2019-2020 学年度北京市八一学校 10 月考

高三数学(理科)

一、选择题

1. 设集合$U=\{1,2,3,4\}$，$M=\{x\in U|x^2+5x+p=0\}$，若$C_U M=\{1,4\}$，则p的值为 【　　】

A. -4　　　　B. 4　　　　C. -6　　　　D. 6

2. 对于函数①$y=x^2$，②$y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$，③$y=|x-1|$，④$y=2^{x+1}$，其中在区间$(0,1)$上单调递减的函数的序号是 【　　】

A. ③④　　　　B. ①②　　　　C. ②③　　　　D. ①④

3. 设$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$是单位向量，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则$(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})$的最小值为 【　　】

A. -2　　　　B. $\sqrt{2}-2$　　　　C. -1　　　　D. $1-\sqrt{2}$

4. 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题：“远望巍塔七层，红光点点倍加增，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？”意思是：一座 7 层塔共挂了 381 盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍，则塔的顶层共有灯 【　　】

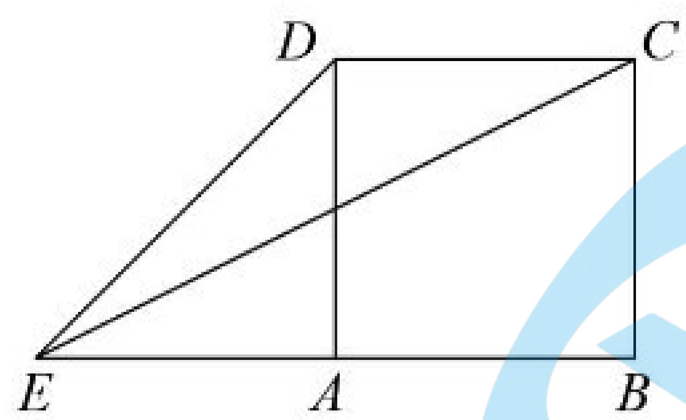
A. 1 盏　　　　B. 3 盏　　　　C. 5 盏　　　　D. 9 盏

5. 已知函数$f(x)$是定义在实数集$\mathbf{R}$上的偶函数，则下列结论一定成立的是 【　　】

A. $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)>f(-x)$　　　　B. $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)f(-x)\geq 0$

C. $\exists x_0\in\mathbf{R}, f(x_0)>f(-x_0)$　　　　D. $\exists x_0\in\mathbf{R}, f(x_0)f(-x_0)<0$（晓观数学）

6. 如图，正方形$ABCD$的边长为 1，延长BA至E，使$AE=1$，连接EC、ED，则$\sin\angle DCE=$ 【　　】



A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　　　B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　　　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

7. 设$a>1$，函数$y=|\log_a x|$的定义域为$[m,n]\ (m<n)$，值域为$[0,1]$. 定义“区间$[m,n]$的长度等于$n-m$”，若区间$[m,n]$长度的最小值为$\frac{5}{6}$，则实数a的值为 【　　】

A. 6　　　　B. 11　　　　C. $\frac{11}{6}$　　　　D. $\frac{3}{2}$

8. 函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，若对于定义域内任意 $x_1,x_2\,(x_1\neq x_2)$，有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为恒均变函数. 给出下列函数：

① $f(x)=2x+3$；② $f(x)=x^2-2x+3$；③ $f(x)=e^x$；④ $f(x)=\cos$

其中为恒均变函数的序号是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　【　　】

A. ①③　　　　B. ①②　　　　C. ①②③　　　　D. ①②④

二、填空题

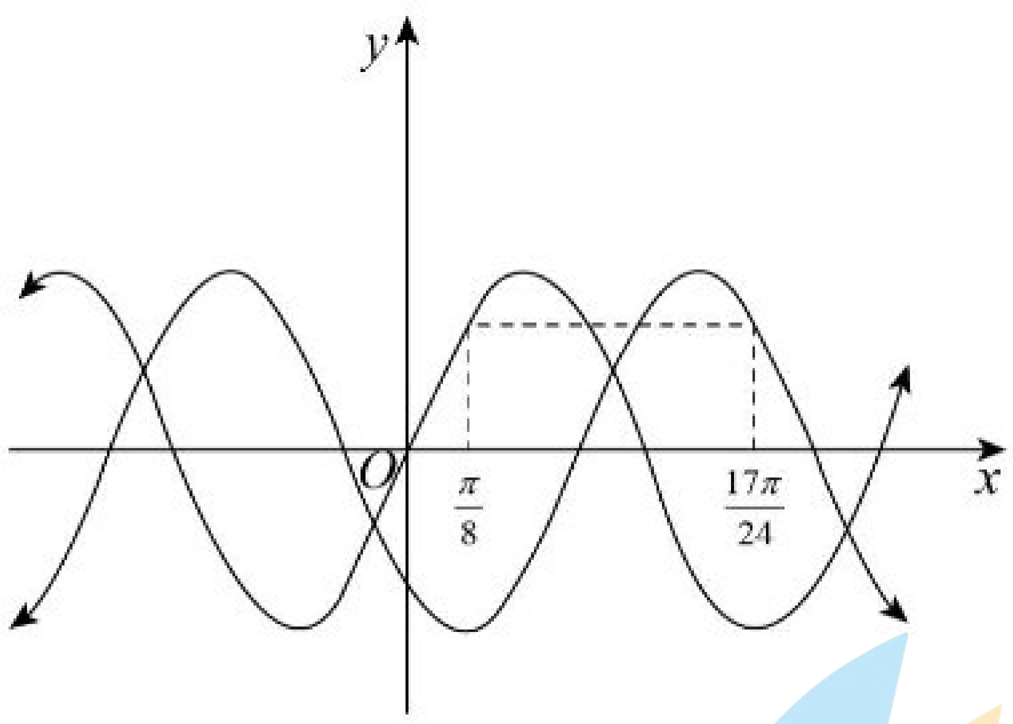
9. $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{3}$，且 α 为第四象限角，$\tan\alpha=$____________.

10. 已知向量 $a=(2,1)$，$a\cdot b=10$，$|a+b|=5\sqrt{2}$，则 $|b|=$__________.

11. 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_3=10$，$a_2+a_4=5$. 则 $a_1a_2\ldots a_n$ 的最大值为__________.

12. 曲线 $f(x)=e^x$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线经过点 $P(1,0)$，则 $x_0=$__________.

13. 已知函数 $y=g(x)$ 的图象可以由 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\varphi\,(0<\varphi<\pi)$ 个单位得到，这两个函数的部分图象如图所示，则 $\varphi=$__________.



14. 设 Ω 为平面直角坐标系 xOy 中的点集，从 Ω 中的任意一点 P 作 x 轴、y 轴的垂线，垂足分别为 M、N，记点 M 的横坐标的最大值与最小值之差为 $x(\Omega)$，点 N 的纵坐标的最大值与最小值之差为 $y(\Omega)$，若 Ω 是长为 1 的正方形，给出下列三个结论：

① $x(\Omega)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$；② $x(\Omega)+y(\Omega)$ 的取值范围是 $\left[2,2\sqrt{2}\right]$；③ $x(\Omega)-y(\Omega)$ 恒等于（晓观数学）

其中真命题的序号是____________________.

三、解答题

15. 已知公差不为零的等差数列$\{a_n\}$满足：$a_3+a_8=20$，且a_5是a_2与a_{14}的等比中项.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设数列$\{b_n\}$满足$b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$.

16. 在$\triangle ABC$中，三个内角A、B、C的对边分别为a、b、c，且$b\sin A=\sqrt{3}a\cos B$.

(1) 求角B；

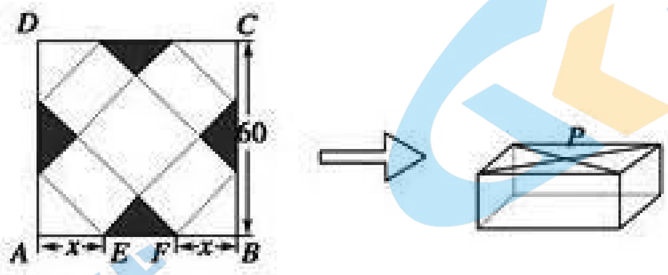
(2) 若$b=2\sqrt{3}$，$a+c=4\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的面积.

17. 已知函数$f(x)=\dfrac{1}{2}-\sin^2 x+\dfrac{1}{2}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

(1) 求函数$f(x)$的周期和单调递增区间；

(2) 若对于任意的$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，都有$f(x)\le c$，求实数$c$的取值范围.（晓观数学）

18. 请你设计一个包装盒，如图所示，$ABCD$ 是边长为60cm 的正方形硬纸片，切去阴影部分所示的四个全等的等腰直角布尔乔亚工，再沿虚线折起，使得 A、B、C、D 四个点重合于图中的点 P，正好形成一个正四棱柱形状的包装盒，E、F 在 AB 上，是被切去的一个等腰直角三角形斜边的两个端点，设 $AE=FB=x\left(\text{cm}\right)$.



(1) 某广告商要求包装盒的侧面积 $S\left(\text{cm}^2\right)$ 最大，试问 x 应取何值？

(2) 某厂商要求包装盒的容积 $V\left(\text{cm}^3\right)$ 最大，试问 x 应取何值？并求此出此包装盒的高与底面边长的比值.

19. 已知：函数 $f\left(x\right)=x-\dfrac{1}{2}ax^2-\ln\left(1+x\right)$，其中 $a\in R$.

(1) 若 $x=2$ 是 $f\left(x\right)$ 的极值点，求 a 的值；

(2) 求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

(3) 若 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上的最大值是 0，求 a 的取值范围（晓观数学）.

20. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，若 $y=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，则称 $f(x)$ 为“一阶比增函数”，若 $y=\dfrac{f(x)}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，则称 $f(x)$ 为（晓观数学）“二阶比增函数”.

我们把所有“一阶比增函数”组成的集合记为 Ω_1，所有“二阶比增函数”组成的集合记为 Ω_2.

(1) 已知函数 $f(x)=x^3-2hx^2-hx$，若 $f(x)\in\Omega_1$，且 $f(x)\notin\Omega_2$，求实数 h 的取值范围.

(2) 已知 $0<a<b<c$，$f(x)\in\Omega_1$，且 $f(x)$ 的部分函数值由下表给出，

x	a	b	c	$a+b+c$
$f(x)$	d	d	t	4

求证：$d(2d+t-4)>0$.

(3) 定义集合 $\psi=\left\{f(x)\middle| f(x)\in\Omega_2,\text{且存在常数}k\text{，使得任取}x\in(0,+\infty), f(x)<k\right\}$，

请问：是否存在常数 M，使得 $\forall f(x)\in\psi$，$\forall x\in(0,+\infty)$，有 $f(x)<M$ 成立？若存在，求出 M 的最小值；若不存在，说明理由.