

2023 北京房山高 一（上） 期中

数 学

本调研卷共 4 页，共 150 分。时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在调研卷上作答无效。调研结束后，将答题卡交回，调研卷自行保存。

第一部分（选择题共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

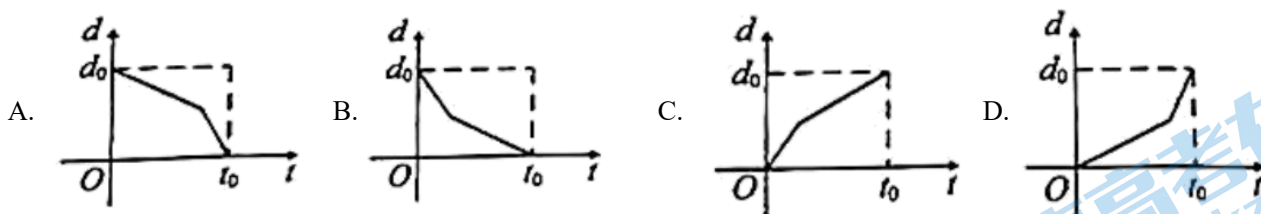
1. 已知集合 $A = \{x \mid |x| \leq 2\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ B. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ C. $\{-1, 0, 1, 2\}$ D. $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$

2. 已知命题 $P: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 > 0$, 则 $\neg P$ 为 ()

- A. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 < 0$ B. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$
C. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 < 0$ D. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$

3. 小明离开家去学校上学，刚开始步行一段时间后感觉要迟到，改为跑步完成余下的路程。在下图中纵轴表示离学校的距离，横轴表示出发后的时间，则下面四个图形中较符合该学生走法的是 ()



4. 设 $p: x > 2, q: x > 3$, 则 p 是 q 的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 设 a, b 是非零实数。若 $a < b$, 则下列不等式成立的是 ()

- A. $a^2 < b^2$ B. $a^2 < ab$ C. $a^3 < b^3$ D. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

6. 若 $M = 4x^2 + 2x + 1, N = 3x(x + 1)$, 则 M 与 N 的大小关系为 ()

- A. $M > N$ B. $M = N$ C. $M < N$ D. 无法确定

7. 下列函数中，既是奇函数又在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ()

- A. $y = \frac{1}{x}$ B. $y = x^2$ C. $y = x^3 + 1$ D. $y = x|x|$

8. 函数 $f(x) = x^3 - x^2 + 5$ 的零点所在的区间为 ()

- A. $(-3, -2)$ B. $(-2, -1)$ C. $(-1, 0)$ D. $(0, 1)$

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 3, & x \leq a \\ ax + 1, & x > a \end{cases}$ 在定义域上是单调函数, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $[-2, 0)$ B. $(-\infty, -2]$ C. $(0, 2]$ D. $[2, +\infty)$

10. 已知 $f(x)$, $g(x)$ 分别是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数和奇函数, 且 $f(x) - g(x) = x^3 + x + 1$, 则 $f(1) + g(1) = ()$

- A. 3 B. 1 C. -1 D. -3

第二部分 (非选择题 共 100 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

11. 函数 $f(x) = \sqrt{x+2} + \frac{1}{x}$ 的定义域为_____.

12. 方程组 $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$ 的解集为_____.

13. 函数 $f(x) = x^2 - 2x$ 在 $[0, 3]$ 上的最小值为_____.

14. 若 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两个根, 则 $x_1 + x_2$ 的值为_____, $|x_1 - x_2|$ 的值为_____.

15. 已知函数 $f(x)$, 给出三个性质:

① $f(x)$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$;

② $f(x)$ 是奇函数;

③ $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

写出一个同时满足性质①、性质②和性质③的函数解析式, $f(x) =$ _____.

16. 符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 如 $[1.3] = 1, [-1.3] = -2$, 定义函数 $f(x) = x - [x]$, 给出下列四个结论:

① $f(-0.5) = f(0.5)$;

② 函数 $f(x)$ 是增函数;

③ 函数 $f(x)$ 有最小值, 无最大值;

④ 函数 $g(x) = f(x) - 0.5, x \in [-3, 3]$ 有 6 个零点.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 5 题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

17. 已知集合 $A = \{x | 0 \leq x \leq 3\}$. 集合 $B = \{x | |x-1| > 1\}$.

(1) 求 $\complement_{\mathbf{R}} B$;

(2) 求 $A \cup B, (\complement_{\mathbf{R}} A) \cap (\complement_{\mathbf{R}} B)$.

18. 已知关于 x 的不等式 $(x-2)(x-a) < 0$ 的解集为 M .

(1) 当 $a=3$ 时, 求 M ;

(2) 当 $M \cap \{1\} \neq \emptyset$ 时, 求 a 的取值范围.

19. 已知函数 $f(x) = x + \frac{k}{x}, k \in \mathbf{R}$.

(1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

(2) 证明: 当 $k < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数;

(3) 求函数 $f(x) = x - \frac{4}{x}, x \in [1, 4]$ 的最大值.

20. 某化工单位采取新工艺, 把二氧化碳转化为一种可利用的化工产品. 已知该单位每月的处理量最少为 400 吨, 最多为 600 吨, 处理每吨二氧化碳得到可利用的化工产品价值为 100 元. 已知月处理成本 y (元)

与月处理量 x (吨) 之间的函数关系可近似的表示为 $y = \frac{1}{2}x^2 - 200x + 80000$. 每吨的平均处理成本

$$= \frac{\text{月处理成本}}{\text{月处理量}}.$$

(1) 该单位每月处理为多少吨时, 才能使每吨的平均处理成本最低?

(2) 该单位每月能否获利? 如果获利, 求出最大利润; 如果不获利, 则需要国家至少补贴多少元才能使单位不亏损?

21. 已知非空集合 $A \subseteq \mathbf{R}$. 用 $|A|$ 表示集合 A 中元素的个数. 设 $S = \{a \mid a = x + y, x \in A, y \in A \text{ 且 } x \neq y\}$,

$$T = \{a \mid a = x - y, x \in A, y \in A \text{ 且 } x > y\}.$$

(1) 若 $A = \{1, 2, 3\}$, 直接写出 S, T 以及 $|A|, |S|, |T|$ 的值.

(2) 若 $|A| = 4$, 求 $|S| + |T|$ 的取值范围.

参考答案

第一部分（选择题共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 【答案】C

【分析】先求解集合 A，根据交集的定义即可求解。

【详解】因为 $A = \{x \mid |x| \leq 2\} = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$,

所以 $A \cap B = \{-1, 0, 1, 2\}$.

故选：C.

2. 【答案】D

【分析】

全称命题的否定为存在命题，利用相关定义进行判断即可

【详解】全称命题的否定为存在命题，命题 $P: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 > 0$ ，则 $\neg P$ 为 $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$

故选：D

3. 【答案】A

【分析】根据题意进行排除和判断即可。

【详解】因为纵轴表示离学校的距离，横轴表示出发后的时间，

且小明离开家去学校上学，所以纵坐标随横坐标增加而减少，故排除 C 和 D；

由题意得，图象斜率的绝对值先小后大，故排除 B.

故选：A

4. 【答案】B

【分析】根据充分条件和必要条件的定义即可判断。

【详解】因为 $x > 2 \not\Rightarrow x > 3$ ，但 $x > 3 \Rightarrow x > 2$ ，所以 P 是 Q 的必要而不充分条件。

故选：B.

5. 【答案】C

【分析】取值验证可排除 ABD；分类讨论，利用不等式性质可判断 C.

【详解】取 $a = -3, b = 2$ ，满足 $a < b$ ，但 $(-3)^2 > 2^2, (-3)^2 > -3 \times 2, -\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$ ，故 ABD 错误；

当 $a < 0, b > 0$ 时， $a^3 < b^3$ 显然成立；

当 $0 < a < b$ 时，由不等式性质可知 $a^3 < b^3$ 成立；

当 $a < b < 0$ 时，则 $-a > -b > 0$ ，所以 $(-a)^3 > (-b)^3 > 0$ ，整理的 $a^3 < b^3$ 。

综上，C 正确。

故选：C

6. 【答案】A

【分析】先作差，然后配方即可判断大小.

【详解】因为 $M - N = 4x^2 + 2x + 1 - 3x(x + 1) = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$,

所以 $M > N$.

故选: A

7. 【答案】D

【分析】根据函数奇偶性和单调性相关知识直接判断即可.

【详解】对于 A, $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 A 错误;

对于 B, $y = x^2$ 关于 y 轴对称, 是偶函数, 故 B 错误;

对于 C, 当 $x = 0$ 时, $y = 1$, 所以函数不是奇函数, 故 C 错误;

对于 D, 令 $f(x) = x|x|$, 则 $f(-x) = -x|x| = -f(x)$, 所以函数是奇函数,

显然, 函数在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 D 正确.

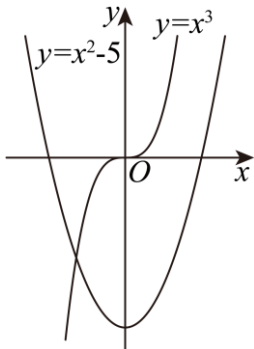
故选: D

8. 【答案】B

【分析】根据零点的存在性定理即可求解.

【详解】令 $f(x) = x^3 - x^2 + 5 = 0$, 得 $x^3 = x^2 - 5$,

画出 $y = x^3$, $y = x^2 - 5$ 的图象,



由图象可知, 函数 $f(x) = x^3 - x^2 + 5$ 在 $(-\infty, 0)$ 上只有一个零点, 在 $(0, +\infty)$ 上没有零点, D 错误;

又 $f(-3) = -27 - 9 + 5 = -31 < 0$, $f(-2) = -8 - 4 + 5 = -7 < 0$, $f(-1) = 3 > 0$, $f(0) = 5 > 0$,

因为 $f(-3) \cdot f(-2) > 0$, $f(-2) \cdot f(-1) < 0$, $f(-1) \cdot f(0) > 0$,

所以函数 $f(x) = x^3 - x^2 + 5$ 的零点所在的区间是 $(-2, -1)$, 故 AC 错误, B 正确.

故选: B.

9. 【答案】B

【分析】根据分段函数和单调性相关知识直接求解.

【详解】因为函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 3, & x \leq a \\ ax + 1, & x > a \end{cases}$ 在定义域上是单调函数，

显然函数在定义域上单调递减，

$$\text{则} \begin{cases} -\frac{a}{2} \geq a \\ a < 0 \\ 2a^2 - 3 \geq a^2 + 1 \end{cases}, \text{解得 } a \leq -2.$$

故选：B

10. 【答案】C

【分析】根据函数的奇偶性可知 $f(-1) - g(-1) = f(1) + g(1)$ ，代入解析式中即可。

【详解】 $f(-1) - g(-1) = f(1) + g(1) = (-1)^3 - 1 + 1 = -1$

故选：C

第二部分（非选择题 共 100 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

11. 【答案】 $\{x | x \geq 2, \text{且 } x \neq 0\} \cup [-2, 0) \cup (0, +\infty)$

【分析】根据函数表达式直接求定义域即可。

【详解】由题意得， $\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ ，所以 $x \geq -2$ 且 $x \neq 0$ ，

即函数的定义域为 $[-2, 0) \cup (0, +\infty)$ 。

故答案为： $\{x | x \geq 2, \text{且 } x \neq 0\} \cup [-2, 0) \cup (0, +\infty)$

12. 【答案】 $\{(2, 3)\}$

【分析】解方程组 $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$ 即可求解。

【详解】解方程组 $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ ，所以方程组 $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$ 的解集为 $\{(2, 3)\}$ 。

故答案为： $\{(2, 3)\}$ 。

13. 【答案】-1

【分析】根据二次函数性质直接求解即可。

【详解】函数 $f(x) = x^2 - 2x$ 对称轴为 $x = -\frac{-2}{2} = 1$ ，函数图象开口向上，

所以函数 $f(x) = x^2 - 2x$ 在 $[0, 3]$ 上的最小值为 $f(1) = 1 - 2 = -1$ 。

故答案为：-1

14. 【答案】 ①. 1 ②. $\sqrt{5}$

【分析】根据韦达定理可求得 $x_1 + x_2 = 1, x_1 x_2 = -1$ ，再根据 $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$ 即可求解。

【详解】因为 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两个根，

则 $x_1 + x_2 = 1, x_1 x_2 = -1$ ，

所以 $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{5}$ 。

故答案为：1； $\sqrt{5}$ 。

15. 【答案】 $-x$ （答案不唯一）

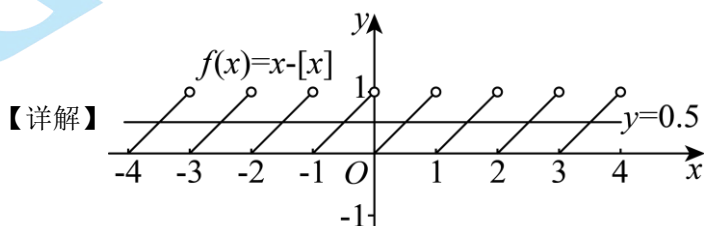
【分析】根据函数满足的条件，写出符合条件的一个函数解析式即可。

【详解】根据函数满足的条件可知，该函数可以为 $f(x) = -x$ 。

故答案为： $-x$ 。

16. 【答案】 ①③④

【分析】根据定义即可判断①；画出 $f(x) = x - [x]$ 的图象，根据图象即可判断②③④。



对于①， $f(-0.5) = -0.5 - (-1) = 0.5, f(0.5) = 0.5 - 0 = 0.5$ ，所以 $f(-0.5) = f(0.5)$ ，①正确；

画出 $f(x) = x - [x]$ 的图象，如图所示，

对于②，由图象可知，函数 $f(x)$ 在定义域内不单调，②错误；

对于③，由图象可知，函数 $f(x)$ 有最小值 0，无最大值，③正确；

对于④，令 $g(x) = f(x) - 0.5 = 0$ ，则 $f(x) = 0.5$ ，

由图象可知，图象 $f(x)$ 与直线 $y = 0.5$ 在 $[-3, 3]$ 上有 6 个交点，

所以函数 $g(x) = f(x) - 0.5, x \in [-3, 3]$ 有 6 个零点，④正确。

故答案为：①③④。

三、解答题共 5 题，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

17. 【答案】 (1) $\complement_{\mathbb{R}} B = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$

(2) $A \cup B = \mathbb{R}, (\complement_{\mathbb{R}} A) \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = \emptyset$

【分析】(1) 先求得 $B = \{x | |x - 1| > 1\} = \{x | x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$ ，再根据补集的定义即可求解；

(2) 根据并集的定义, 补集的定义以及交集定义即可求解.

【小问 1 详解】

因为 $B = \{x \mid |x-1| > 1\} = \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$, 所以 $\complement_{\mathbb{R}} B = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$;

【小问 2 详解】

$A \cup B = \mathbb{R}$, $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 3\}$,

所以 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = \emptyset$.

18. 【答案】(1) (2,3)

(2) $(-\infty, 1)$

【分析】(1) 根据条件解不等式即可;

(2) 根据条件转化为 $1 \in M$ 再求解即可.

【小问 1 详解】

因为 $a=3$, 所以不等式 $(x-2)(x-3) < 0$, 即 $2 < x < 3$,

所以 $M = (2, 3)$

【小问 2 详解】

因为 $M \cap \{1\} \neq \emptyset$, 所以 $1 \in M$,

所以 $\begin{cases} a < 2 \\ a < 1 \end{cases}$, 所以 $a < 1$,

故 a 的取值范围为 $(-\infty, 1)$

19. 【答案】(1) $f(x)$ 是奇函数, 理由见解析

(2) 证明见解析 (3) 3

【分析】(1) 根据 $k=0$ 和 $k \neq 0$ 分类讨论即可得到答案;

(2) 根据函数单调性定义证明即可;

(3) 根据 (2) 中结论直接求最值即可.

【小问 1 详解】

当 $k=0$ 时, $f(x) = x$ 定义域 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 且 $f(-x) = -x = -f(x)$,

所以此时 $f(x)$ 是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数;

当 $k \neq 0$ 时, $f(x) = x + \frac{k}{x}$ 定义域 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 且 $f(-x) = -x - \frac{k}{x} = -f(x)$,

所以此时 $f(x)$ 是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数.

综上所述, $f(x)$ 是奇函数

【小问 2 详解】

任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = x_1 + \frac{k}{x_1} - x_2 - \frac{k}{x_2} = (x_1 - x_2) - k \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} = (x_1 - x_2) \frac{(x_1 x_2 - k)}{x_1 x_2},$$

因为 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, $k < 0$,

所以 $x_1 - x_2 < 0, x_1 x_2 > 0, x_1 x_2 - k > 0$,

所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

所以当 $k < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数

【小问 3 详解】

由 (2) 可知, 函数 $f(x) = x - \frac{4}{x}$ 在 $[1, 4]$ 单调递增,

所以函数最大值为 $f(4) = 4 - 1 = 3$

20. **【答案】** (1) 400 吨

(2) 该单位每月不能获利, 需要国家至少补贴 40000 元才能使单位不亏损

【分析】 (1) 设每吨的平均处理成本为 w (元), 得到 $w = \frac{y}{x} = \frac{1}{2}x + \frac{80000}{x} - 200$ ($400 \leq x \leq 600$), 结合

基本不等式求解即可;

(2) 设该单位每月获利 s (元), 得到函数表达式, 结合二次函数性质求解即可.

【小问 1 详解】

设每吨的平均处理成本为 w (元),

$$\text{则 } w = \frac{y}{x} = \frac{1}{2}x + \frac{80000}{x} - 200 \quad (400 \leq x \leq 600),$$

$$\text{则 } w = \frac{1}{2}x + \frac{80000}{x} - 200 \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}x \cdot \frac{80000}{x}} - 200 = 200,$$

当且仅当 $\frac{1}{2}x = \frac{80000}{x}$, 即 $x = 400$ 时等号成立,

所以该单位每月处理为 400 吨时, 才能使每吨的平均处理成本最低

【小问 2 详解】

设该单位每月获利 s (元),

$$\text{则 } s = 100x - y = -\frac{1}{2}x^2 + 300x - 80000 \quad (400 \leq x \leq 600),$$

$$\text{函数图像开口向下, 对称轴 } x = \frac{300}{-2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 300,$$

所以函数在 $[400, 600]$ 单调递减,

$$\text{所以 } s_{\max} = -\frac{1}{2} \times 400^2 + 300 \times 400 - 80000 = -40000,$$

所以该单位每月不能获利，需要国家至少补贴 40000 元才能使单位不亏损

21. 【答案】(1) 答案见解析

(2) $[8, 12]$

【分析】(1) 根据题意即可求解；

(2) 根据题意可得 $|S| \leq 6$, $|T| \leq 6$, 从而可得 $|S| + |T| \leq 12$, 再分别求出 $|S|, |T|$ 的最小值, 即可求解.

【小问 1 详解】

根据题意可得 $S = \{3, 4, 5\}$, $T = \{1, 2\}$,

所以 $|A| = 3, |S| = 3, |T| = 2$.

【小问 2 详解】

令 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 且 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$,

任取两个元素作和, 可得: $a_4 + a_1, a_3 + a_1, a_2 + a_1, a_4 + a_3, a_3 + a_2, a_4 + a_2$, 共 6 个,

任取两个元素作差, 可得: $a_4 - a_1, a_3 - a_1, a_2 - a_1, a_4 - a_3, a_3 - a_2, a_4 - a_2$, 共 6 个,

因此 $|S| \leq 6$, $|T| \leq 6$, 则有 $|S| + |T| \leq 12$;

显然 $a_4 - a_1 > a_3 - a_1 > a_2 - a_1$, 当 $a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$ 时, $a_4 - a_2 = a_3 - a_1$,

此时集合 T 中只有 3 个元素, 因此 $|T|_{\min} = 3$,

对于 a_1, a_2, a_3, a_4 是满足 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ 的任意 4 个实数,

必有 $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_2 + a_3 < a_2 + a_4 < a_3 + a_4$,

显然 $a_1 + a_3 < a_4 + a_1 < a_2 + a_4$, 当 $a_4 + a_1 = a_3 + a_2$ 时, 集合 S 中只有 5 个元素,

因此 $|S|_{\min} = 5$, 所以 $|S| + |T| \geq 8$,

综上所述, $|S| + |T|$ 的取值范围为 $[8, 12]$.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023年10-11月北京各区各年级期中试题 & 答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

