海淀区高三年级第二学期期末练习

数学(理科)

2017.5

学校__________班级__________姓名__________成绩__________

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 若集合 $A=\{-2,0,1\}$，$B=\{x\mid x<-1$ 或 $x>0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-2\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\{-2,1\}$　　D. $\{-2,0,1\}$

2. 二项式 $(x-\frac{2}{x})^6$ 的展开式的第二项是

A. $6x^4$　　B. $-6x^4$　　C. $12x^4$　　D. $-12x^4$

3. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases} x-y-1\geq 0, \\ x+y-3\geq 0, \\ y\leq 3, \end{cases}$ 则 $2x+y$ 的最小值为

A. 11　　B. 5　　C. 4　　D. 2

4. 圆 $x^2+y^2-2y=0$ 与曲线 $y=|x|-1$ 的公共点个数为

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 0

5. 已知 $\{a_n\}$ 为无穷等比数列，且公比 $q>1$，记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则下面结论正确的是

A. $a_3>a_2$　　B. $a_1+a_2>0$　　C. $\{a_n^2\}$ 是递增数列　　D. S_n 存在最小值

6. 已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，则"$x_1+x_2=0$"是"$f(x_1)+f(x_2)=0$"的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 现有编号为①、②、③的三个三棱锥(底面水平放置)，俯视图分别为图1、图2、图3，则至少存在一个侧面与此底面互相垂直的三棱锥的所有编号是

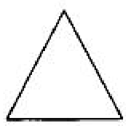


图1

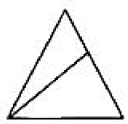


图2

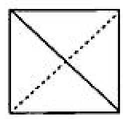
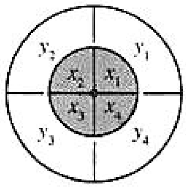


图3

A. ①　　B. ①②　　C. ②③　　D. ①②③

8. 已知两个半径不等的圆盘叠放在一起(有一轴穿过它们的圆心)，两圆盘上分别有互相垂直的两条直径将其分为四个区域，小圆盘上所写的实数分别记为 x_1,x_2,x_3,x_4，大圆盘上所写的实数分别记为 y_1,y_2,y_3,y_4，如图所示．将小圆盘逆时针旋转 $i(i=1,2,3,4)$ 次，每次转动90°，记 $T_i(i=1,2,3,4)$ 为转动 i 次后各区域内两数乘积之和，例如 $T_1=x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1$．若 $x_1+x_2+x_3+x_4<0$，$y_1+y_2+y_3+y_4<0$，则以下结论正确的是



A. T_1,T_2,T_3,T_4 中至少有一个为正数　B. T_1,T_2,T_3,T_4 中至少有一个为负数

C. T_1,T_2,T_3,T_4 中至多有一个为正数　D. T_1,T_2,T_3,T_4 中至多有一个为负数

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 在极坐标系中，极点到直线 $\rho\cos\theta=1$ 的距离为________．

10. 已知复数 $z=\dfrac{1-i}{i}$，则 $|z|=$ ________．

11. 在 $\triangle ABC$ 中，$A=2B$，$2a=3b$，则 $\cos B=$ ________．

12. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-2^x$，则 $f(\dfrac{1}{2})$ ________ $f(1)$（填"$>$"或"$<$"）；$f(x)$ 在区间 $(\dfrac{n-1}{n},\dfrac{n}{n+1})$ 上存在零点，则正整数 $n=$ ________．

13. 在四边形 $ABCD$ 中，$AB=2$．若 $\overrightarrow{DA}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=$ ________．

14. 已知椭圆 $G:\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(0<b<\sqrt{6})$ 的两个焦点分别为 F_1 和 F_2，短轴的两个端点分别为 B_1 和 B_2，点 P 在椭圆 G 上，且满足 $|PB_1|+|PB_2|=|PF_1|+|PF_2|$．当 b 变化时，给出下列三个命题：

①点 P 的轨迹关于 y 轴对称；

②存在 b 使得椭圆 G 上满足条件的点 P 仅有两个；

③$|OP|$的最小值为 2，

其中，所有正确命题的序号是________．

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15.（本小题满分 13 分）

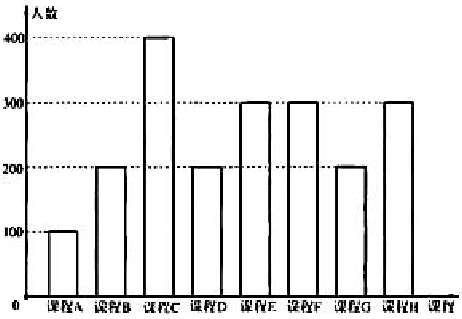
已知函数 $f(x)=\sin 2x\cos\dfrac{3\pi}{5}-\cos 2x\sin\dfrac{3\pi}{5}$．

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期和对称轴方程；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最小值．

16.（本小题满分13分）

为了响应教育部颁布的《关于推进中小学生研学旅行的意见》，某校计划开设八门研学旅行课程，并对全校学生的选择意向进行调查（调查要求全员参与，每个学生必须从八门课程中选出唯一一门课程）．本次调查结果整理成条形图如下．



上图中，已知课程A,B,C,D,E为人文类课程，课程F,G,H为自然科学类课程．为进一步研究学生选课意向，结合上面图表，采取分层抽样方法从全校抽取1%的学生作为研究样本组（以下简称"组M"）．

（Ⅰ）在"组M"中，选择人文类课程和自然科学类课程的人数各有多少？

（Ⅱ）为参加某地举办的自然科学营活动，从"组M"所有选择自然科学类课程的同学中随机抽取4名同学前往．其中选择课程F或课程H的同学参加本次活动，费用为每人1500元，选择课程G的同学参加本次活动，费用为每人2000元．

（i）设随机变量X表示选出的4名同学中选择课程G的人数，求随机变量X的分布列；

（ii）设随机变量Y表示选出的4名同学参加科学营的费用总和，求随机变量Y的期望．

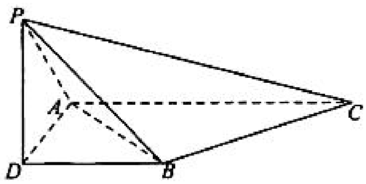
17.（本小题满分14分）

如图，在三棱锥$P-ABC$中，侧棱$PA=2$，底面三角形ABC为正三角形，边长为2，顶点P在平面ABC上的射影为D，$AD\perp DB$，$DB=1$．

（Ⅰ）求证：AC∥平面PDB；

（Ⅱ）求二面角$P-AB-C$的余弦值；

（Ⅲ）线段PC上是否存在点E使得$PC\perp$平面ABE，如果存在，求$\frac{CE}{CP}$的值；如果不存在，请说明理由．



18.（本小题满分 14 分）

已知动点 M 到点 $N(1,0)$ 和直线 l：$x=-1$ 的距离相等.

（Ⅰ）求动点 M 的轨迹 E 的方程；

（Ⅱ）已知不与 l 垂直的直线 l' 与曲线 E 有唯一公共点 A，且与直线 l 的交点为 P，以线段 AP 为直径作圆 C. 判断点 N 和圆 C 的位置关系，并证明你的结论.

19.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=e^{ax}-x$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线 l 与直线 $x+2y+3=0$ 垂直，求 a 的值；

（Ⅱ）当 $a\neq 1$ 时，求证：存在实数 x_0 使 $f(x_0)<1$.

20.（本小题满分 13 分）

对于无穷数列 $\{a_n\}$，记 $T=\{x\mid x=a_j-a_i, i<j\}$，若数列 $\{a_n\}$ 满足："存在 $t\in T$，使得只要 $a_m-a_k=t(m,k\in\mathbf{N}^*$ 且 $m>k)$，必有 $a_{m+1}-a_{k+1}=t$"，则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P(t)$.

（Ⅰ）若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\begin{cases}2n, & n\leqslant 2,\\ 2n-5, & n\geqslant 3,\end{cases}$ 判断数列 $\{a_n\}$ 是否具有性质 $P(2)$？是否具有性质 $P(4)$？（只需写出判断结果）

（Ⅱ）求证："T 是有限集"是"数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P(0)$"的必要不充分条件；

（Ⅲ）已知 $\{b_n\}$ 是各项均为正整数的数列，且 $\{b_n\}$ 既具有性质 $P(2)$，又具有性质 $P(5)$，求证：存在整数 N，使得 $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots, a_{N+k}, \cdots$ 是等差数列.

海淀区高三年级第二学期期末练习参考答案

数学（理科） 2017.5

一、选择题（本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	B	D	C	A	B	A

二、填空题（本大题共 6 小题,每小题 5 分，有两空的小题，第一空 3 分，第二空 2 分，共 30 分）

9. 1	10. $\sqrt{2}$	11. $\frac{3}{4}$
12. $>$，2	13. 2	14. ①③

三、解答题（本大题共 6 小题, 共 80 分）

15.（本小题满分 13 分）

解：

（Ⅰ）$f(x)=\sin 2x\cos\frac{3\pi}{5}-\cos 2x\sin\frac{3\pi}{5}=\sin(2x-\frac{3\pi}{5})$，

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

因为 $y=\sin x$ 的对称轴方程为 $x=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

令 $2x-\frac{3\pi}{5}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

得 $x=\frac{11\pi}{20}+\frac{1}{2}k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

所以 $f(x)$ 的对称轴方程为 $x=\frac{11\pi}{20}+\frac{1}{2}k\pi,k\in\mathbf{Z}$

或者：$f(x)$ 的对称轴方程为 $2x-\frac{3\pi}{5}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 和 $2x-\frac{3\pi}{5}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

即 $x=\frac{11\pi}{20}+k\pi$ 和 $x=\frac{\pi}{20}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$

（Ⅱ）因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，

所以 $2x\in[0,\pi]$，

所以 $2x-\frac{3\pi}{5}\in[-\frac{3\pi}{5},\frac{2\pi}{5}]$

所以，当 $2x-\frac{3\pi}{5}=-\frac{\pi}{2}$ 即 $x=\frac{\pi}{20}$ 时，

$f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最小值为 -1．

16.（本小题满分 13 分）

解：

（Ⅰ）选择人文类课程的人数为$(100+200+400+200+300)\times 1\%=12$（人）；

选择自然科学类课程的人数为$(300+200+300)\times 1\%=8$（人）.

（Ⅱ）（ⅰ）依题意，随机变量X可取0，1，2

$$p(X=0)=\frac{C_6^4C_2^0}{C_8^4}=\frac{3}{14};\quad p(X=1)=\frac{C_6^3C_2^1}{C_8^4}=\frac{4}{7};\quad p(X=2)=\frac{C_6^2C_2^2}{C_8^4}=\frac{3}{14}.$$

故随机变量X的分布列为

X	0	1	2
p	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{14}$

（ⅱ）法1：依题意，随机变量$Y=2000X+1500(4-X)=6000+500X$，

所以随机变量Y的数学期望为

$$E(Y)=6000+500E(X)$$

$$=6000+500(0\times\frac{3}{14}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{3}{14})$$

$$=6500.$$

（ⅱ）法2：依题意，随机变量Y可取6000，6500，7000.

所以随机变量Y的分布列为

Y	6000	6500	7000
p	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{14}$

所以随机变量Y的数学期望为

$$E(Y)=6000\times\frac{3}{14}+6500\times\frac{4}{7}+7000\times\frac{3}{14}$$

$$=6500.$$

17.（本小题满分14分）

解：

（Ⅰ）因为$AD\perp DB$，且$DB=1$，$AB=2$，所以$AD=\sqrt{3}$，

所以$\angle DBA=60^\circ$.

因为$\triangle ABC$为正三角形，所以$\angle CAB=60^\circ$，

又由已知可知$ACBD$为平面四边形，所以$DB\parallel AC$.

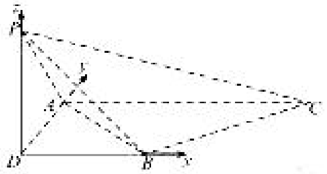
因为$AC\not\subset$平面PDB，$DB\subset$平面PDB，

所以$AC\parallel$平面PDB.

（Ⅱ）由点P在平面ABC上的射影为D可得$PD\perp$平面$ACBD$，

所以$PD\perp DA$，$PD\perp DB$，

如图，建立空间直角坐标系，则由已知可知$B(1,0,0)$，$A(0,\sqrt{3},0)$，$P(0,0,1)$，$C(2,\sqrt{3},0)$.



平面 ABC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$．

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 PAB 的一个法向量，则

由 $\begin{cases}\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{BP}\cdot\boldsymbol{m}=0\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}-x+\sqrt{3}y=0,\\ -x+z=0,\end{cases}$

令 $y=1$，则 $x=\sqrt{3},z=\sqrt{3}$，所以平面 PAB 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$，

所以 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times 1}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$．

所以二面角 $P-AB-C$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$．

（Ⅲ）由（Ⅱ）可得 $\overrightarrow{AB}=(1,-\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{PC}=(2,\sqrt{3},-1)$，

因为 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AB}=(2,\sqrt{3},-1)\cdot(1,-\sqrt{3},0)=-1\neq 0$，

所以 PC 与 AB 不垂直，

所以在线段 PC 上不存在点 E 使得 $PC\perp$ 平面 ABE．

18.（本小题满分 14 分）

解：

（Ⅰ）设动点 $M(x,y)$．

由抛物线定义可知点 M 的轨迹 E 是以 $N(1,0)$ 为焦点，直线 l：$x=-1$ 为准线的抛物线，

所以轨迹 E 的方程为 $y^2=4x$．

（Ⅱ）法 1：由题意可设直线 l'：$x=my+n$．

由 $\begin{cases}x=my+n,\\ y^2=4x\end{cases}$ 可得 $y^2-4my-4n=0$　（＊），

因为直线 l' 与曲线 E 有唯一公共点 A，

所以 $\Delta=16m^2+16n=0$，即 $n=-m^2$，

所以（＊）可化简为 $y^2-4my+4m^2=0$．

所以 $A(m^2,2m)$，

令 $x=-1$ 得 $P(-1,-\dfrac{1+n}{m})$，

因为 $n=-m^2$，

所以 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NP}=(m^2-1,2m)\cdot(-2,-\frac{1+n}{m})=-2m^2+2-2-2n=0$

所以 $NA\perp NP$，

所以点 N 在以 BA 为直径的圆 C 上.

法 2：依题意可设直线 l'：$y=kx+b,(k\neq 0)$，

由 $\begin{cases} y=kx+b, \\ y^2=4x \end{cases}$ 可得 $k^2x^2+2(bk-2)x+b^2=0$ （*），

因为直线 l' 与曲线 E 有唯一公共点 A，且与直线 l 的交点为 P，

所以 $\begin{cases} k\neq 0, \\ \Delta=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} k\neq 0, \\ bk=1, \end{cases}$

所以（*）可化简为 $k^2x^2-4x+\frac{1}{k^2}=0$，

所以 $A(\frac{1}{k^2},\frac{2}{k})$.

令 $x=-1$ 得 $P(-1,\frac{1}{k}-k)$，

因为 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NP}=(\frac{1}{k^2}-1,\frac{2}{k})\cdot(-2,\frac{1}{k}-k)=\frac{-2}{k^2}+2+\frac{2}{k^2}-2=0$，

所以 $NA\perp NP$，

所以点 N 在以 BA 为直径的圆 C 上.

19.（本小题满分 13 分）

解：

（Ⅰ）$f'(x)=ae^{ax}-1$，

因为曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线与直线 $x+2y+3=0$ 垂直，

所以切线 l 的斜率为 2，

所以 $f'(0)=2$，

所以 $a=3$.

（Ⅱ）法 1：当 $a<0$ 时，显然有 $f(1)<e^a-1<0<1$，即存在实数 x_0 使 $f(x_0)<1$；

当 $a>0,a\neq 1$ 时，由 $f'(x)=0$ 可得 $x=\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}$，

所以在 $x\in(-\infty,\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a})$ 时，$f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a})$ 上递减；

$x\in(\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a},+\infty)$ 上递增

所以 $f(\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a})=\frac{1}{a}(1+\ln a)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

由函数 $f(x)=e^{ax}-x$ 可得 $f(0)=1$.

由 $a\neq1$ 可得 $\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}\neq0$，

所以 $f(\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a})<f(0)=1$，

综上，若 $a\neq1$，存在实数 x_0 使 $f(x_0)<1$.

（Ⅱ）法 2：当 $a\leq0$ 时，显然有 $f(1)<e^a-1\leq0<1$，即存在实数 x_0 使 $f(x_0)<1$；

当 $a>0,a\neq1$ 时，由 $f'(x)=0$ 可得 $x=\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}$，

所以在 $x\in(-\infty,\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a})$ 时，$f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a})$ 上递减；

$x\in(\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a},+\infty)$ 上递增.

所以 $f(\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a})=\frac{1-\ln a}{a}$ 是 $f(x)$ 的极小值.

设 $g(x)=\frac{1+\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}(x>0)$，令 $g'(x)=0$，得 $x=1$

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	极大值	↘

所以当 $x\neq1$ 时 $g(x)<g(1)=1$，

所以 $f(\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a})<1$，

综上，若 $a\neq1$，存在实数 x_0 使 $f(x_0)<1$.

20.（本小题满分 13 分）

解：

（Ⅰ）数列 $\{a_n\}$ 不具有性质 $P(2)$；

具有性质 $P(4)$.

（Ⅱ）（不充分性）对于周期数列 1,1,2,2,1,1,2,2,…，$T=\{0,1\}$ 是有限集，但是由于 $a_2-a_1=0,a_3-a_2=1$，

所以不具有性质 $P(0)$；

（必要性）因为数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P(0)$，

所以一定存在一组最小的 $m,k\in\mathbf{N}^*$ 且 $m>k$，满足 $a_m-a_k=0$，即 $a_m=a_k$

由性质 $P(0)$ 的含义可得 $a_{m+1}=a_{k+1}, a_{m+2}=a_{k+2}, \cdots, a_{2m-k-1}=a_{m-1}, a_{2m-k}=a_m$，

所以数列 $\{a_n\}$ 中，从第 k 项开始的各项呈现周期性规律：$a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{m-1}$ 为一个周期中的各项，

所以数列 $\{a_n\}$ 中最多有 m 个不同的项，

所以 T 最多有 C_m^2 个元素，即 T 是有限集.

（III）因为数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P(2)$，数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P(5)$，

所以数列 $\{a_n\}$ 中一定存在一项 a_M，使得 $a_{M+p}-a_M=2$，$a_{M+q}-a_M=5$，其中 p,q 分别是满足上述关系式的最小的正整数，显然 $p\neq q$，

由性质 $P(2),P(5)$ 的含义可得 $\forall k\in\mathbf{N}$，$a_{M+p+k}-a_{M+k}=2, a_{M+q+k}-a_{M+k}=5$，

所以 $a_{M+qp}-a_M=(a_{M+qp}-a_{M+(q-1)p})+(a_{M+(q-1)p}-a_{M+(q-2)p})+\cdots+(a_{M+p}-a_M)=2q$

$a_{M+qp}-a_M=(a_{M+pq}-a_{M+(p-1)q})+(a_{M+(p-1)q}-a_{M+(p-2)q})+\cdots+(a_{M+q}-a_M)=5p$

所以 $a_{M+qp}=a_M+2q=a_M+5p$

所以 $2q=5p$，

又 p,q 是满足 $a_{M+p}-a_M=2$，$a_{M+q}-a_M=5$ 的最小的正整数，

所以 $q=5, p=2$，

$a_{M+2}-a_M=2, a_{M+5}-a_M=5$，

所以 $\forall k\in\mathbf{N}$，$a_{M+2+k}-a_{M+k}=2, a_{M+5+k}-a_{M+k}=5$，

所以 $\forall k\in\mathbf{N}$，$a_{M+2k}=a_{M+2(k-1)}+2=\cdots=a_M+2k$，$a_{M+5k}=a_{M+5(k-1)}+5=\cdots=a_M+5k$，

取 $N=M+5$，则 $\forall k\in\mathbf{N}$，

所以，若 k 是偶数，则 $a_{N+k}=a_N+k$；

若 k 是奇数，则 $a_{N+k}=a_{N+5+(k-5)}=a_{N+5}+(k-5)=a_N+5+(k-5)=a_N+k$，

所以 $\forall k\in\mathbf{N}$，$a_{N+k}=a_N+k$

所以 $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots, a_{N+k}, \cdots$ 是公差为 1 的等差数列.