正确，则3满足. 故“鸿福齐天”的制作者是小红，故选B.

5.【答案】A

【命题意图】本题考查函数的图像与性质，考查推理论证能力以及数形结合思想.

【解析】依题意，$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}+\frac{(-x)^2\cos(-x)}{20}=\frac{\sin x}{x}+\frac{x^2\cos x}{20}=f(x)$，故函数 $f(x)$ 为偶函数，图像关于 y 轴对称，排除C；而 $f(\pi)=-\frac{\pi^2}{20}<0$，排除B；$f(2\pi)=\frac{\pi^2}{5}>0$，排除D. 故选A.

6.【答案】B

【命题意图】本题考查排列组合、数学文化，考查数学建模能力以及分类讨论思想.

【解析】若按照3∶1∶1进行分配，则有 $C_3^1A_3^3=18$ 种不同的方案；若按照2∶2∶1进行分配，则有 $C_3^2A_3^3=18$ 种不同的方案. 故共有36种不同的派遣方案，故选B.

7.【答案】B

【命题意图】本题考查向量的坐标运算、向量的数量积应用，考查运算求解能力以及化归与转化思想.

【解析】依题意，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(m+2,-3)$，而 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $-m-2-6=0$，解得 $m=-8$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{10}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{65}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$，故选B.

8.【答案】A

【命题意图】本题考查算法与程序框图，考查推理论证能力以及化归与转化思想.

【解析】程序框图是为了计算 7 个数的方差，即输出的 $S=\frac{1}{7}[(x_1-20)^2+(x_2-20)^2+\cdots+(x_7-20)^2]$，观察可知，选 A.

9.【答案】C

【命题意图】本题考查等差数列的通项公式、前 n 项和公式，考查运算求解能力以及函数与方程思想.

【解析】依题意，$S_{10}=\frac{(a_1+a_{10})\cdot 10}{2}=5(a_5+a_6)=40$，解得 $a_5=3$，则 $d=a_6-a_5=2$，$a_{10}=a_6+4d=5+8=13$，$a_1=a_5-4d=3-8=-5$，$S_{20}=20a_1+190d=-100+380=280$，故选 C.

10.【答案】C

【命题意图】本题考查椭圆的方程与性质，考查运算求解能力以及数形结合思想.

【解析】设 $PF_1=n$，$PF_2=m$，由 $x_1>0$，$y_1>0$，知 $m<n$，由 $P(x_1,y_1)$，$Q(-x_1,-y_1)$ 在椭圆 C 上，$|PQ|=2|OF_2|$，可知四边形 PF_1QF_2 为矩形，$QF_1=QF_2$；由 $\frac{|QF_1|}{|PF_1|}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$，可得 $\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant\frac{m}{n}<1$，由椭圆的定义可得 $m+n=2a$，$m^2+n^2=4c^2$，平方相减可得 $mn=2(a^2-c^2)$，所以 $\frac{4c^2}{2(a^2-c^2)}=\frac{m^2+n^2}{mn}=\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$；而 $2<\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}$，即 $2<\frac{4c^2}{2(a^2-c^2)}\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}$，由 $2<\frac{4c^2}{2(a^2-c^2)}$，可得 $a^2<2c^2$，$e=\frac{c}{a}>\frac{\sqrt{2}}{2}$，由 $\frac{4c^2}{2(a^2-c^2)}\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}$，可得 $\frac{c^2}{a^2}\leqslant\frac{2}{2+\sqrt{3}}=4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2$，所以 $e=\frac{c}{a}\leqslant\sqrt{3}-1$，即 $\frac{\sqrt{2}}{2}<e\leqslant\sqrt{3}-1$，故选 C.

11.【答案】C

【命题意图】本题考查三角函数的性质，考查推理论证能力以及分类讨论思想.

【解析】因为 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=4\left|\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{7\pi}{12}\right)\right|+4\left|\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{7\pi}{12}\right)\right|=4\left|\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{12}\right)\right|+4\left|\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{12}\right)\right|\neq f(x)$，故①错误；当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$ 时，$\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{7\pi}{12},\frac{17\pi}{24}\right]$，故 $f(x)=4\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)-4\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)=4\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{12}\right)$，可知函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上单调递增，故②正确；函数 $f(x)=4\left|\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)\right|+4\left|\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)\right|$ 的值域等价于函数 $g(x)=4\left|\sin\frac{1}{2}x\right|+4\left|\cos\frac{1}{2}x\right|$ 的值域，易知 $g(x+\pi)=g(x)$，故当 $x\in[0,\pi]$ 时，$g(x)=4\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)\in[4,4\sqrt{2}]$，故③正确. 综上所述，故选 C.

12.【答案】A

【命题意图】本题考查组合体、球，考查空间想象能力以及数形结合思想.

【解析】依题意，$\angle MBC=\frac{\pi}{3}$，取 BC 的中点 E，则 E 是等腰梯形 $ABCD$ 外接圆的圆心，F 是 $\triangle SAD$ 的外心，作 $OE\perp$ 平面 $ABCD$，$OF\perp$ 平面 SAB，则 O 是四棱锥 S-$ABCD$ 的外接球球心，且 $OF=DE=3$，$AF=2$，设四棱锥 S-$ABCD$ 的外接球半径为 R，则 $R^2=SF^2+OF^2=13$，则 $OE=DF=1$，故当四棱锥 S-$ABCD$ 的体积最大时，$d_{\max}=R+OE=\sqrt{13}+1$，故选 A.

二、填空题

13.【答案】$-\frac{1}{3}$

【命题意图】本题考查导数的几何意义，考查运算求解能力以及数形结合思想.

【解析】依题意，$f'(x)=6m(2x+1)^2-2e^x$，$f'(0)=6m-2$，则 $6m-2=-4$，解得 $m=-\frac{1}{3}$.

14.【答案】$\frac{7}{3}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$

【命题意图】本题考查数列的前 n 项和与通项公式的关系，考查运算求解能力以及化归与转化思想.

【解析】当 $n=1$ 时，$2S_1=5a_1-7=2a_1$，即 $a_1=\frac{7}{3}$；当 $n\geqslant 2$ 时，$2S_n=5a_n-7$，$2S_{n-1}=5a_{n-1}-7$，两式相减可得 $2a_n=5a_n-5a_{n-1}$，即 $5a_{n-1}=3a_n$，即$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{5}{3}$，故数列$\{a_n\}$是以$\frac{7}{3}$为首项，$\frac{5}{3}$为公比的等比数列，故 $a_n=\frac{7}{3}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$.

15.【答案】360

【命题意图】本题考查频率分布直方图、样本的数字特征，考查运算求解能力以及数形结合思想.

【解析】第一块小矩形的面积 $S_1=0.3$，第二块小矩形的面积 $S_2=0.4$，故 $n=2000+\frac{0.5-0.3}{0.0002}=3000$；而 $m=1000\times0.3+3000\times0.4+5000\times0.18+(7000+9000)\times0.06=3360$，故 $m-n=360$.

16.【答案】$\sqrt{5}-1$

【解析】如图，设$\angle MOF_2=\frac{\alpha}{2}$，$|OF_2|=c$，则 $\tan\alpha=\frac{b}{a}$，即$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{b}{a}$，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，解得 $\sin\alpha=\frac{b}{c}$，$\cos\alpha=\frac{a}{c}$，则 $|OM|=c\cos\frac{\alpha}{2}$，故 $M\left(c\cos^2\frac{\alpha}{2},c\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$，即 $M\left(\frac{c+a}{2},\frac{b}{2}\right)$，代入双曲线的方程可得 $\frac{(c+a)^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4b^2}=1$，解得 $e=\sqrt{5}-1$.

三、解答题

17.【命题意图】本题考查正弦定理、余弦定理、三角形的面积公式，考查运算求解能力以及化归与转化思想.

【解析】(1)由正弦定理，得$\frac{3b}{c}+\frac{3c}{b}=\frac{3a^2}{bc}+4\sqrt{2}$， ……………… 2 分

即 $3b^2+3c^2=3a^2+4\sqrt{2}bc$，则$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2\sqrt{2}}{3}=\cos A$， ……………… 4 分

而$\sin^2A+\cos^2A=1$，又 $A\in(0,\pi)$，解得 $\sin A=\frac{1}{3}$，故 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. ……………… 6 分

(2)因为$\sqrt{2}\sin B=3\sin C$，则 $b=\frac{3c}{\sqrt{2}}$， ……………… 7 分

因为 $S_{\triangle ABC}=2\sqrt{2}$，故$\frac{1}{2}bc\sin A=2\sqrt{2}$，故$\frac{1}{2}\times\frac{3c^2}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{3}=2\sqrt{2}$，解得 $c=2\sqrt{2}$， ……………… 9 分

故 $b=6$， ……………… 10 分

则 $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{36+8-2\times6\times2\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}}=2\sqrt{3}$. ……………… 12 分

18.【命题意图】本题考查空间线面的位置关系、线面成角，考查空间想象能力以及数形结合思想.

【解析】(1)因为$\angle BAB_1=\angle BB_1A$，故 $AB=BB_1$，所以四边形 A_1ABB_1 为菱形， ……………… 1 分

而 $CO\perp$平面 ABB_1A_1，故$\angle COA=\angle COB=90^0$. ……………… 2 分

因为 $CO=CO$，$CA=CB$，故$\triangle COA\cong\triangle COB$， ……………… 4 分

故 $AO=BO$，即四边形 ABB_1A_1 为正方形，故 $AB\perp AA_1$. ……………… 5 分

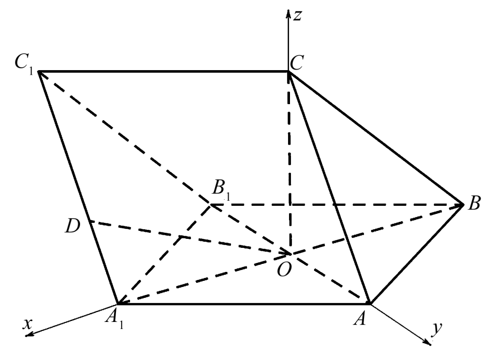
(2)依题意，$CO\perp OA$，$CO\perp OA_1$. 在正方形 A_1ABB_1 中，$OA_1\perp OA$，故以 O 为原点，OA_1，OA，OC 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如图所示的平面直角坐标系 $O\text{-}xyz$； ……………… 6 分

不妨设 $AB=2$，

则 $O(0,0,0)$，$A_1(\sqrt{2},0,0)$，$A(0,\sqrt{2},0)$，$C(0,0,\sqrt{2})$，$C_1(\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{2})$，

又因为 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1C_1}$，所以 $D(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{3})$.

所以$\overrightarrow{A_1A}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{AC}=(0,-\sqrt{2},\sqrt{2})$.



设平面 A_1ACC_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0.\end{cases}$

即$\begin{cases}-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0,\\ -\sqrt{2}y+\sqrt{2}z=0.\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=1,z=1$. 于是 $\boldsymbol{m}=(1,1,1)$. ………………… 9 分

又因为$\overrightarrow{OD}=(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{3})$，………………………… 10 分

设直线 OD 与平面 A_1ACC_1 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{OD}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OD}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{OD}|}=\frac{\sqrt{33}}{11}$，

所以直线 OD 与平面 A_1ACC_1 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{33}}{11}$. ………………………………………… 12 分

19.【命题意图】本题考查抛物线的方程、直线与抛物线的位置关系，考查推理论证能力以及化归与转化思想.

【解析】(1)依题意，$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，则直线 DE：$y=x-\frac{p}{2}$，

联立$\begin{cases}y^2=2px,\\ y=x-\frac{p}{2},\end{cases}$得 $y^2-2py-p^2=0$；…………………………………………………………… 2 分

设 $D(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$，

则$|DE|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}|y_1-y_2|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}p=4$， ………………… 4 分

解得 $p=1$，故抛物线 C 的方程为 $y^2=2x$. ……………………………………………………… 6 分

(2)设 $D\left(\frac{y_1^2}{2},y_1\right)$，$E\left(\frac{y_2^2}{2},y_2\right)$，

因为直线 DE 的斜率为 1，则$\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{2}-\frac{y_1^2}{2}}=\frac{2}{y_2+y_1}=1$，所以 $y_2+y_1=2$， ………………………………… 7 分

因为$\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{EI}=0$，所以线段 DE 中点 I 的纵坐标为 $y_I=1$. ……………………………………… 8 分

直线 DO 的方程为 $y=\frac{y_1}{\frac{y_1^2}{2}}x$，即 $y=\frac{2}{y_1}x$…①

直线 EG 的方程为 $y-2=\frac{y_2-2}{\frac{y_2^2}{2}-2}(x-2)$，即 $y=\frac{2}{y_2+2}(x-2)$…②……………………………………… 9 分

联立①②解得$\begin{cases}x=\frac{y_1}{2},\\ y=1,\end{cases}$即点 H 的纵坐标为 $y_H=1$，即直线 $HI\parallel x$ 轴，

故直线 HI 的斜率为 0. …………………………………………………………………… 11 分

如果直线 EG 的斜率不存在，结论也显然成立.

综上所述，直线 HI 的斜率为 0. ……………………………………………………………… 12 分

20.【命题意图】本题考查利用导数研究函数的性质，考查推理论证能力以及函数与方程思想.

【解析】(1)依题意，$f'(x)=e^x-2+\sin x$， ……………………………………………………… 1分

因为 $e^x<e^0=1$，且 $\sin x-1\leqslant 0$，故 $f'(x)<0$， ……………………………………………… 3分

故函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，故 $f(x)>f(0)=0$. ……………………………………… 4分

(2)解法一　依题意，$g(x)=e^x-2x-\cos x+\ln(x+1)$，$x>-1$，

令 $h(x)=g'(x)=e^x+\frac{1}{x+1}+\sin x-2$，则 $h(0)=0$；

而 $h'(x)=e^x-\frac{1}{(x+1)^2}+\cos x$，可知当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$h'(x)>0$， ……………………… 6分

故函数 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，故当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$h(x)=g'(x)>g'(0)=0$；………………… 8分

当 $x\in(-1,0)$ 时，函数 $h'(x)$ 单调递增，而 $h'(0)=1$，

又 $h'\left(-\frac{9}{10}\right)=e^{-\frac{9}{10}}+\cos\left(-\frac{9}{10}\right)-100<0$，故 $\exists x_0\in\left(-\frac{9}{10},0\right)$，使得 $h'(x_0)=0$，

故 $\exists x\in(x_0,0)$，使得 $h'(x)>0$，即函数 $h(x)$ 单调递增，即 $g'(x)$ 单调递增；

故当 $x\in(x_0,0)$ 时，$g'(x)<g'(0)=0$， ……………………………………………………………… 11分

故函数 $g(x)$ 在 $(x_0,0)$ 上单调递减，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

故当 $x=0$ 时，函数 $g(x)$ 有极小值 $g(0)=0$. ……………………………………………………… 12分

解法二　依题意，$g(x)=e^x-2x-\cos x+\ln(x+1)$，$x\in(-1,+\infty)$；

则 $g'(x)=e^x+\frac{1}{x+1}-2+\sin x=h(x)$，$g'(0)=0$； ……………………………………………… 5分

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$h'(x)=e^x-\frac{1}{(x+1)^2}+\cos x>0$，故 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

故 $h(x)>h(0)=0$，即 $g'(x)>0$； ………………………………………………………………………… 6分

当 $x\in(-1,0)$ 时，令 $s(x)=(x+1)^2e^x$，$t(x)=(x+1)^2\cos x$，

则 $s'(x)=(x+1)(x+3)e^x>0$，故 $s(x)$ 是 $(-1,0)$ 上的增函数，

所以 $s(-1)<s(x)<s(0)$，即 $0<s(x)<1$，

故存在区间 $(x_1,0)\subseteq(-1,0)$，使 $s(x)>\frac{1}{2}$，即 $e^x>\frac{1}{2(x+1)^2}$， ……………………………… 8分

又 $0<(x+1)^2<1$，即 $\cos 1<\cos x<1$，即 $0<t(x)<1$，

故存在区间 $(x_2,0)\subseteq(-1,0)$，使 $t(x)>\frac{1}{2}$，即 $\cos x>\frac{1}{2(x+1)^2}$； ……………………………… 10分

设 $(x_1,0)\cap(x_2,0)=(x_0,0)$，

则在区间 $(x_0,0)$ 上，$h'(x)=e^x-\frac{1}{(x+1)^2}+\cos x>0$，故 $h(x)$ 是 $(x_0,0)$ 上的增函数，

即在区间 $(x_0,0)$ 上，$g'(x)=e^x+\frac{1}{x+1}-2+\sin x<0$， …………………………………………… 11分

故当 $x=0$ 时，函数 $g(x)$ 有极小值 $g(0)=0$. ……………………………………………………… 12分

21.【命题意图】本题考查独立性检验、离散型随机变量的分布列以及期望、排列组合，考查运算求解能力以及必然与或然思想.

【解析】(1)本次实验中，$k=\frac{1000\times(300\times250-200\times250)^2}{500\times500\times550\times450}\approx10.1<10.828$， ………………………… 2分

故没有 99.9%的把握认为喜欢树木的种类与居民所在的城市具有相关性. …………………………… 3分

(2)依题意，X 的可能取值为 0,1,2,3,4， ………………………………………………………………… 4分

故 $P(X=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}=P(X=4)$，$P(X=1)=C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}=P(X=3)$，

$P(X=2)=C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$， ………………………………………………………………… 6 分

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

故 $E(X)=4\times\frac{1}{2}=2$. ……………………………………………………………………………… 7 分

(3)$\because 2m\geqslant 8$，$\therefore m\geqslant 4$. 要证 $3M\geqslant m(m-1)(m-2)$，即证 $M\geqslant 2C_m^3$；

首先证明：对任意 $m,k\in\mathbf{N}^*$，$m\geqslant k$，有 $C_{m+1}^k>C_m^k$.

证明：因为 $C_{m+1}^k-C_m^k=C_m^{k-1}>0$，所以 $C_{m+1}^k>C_m^k$.

设 $2m$ 个路口中有 $p(p\in\mathbf{N},p\leqslant 2m)$ 个路口种植杨树，

①当 $p\in\{0,1,2\}$ 时，

$M=C_{2m-p}^3\geqslant C_{2m-2}^3=\frac{(2m-2)(2m-3)(2m-4)}{6}=4\times\frac{(m-1)(m-2)(2m-3)}{6}$，

因为 $m\geqslant 4$，所以 $2m-3>m$，

于是 $M>4\times\frac{m(m-1)(m-2)}{6}=4C_m^3>2C_m^3$. ……………………………………………………… 8 分

②当 $p\in\{2m-2,2m-1,2m\}$ 时，$M=C_p^3\geqslant C_{2m-2}^3$，同上可得 $M>2C_m^3$. ………………………… 9 分

③当 $3\leqslant p\leqslant 2m-3$ 时，$M=C_p^3+C_{2m-p}^3$，设 $f(p)=C_p^3+C_{2m-p}^3$，$3\leqslant p\leqslant 2m-3$，

当 $3\leqslant p\leqslant 2m-4$ 时，$f(p+1)-f(p)=C_{p+1}^3+C_{2m-p-1}^3-C_p^3-C_{2m-p}^3=C_p^2-C_{2m-p-1}^2$， …………… 10 分

显然 $p\neq 2m-p-1$，当 $p>2m-p-1$ 即 $m\leqslant p\leqslant 2m-4$ 时，$f(p+1)>f(p)$，

当 $p<2m-p-1$ 即 $3\leqslant p\leqslant m-1$ 时，$f(p+1)<f(p)$， ……………………………………………… 11 分

即 $f(m)<f(m+1)<\cdots<f(2m-3)$；$f(3)>f(4)>\cdots>f(m)$，

因此 $f(p)\geqslant f(m)=2C_m^3$，即 $M\geqslant 2C_m^3$.

综上，$M\geqslant 2C_m^3$，即 $3M\geqslant m(m-1)(m-2)$. ……………………………………………………… 12 分

22.【命题意图】本题考查极坐标方程与直角坐标方程、参数方程与普通方程的转化、极坐标的几何意义，考查推理论证能力以及数形结合思想.

【解析】(1)依题意，曲线 C_1：$(x-2)^2+y^2=4$，即 $x^2+y^2-4x=0$， ……………………………………… 1 分

故 $\rho^2-4\rho\cos\theta=0$，即 $\rho=4\cos\theta$. …………………………………………………………………… 3 分

因为 $\rho^2=\frac{4}{\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha}$，故 $\rho^2\cos^2\alpha+4\rho^2\sin^2\alpha=4$，

即 $x^2+4y^2=4$，即 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …………………………………………………………………………… 5 分

(2)将 $\theta=\theta_0$ 代入 $\rho^2=\frac{4}{\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha}$，得 $\rho_Q^2=\frac{4}{1+3\sin^2\theta_0}$，

将 $\theta=\theta_0$ 代入 $\rho=4\cos\theta$，得 $\rho_P=4\cos\theta_0$， ……………………………………………………… 6 分

由 $|OP|=2|OQ|$，得 $\rho_P=2\rho_Q$，即 $(4\cos\theta_0)^2=\frac{16}{1+3\sin^2\theta_0}$， ………………………………… 7 分

解得 $\sin^2\theta_0=\frac{2}{3}$，则 $\cos^2\theta_0=\frac{1}{3}$.

又 $0<\theta_0<\frac{\pi}{2}$，故 $\rho_Q=\sqrt{\frac{4}{1+3\sin^2\theta_0}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$\rho_P=4\cos\theta_0=\frac{4\sqrt{3}}{3}$， ……………………… 9 分

故$\triangle MPQ$的面积$S_{\triangle MPQ}=S_{\triangle OMP}-S_{\triangle OMQ}=\frac{1}{2}\cdot|OM|\cdot(\rho_P-\rho_Q)\cdot\sin\theta_0=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. …………………… 10 分

23.【命题意图】本题考查证明不等式的方法、基本不等式,考查推理论证能力以及化归与转化思想.

【解析】(1)要证 $a^4-a^2b^2+b^4\geqslant\frac{ab(a^4+b^4)}{a^2+b^2}$,

即证$(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)\geqslant ab(a^4+b^4)$,…………………………………………………………… 1 分

即证 $a^6+b^6\geqslant a^5b+ab^5$,……………………………………………………………………………………… 2 分

即证 $a^6+b^6-a^5b-ab^5\geqslant 0$,

即证 $a^5(a-b)-(a-b)b^5\geqslant 0$,

即证$(a^5-b^5)(a-b)\geqslant 0$,………………………………………………………………………………………… 4 分

该式显然成立,当且仅当 $a=b$ 时等号成立,

故 $a^4-a^2b^2+b^4\geqslant\frac{ab(a^4+b^4)}{a^2+b^2}$. ……………………………………………………………………… 5 分

(2)由基本不等式得 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$, ……………………………………………………………………… 6 分

$a^3+b^3+1\geqslant 3ab$, $b^3+c^3+1\geqslant 3bc$, $a^3+c^3+1\geqslant 3ac$,

当且仅当 $a=b=c=1$ 时等号成立. ……………………………………………………………………………… 7 分

将上面四式相加,可得 $3a^3+3b^3+3c^3+3\geqslant 3abc+3ab+3bc+3ac$,……………………………………… 9 分

即 $a^3+b^3+c^3\geqslant ab+bc+ac$. ………………………………………………………………………………… 10 分